J. A. FIDALGO
M. R. FERNÁNDEZ

1000 problemas de Física General

- Mecánica
- Electricidad
- Electromagnetismo
- Ondas
- Electrónica
- Relatividad
- Radiactividad
- Termodinámica



1 000 PROBLEMAS DE FÍSICA GENERAL

M. R. FERNÁNDEZ
J. A. FIDALGO

1 000 PROBLEMAS DE FÍSICA GENERAL

• MECÁNICA • ELECTRICIDAD • ELECTROMAGNETISMO • ONDAS • ELECTRÓNICA • RELATIVIDAD • RADIACTIVIDAD • TERMODINÁMICA

BACHILLERATO LOGSE
PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
ESCUELAS TÉCNICAS
FACULTADES UNIVERSITARIAS

EVEREST

Autores: *José A. Fidalgo Sánchez*
Manuel R. Fernández Pérez

Coordinación editorial: *Juan Carlos Carrascosa Calpena*

Maquetación: *Francisco Fontecha Aller*

Ilustraciones: *José Luis Giner*
Archivo Everest

Diseño de cubierta: *Alfredo Anievas*

Fotografía de cubierta: *AGE Fotostock*

OCTAVA EDICIÓN, segunda reimpresión, 2004

Carretera León-La Coruña, km 5 - LEÓN
ISBN: 84-241-7603-0
Depósito legal: LE. 400-2001
Printed in Spain - Impreso en España

EDITORIAL EVERGRÁFICAS, S. L.
Carretera León-La Coruña, km 5
LEÓN (España)

PRESENTACIÓN

El estudio de la Física, entendida en una de sus primeras definiciones como «Ciencia de la medida», exige siempre unos criterios cuantitativos a la hora de plantear, desarrollar e interpretar los múltiples fenómenos de la Naturaleza, objetivo último de toda investigación. Nada más significativo que lo expresado por lord Kelvin en el siglo XIX y hoy tan actual como entonces:

> *«Suelo decir con frecuencia que cuando se puede medir aquello de que se habla y expresarlo en números, se sabe algo de ello; pero nuestro saber es deficiente e insatisfactorio mientras no somos capaces de expresarlo en números; lo demás puede significar el comienzo del conocimiento, pero nuestros conceptos apenas habrán avanzado en el camino de la ciencia, y esto cualquiera que sea la materia de que se trate».*

La enseñanza de la Física, evidentemente, obliga, como punto de partida, a la adquisición de unos contenidos teóricos cuya «claridad conceptual» sirva de soporte a la hora de interpretar y solucionar cualquier problema propuesto; problema que, en definitiva, no es otra cosa que una posible situación real más o menos idealizada en la que, para facilitar la solución, se ha prescindido, o se han controlado, algunas variables.

Este «mínimo de contenidos», como dice lord Kelvin, significa el comienzo del conocimiento; pero resulta insuficiente si no conduce a una interpretación cuantitativa del fenómeno (problema) objeto de estudio.

Con frecuencia asistimos, un tanto atónitos, al asombroso espectáculo de ver cómo alumnos de Bachillerato, e incluso de primeros cursos de carreras universitarias, pretenden enfocar los problemas de Física como si se tratara de una simple y directa aplicación de fórmulas vacías de contenido, o, lo que es más grave, sin intentar siquiera la búsqueda de una correcta interpretación del fenómeno y del significado físico de los resultados obtenidos.

Al plantearse la confección de este libro, como material de apoyo a los estudiantes de Física General, hemos pretendido conseguir tres objetivos básicos:

- *Ofrecer una comprensión e interpretación lógicas de la realidad física, dando una visión panorámica de aquellos modelos y teorías de mayor interés científico.*
- *Poner al lector en contacto con aquellos problemas que, de hecho, son o pueden ser situaciones reales, explicitando su tratamiento conceptual y su significado físico tanto en el proceso de desarrollo como en los resultados obtenidos.*
- *Fomentar una manera de pensar seria, razonada y crítica.*

Para ello hemos tenido muy en cuenta los siguientes criterios:

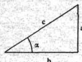
- *Una evaluación objetiva del nivel de conocimientos, tanto físicos como matemáticos, exigibles a los alumnos que pretenden acceder a niveles superiores en el estudio de la Física.*
- *Evitar, en la medida de lo posible, el crear una imagen —falsa, por supuesto— de que la Física es una «aplicación» sin más de las Matemáticas; insistiendo, eso sí, en la necesidad de un lenguaje matemático para alcanzar los objetivos propuestos.*
- *Para facilitar la «selección de cuestiones y problemas» a los alumnos de 2.º curso de Bachillerato, se han señalado con un asterisco aquellas y aquellos que han sido propuestos en sucesivas convocatorias de Examen de Selectividad en diversas Universidades.*

Es nuestro deseo que tanto a profesores como a alumnos les sea útil esta publicación, esperando que sea acogida tan favorablemente como lo han sido nuestros anteriores trabajos. A su generosidad e interés apelamos de nuevo para recibir todas las sugerencias que estimen conveniente indicarnos; tengan la seguridad de que las aceptaremos con el máximo agradecimiento.

LOS AUTORES

1. ANÁLISIS DIMENSIONAL. LA MEDIDA. ERRORES.

FORMULARIO MATEMÁTICO (REPASO)



$\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\text{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sen α	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	−1
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	−1	0
tg α	0	$\sqrt{3}/3$	1	3	∞	0	−∞
ctg α	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	−∞	0

$\text{sen}\,(a \pm b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \text{sen}\,b$	$\text{sen}\,2a = 2\,\text{sen}\,a \cdot \cos a$
$\cos\,(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$	$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2\,a$
$\text{tg}\,(a \pm b) = \dfrac{\text{tg}\,a \pm \text{tg}\,b}{1 \mp \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$	$\text{tg}\,2a = \dfrac{2\,\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2\,a}$
$du = \dfrac{du}{dx}\,dx$	$\int du = u + C$
$d\,(au) = a\,du$	$\int a\,du = a \int du + C$

$d(u + v) = du + dv$	$\int (du + dv) = \int du + \int dv + C$
$d(u^n) = nu^{n-1}du$	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$
$d(\sqrt{u}) = \frac{du}{2\sqrt{u}}$	$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C$
$d(\ln u) = \frac{du}{u}$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
$d(e^u) = e^u du$	$\int e^u du = e^u + C$
$d(a^u) = a^u \ln a\ du$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
$d(\mathrm{sen}\ u) = \cos u\ du$	$\int \cos u\ du = \mathrm{sen}\ u + C$
$d(\cos u) = -\mathrm{sen}\ u\ du$	$\int \mathrm{sen}\ u\ du = -\cos u + C$
$d(\mathrm{tg}\ u) = \sec^2 u\ du$	$\int \sec^2 u\ du = \mathrm{tg}\ u + C$
$d(\mathrm{ctg}\ u) = -\mathrm{cosec}^2 u\ du$	$\int \mathrm{cosec}^2 u\ du = -\mathrm{ctg}\ u + C$
$d(\mathrm{arc\ sen}\ u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \mathrm{arc\ sen}\ u + C$
$d(\mathrm{arc\ cos}\ u) = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$	$\int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = \mathrm{arc\ cos}\ u + C$
$d(\mathrm{arc\ tg}\ u) = \frac{du}{1+u^2}$	$\int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{arc\ tg}\ u + C$
$d(\mathrm{arc\ ctg}\ u) = \frac{-du}{1+u^2}$	$\int \frac{-du}{1+u^2} = \mathrm{arc\ ctg}\ u + C$
$d(\mathrm{sh}\ u) = \mathrm{ch}\ u\ du$	$\int \mathrm{ch}\ u\ du = \mathrm{sh}\ u + C$
$d(\mathrm{ch}\ u) = \mathrm{sh}\ u\ du$	$\int \mathrm{sh}\ u\ du = \mathrm{ch}\ u + C$
$d(\mathrm{tgh}\ u) = \mathrm{sech}^2 u\ du$	$\int \mathrm{sech}^2 u\ du = \mathrm{tgh}\ u + C$

1. ANÁLISIS DIMENSIONAL. LA MEDIDA. ERRORES.

1.1. *Explica brevemente la diferencia entre observación y experimentación.*

Solución: La observación consiste en el estudio del fenómeno tal como se verifica en la Naturaleza, interviniendo normalmente todas las variables que pueden influir en él. La experimentación consiste en el estudio del fenómeno reproducido artificialmente, controlando en cada proceso las variables que interesa estudiar.

1.2. *¿Qué entiendes por modelo? Explícalo con un ejemplo.*

Solución: Un modelo es una interpretación lógica y, por tanto, válida de un fenómeno. No se pretende que el modelo sea **la verdad,** sino que interprete satisfactoriamente lo observado.

Ejemplos: Los modelos atómicos (Dalton, Bohr, Rutherford, etc.); el modelo del calórico (naturaleza del calor); modelos acerca de la naturaleza de la luz; modelos acerca del porqué de la electrización, etc.

1.3. *No hay teorías objetivas, sino explicaciones válidas. ¿Qué quiere decir esto? Explícalo con un ejemplo.*

Solución: El investigador debe estar convencido de que sólo puede conocer la realidad **subjetivamente.** Por tanto, todas las conclusiones que obtenga en sus observaciones serán subjetivas; lo cual quiere decir que serán satisfactorias y válidas durante un determinado período histórico. Al descubrirse nuevos fenómenos y al mejorar los métodos de observación esas teorías deberán ser corregidas o modificadas.

1.4. *¿Qué ventajas tiene el tomar la fuerza como magnitud fundamental? ¿Y el tomar la masa? Razónalo con un ejemplo.*

Solución: La fuerza es fácil de determinar con un dinamómetro, pudiendo reproducirse su unidad con relativa facilidad. La masa ofrece la ventaja de su práctica invariabilidad.

[illegible]

Solución: Cuando se expresa una medida debe indicarse cuántas veces contiene a la unidad empleada y cuál es esta unidad. Así, no puede decirse que la masa de un cuerpo es 5, sino 5 g o 5 kg, etc.

[illegible]

Solución: La ecuación de dimensiones representa la dependencia que existe entre una magnitud derivada y las fundamentales. Esta dependencia la expresa en sus dos aspectos: cualitativo y cuantitativo. Las ecuaciones de di-

mensiones sirven para comprobar la homogeneidad de las fórmulas físicas, así como para deducir algunas de ellas.

1.7. ***Hallar la ecuación de dimensiones de la superficie de una lámina rectangular de dimensiones a y b.***

Solución: Como $S = a \cdot b$, y tanto a como b son longitudes,

$$\boxed{[S] = L \cdot L = L^2}$$

1.8. ***Hallar la ecuación de dimensiones de la velocidad.***

Solución: Como $v = \frac{s}{t}$, resulta: $\boxed{[v] = LT^{-1}}$

1.9. ***Hallar la ecuación de dimensiones de la aceleración.***

Solución: Ya que $a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{v}{t} = \frac{s/t}{t}$, tenemos que: $\boxed{[a] = LT^{-2}}$

Esta ecuación de dimensiones significa que la aceleración es directamente proporcional a la longitud e inversamente proporcional al cuadrado del tiempo.

1.10. ***Calcular las ecuaciones de dimensión de las siguientes magnitudes: a) trabajo; b) potencia; c) presión.***

Solución:

a) Como $W = F \cdot s \cdot \cos \varphi$, resulta:

$[W] = [F \cdot s \cdot \cos \varphi] = [m \cdot a \cdot s \cdot \cos \varphi] = MLT^{-2} \cdot L = \boxed{ML^2T^{-2}}$

b) Ya que $P = \frac{W}{t}$ y $[W] = ML^2T^{-2}$, resulta:

$$[P] = \frac{ML^2T^{-2}}{T} = \boxed{ML^2T^{-3}}$$

c) Sabemos que $p = \frac{F}{S}$. Como $[F] = MLT^{-2}$ y $[S] = L^2$, se obtiene:

$$[p] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = \boxed{ML^{-1}T^{-2}}$$

1.11. ***¿Qué ecuación de dimensiones tienen las razones trigonométricas?***

Solución: Como las razones trigonométricas son el cociente entre dos longitudes, **carecen de dimensiones.**

1.12. ***¿Qué ecuación de dimensiones tiene el número π?***

Solución: El número π viene dado por el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Por consiguiente, al tratarse de un cociente entre dos longitudes, carece de dimensiones.

1.13. ***(*) Comprobar que las dimensiones de la energía cinética son las de un trabajo.***

Solución: La ecuación de dimensiones del trabajo es: $[W] = ML^2T^{-2}$ (véase problema 1.10), y la de la energía cinética:

$$[E_c] = \left[\frac{1}{2}\ mv^2\right] = M \cdot (LT^{-1})^2 = ML^2T^{-2}$$

Por tanto:

$$\boxed{[E_c] = [W]}$$

1.14. ***Demuestra que la ecuación $v = \sqrt{2gh}$ es homogénea (v es una velocidad; g, una aceleración, y h, una longitud).***

Solución: La ecuación de dimensiones de v es:

$$[v] = \left[\frac{s}{t}\right] = LT^{-1}$$

y la de $\sqrt{2gh}$:

$$[\sqrt{2gh}] = \sqrt{LT^{-2} \cdot L} = \sqrt{L^2T^{-2}} = LT^{-1}$$

Por consiguiente, como $[v] = [\sqrt{2gh}]$, la ecuación mencionada es **homogénea.**

1.15. ***(*) El electronvoltio (eV) se define como la energía que adquiere un electrón cuando está sometido a una diferencia de potencial de 1 voltio. Probar que, efectivamente, el producto eV tiene dimensiones de energía.***

Solución:

a) La ecuación de dimensiones de la energía es: $[W] = ML^2T^{-2}$, mientras que las de e y V son:

$$[e] = [Q] = AT$$

$$[V] = \frac{[W]}{[Q]} = \frac{ML^2T^{-2}}{AT} = ML^2T^{-3}A^{-1}$$

Por tanto: $\mathbf{[eV]} = AT \cdot ML^2T^{-3}A^{-1} = ML^2T^{-2} = \mathbf{[W]}$, conforme se quería demostrar.

b) Utilizando los conceptos de carga, potencial y energía eléctrica, resulta que estas magnitudes están relacionadas mediante la expresión: $V = \frac{W}{Q}$, por lo que es evidente que el producto de una carga por un potencial tenga las dimensiones de una energía.

1.16. *¿Es correcta o errónea la expresión $T = \sqrt{\frac{l}{g}}$ para el período de un péndulo (en la que T representa un tiempo; l, una longitud, y g, una aceleración)?*

Solución:

$$[T] = T;$$

$$\left[\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = \sqrt{\frac{L}{LT^{-2}}} = \sqrt{T^2} = T$$

La ecuación es homogénea y, en principio, pudiera ser aceptable, pero **es errónea,** debido a que falta en ella el coeficiente numérico 2π. La fórmula correcta sería: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Estos coeficientes que no afectan a la homogeneidad de una fórmula reciben el nombre de **coeficientes adimensionales.**

1.17. *No recordamos si la fórmula del período del péndulo es:*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad o \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$$

¿Cómo se podría saber cuál de las dos es la correcta?

Solución: Comprobando cuál de las dos es homogénea; es decir, con los dos miembros dimensionalmente iguales. Procediendo de esta forma (ver problema anterior), vemos que la **primera fórmula es la correcta.**

[illegible]

Solución: Dicha fórmula, expresada dimensionalmente, es:

$$MT^{-2} = MT^{-2} + ML^{-1}T^{-2}$$

Por tanto, **no es correcta,** ya que carece de homogeneidad, puesto que el segundo sumando de la derecha no tiene iguales dimensiones que los otros dos.

Para que fuese correcta, se podría multiplicar este segundo sumando por una longitud, con lo que quedaría de la forma siguiente:

$$\frac{m \cdot a}{l} = p \cdot l + 1{,}5\, \rho\, \frac{V}{t^2} \quad (V = \text{volumen})$$

o bien:

$$\frac{m \cdot a}{l} = p \cdot l + 1{,}5\, \frac{m}{t^2}$$

1.19. *(*) En el Sistema Internacional (SI) el valor numérico de la constante de gravitación universal es 6,67 · 10^{-11}. Obtener su valor numérico en un sistema en el que las unidades fundamentales sean el kilómetro, la tonelada y la hora.*

Solución: La expresión matemática de la ley de gravitación universal es:

$$F = G\, \frac{m \cdot m'}{r^2}$$

donde $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

Por consiguiente:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, \frac{kg \cdot m/s^2 \cdot m^2}{kg^2} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1\ km}{10^3\ m}\right)^3 \cdot \frac{10^3\ kg}{1\ ton} \cdot \left(\frac{3{,}6 \cdot 10^3\ s}{1\ h}\right)^2 = \boxed{8{,}64 \cdot 10^{-10}\ \frac{km^3}{ton \cdot h^2}}$$

1.20. *(*) El valor numérico de la permitividad eléctrica (ε_o) en el vacío es 8,85 · 10^{-12} en el SI. Obténgase su valor en un sistema cuyas unidades fundamentales sean kilómetro, tonelada, hora y culombio.*

Solución: La expresión matemática de la ley de Coulomb es:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

donde $\varepsilon_o = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}$.

Por tanto:

$$\varepsilon_o = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \cdot \frac{1\ N}{1\ kg \cdot \dfrac{m}{s^2}} = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2 \cdot s^2}{kg \cdot m^3} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1\ h}{3{,}6 \cdot 10^3\ s}\right)^2 \cdot \left(\frac{10^3\ m}{1\ km}\right)^3 \cdot \frac{10^3\ kg}{1\ ton} = \boxed{\mathbf{6{,}83 \cdot 10^{-7}\ \frac{C^2 \cdot h^2}{ton \cdot km^3}}}$$

1.21. ***(*) Comprobar, utilizando el análisis dimensional, que la permitividad eléctrica, ε, puede expresarse en F/m.***

Solución: De acuerdo con la ley de Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

la ecuación de dimensiones de la permitividad eléctrica es:

$$[\varepsilon_o] = \left[\frac{Q_1 \cdot Q_2}{F \cdot r^2}\right] = \frac{(AT)^2}{MLT^{-2}L^2} = \frac{A^2T^2}{ML^3T^{-2}} = M^{-1}L^{-3}T^4A^2$$

Por otra parte, la capacidad tiene como ecuación de dimensiones:

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{AT}{ML^2T^{-3}A^{-1}} = M^{-1}L^{-2}T^4A^2$$

Se deduce, por tanto, que: $[\varepsilon_o] = \dfrac{[C]}{L}$, por lo que la permitividad **se puede expresar** en unidades de capacidad partido por unidades de longitud; esto es, en F/m.

1.22. ***Deducir mediante el análisis dimensional la fórmula del volumen de una esfera, sabiendo que depende solamente de su radio.***

Solución: Ya que las dimensiones del primer miembro (volumen) son L^3, en el segundo miembro ha de aparecer una longitud (el radio) elevada al cubo. Podemos escribir, por lo tanto: $\mathbf{V = k \cdot R^3}$. El coeficiente adimensional k, que no se puede obtener mediante el análisis de las dimensiones, es igual a $\dfrac{4}{3}\pi$.

1.23. ***Al estudiar experimentalmente las magnitudes de que depende el período de un péndulo parece deducirse que puedan influir sobre él la longitud del hilo, la masa del péndulo y el valor de la aceleración de la gravedad en el lugar de la experiencia. Obtener mediante el análisis dimensional la fórmula del período del péndulo.***

Solución: En vista de los datos experimentales, la ecuación que nos da el período será de la forma:

$$T = k \cdot l^p \cdot m^q \cdot g^r$$

faltándonos por determinar los exponentes p, q y r.

Ya que el primer miembro tiene por dimensiones T y el segundo:

$$L^p \cdot M^q \cdot (LT^{-2})^r = L^{p+r} \cdot M^q \cdot T^{-2r}$$

Como la ecuación tiene que ser homogénea, resulta:

$$T = L^{p+r} \cdot M^q \cdot T^{-2r}$$

es decir:

$$\left.\begin{aligned} p + r &= 0 \\ q &= 0 \\ -2r &= 1 \end{aligned}\right\}$$

conduciendo la resolución del sistema a: $p = 1/2$; $r = -1/2$; $q = 0$.

Con ello, la fórmula del período del péndulo se puede escribir así:

$$T = k \cdot l^{1/2} \cdot g^{-1/2} = k \cdot \left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} = \boxed{k \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

El coeficiente adimensional k, como ya hemos visto en el problema 1.16, vale 2π.

Obsérvese que mediante el análisis dimensional hemos deducido que el período del péndulo no depende de la masa, como habíamos erróneamente supuesto al principio.

1.24. *(*) Comprobar, utilizando el análisis dimensional, que el período de revolución de un planeta depende de la longitud del eje mayor de su trayectoria, 2a; de la masa del Sol, M_s, y de la constante de gravitación universal, G.*

Solución: La ecuación que nos da el período de revolución de un planeta será de la forma:

$$T = k \cdot (2a)^p \cdot (M_s)^q \cdot G^r$$

siendo necesario determinar los exponentes p, q y r.

Como el primer miembro tiene por dimensiones T y el segundo:

$$L^p \cdot M^q \cdot (M^{-1}L^3T^{-2})^r = L^{p+3r} \cdot M^{q-r} \cdot T^{-2r}$$

y la ecuación tiene que ser homogénea, resulta:

$$T = L^{p+3r} \cdot M^{q-r} \cdot T^{-2r}$$

es decir:

$$\left.\begin{aligned} p + 3r &= 0 \\ q - r &= 0 \\ -2r &= 1 \end{aligned}\right\}$$

conduciendo la resolución del sistema a: p = 3/2; q = −1/2; r = −1/2.

Con ello, el período de revolución del planeta vendrá dado por:

$$T = k \cdot (2a)^{3/2} \cdot M_s^{-1/2} \cdot G^{-1/2} = k\sqrt{8} \cdot \frac{a^{3/2}}{G^{1/2} \cdot M_s^{1/2}} =$$

$$= \boxed{k' \cdot \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot M_s}}}$$

El coeficiente adimensional k' vale 2π.

Queda con esto demostrado que el período de revolución **depende** de la longitud del semieje mayor de la órbita, de la masa del Sol y de la constante de gravitación universal, G.

1.25. *Con una balanza has obtenido los siguientes valores al determinar la masa de un cuerpo: 2,350 g; 2,352 g; 2,348 g, y 2,350 g. ¿Cuál es el valor más probable o correcto?*

Solución:

$$\overline{M} = \frac{2{,}350\ g + 2{,}352\ g + 2{,}348\ g + 2{,}350\ g}{4} = \boxed{2{,}350\ g}$$

1.26. *El error absoluto no indica la precisión de una medida. ¿Qué quiere decir esto? Pon un ejemplo que lo explique.*

Solución: El error absoluto solamente indica la cuantía del error; pero no si la equivocación puede ser aceptable o no. Así, por ejemplo, equivocarse en 5 m al medir una longitud de 10 m es un error inaceptable; mientras que ese mismo error (5 m) en una medida de 100 km apenas se aprecia.

1.27. *Plantea y resuelve dos ejercicios donde tengas que calcular el error absoluto y el error relativo cometidos al efectuar una medición.*

Solución:

a) La longitud de una mesa es 112,8 cm. Al medirla hemos obtenido 113,4 cm. Hallar el error absoluto y el error relativo cometidos.

$$x_i = m_i - M = 113{,}4\ cm - 112{,}8\ cm = \boxed{0{,}6\ cm\ (por\ exceso)}$$

$$x_{r_{(\%)}} = \frac{x_i}{M} \cdot 100 = \frac{0{,}6\ cm}{112{,}8\ cm} \cdot 100 = \boxed{0{,}53\ \%}$$

b) La masa de la Tierra es $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. ¿Qué errores absoluto y relativo se cometen al tomar, en vez de dicho valor, $6 \cdot 10^{24}$ kg?

$$x_i = m_i - M = 6 \cdot 10^{24}\ kg - 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg = \boxed{0{,}02 \cdot 10^{24}\ kg}$$

$$x_{r_{(\%)}} = \frac{x_i}{M} \cdot 100 = \frac{0{,}02 \cdot 10^{24}\ kg}{5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg} \cdot 100 = \boxed{0{,}33\ \%}$$

1.28. *¿Qué error relativo se comete al dar a π el valor 3,14?*

Solución: Hallemos, en primer lugar, el error absoluto:

$$x_i = m_i - M = 3,14 - 3,14159 = -0,00159 \text{ (por defecto)}$$

El error relativo será:

$$x_{r_{i(\%)}} = \frac{x_i}{M} \cdot 100 = \frac{0,00159}{3,14159} \cdot 100 = \boxed{0,05\ \%}$$

1.29. *¿Es aceptable dar a g el valor de 10 m/s², en vez de 9,81 m/s²? Razona la contestación.*

Solución: Será aceptable si el error relativo cometido no supera el 2 %.

$$x_i = m_i - M = 10 \text{ m/s}^2 - 9,81 \text{ m/s}^2 = 0,19 \text{ m/s}^2 \text{ (por exceso)}$$

$$x_{r_{i(\%)}} = \frac{x_i}{M} \cdot 100 = \frac{0,19 \text{ m/s}^2}{9,81 \text{ m/s}^2} \cdot 100 = \boxed{1,94\ \% < 2\ \%}$$

Por tanto, **sí es aceptable.**

1.30. *Un alumno A mide la longitud de un hilo de 5 m y halla un valor de 6 m. Otro alumno B mide la longitud de un paseo de 500 m y halla un valor de 501 m. ¿Qué error absoluto se cometió en cada caso? ¿Qué medida fue más precisa?*

Solución: Ambos alumnos cometieron el **mismo error absoluto:** 1 metro por exceso, y **la medida más precisa fue la del alumno B,** ya que cometió un error relativo menor.

Alumno	Error absoluto	Error relativo
A	1 m exceso	$\frac{1}{5} \cdot 100 = 20\ \%$
B	1 m exceso	$\frac{1}{500} \cdot 100 = 0,2\ \%$

1.31. *¿Qué medida es más precisa: la de un químico que pesa 20 cg con una balanza que aprecia el miligramo o la de un tendero que pesa 2 kg de arroz con una balanza que aprecia el gramo?*

Solución: Será más precisa aquella pesada cuyo error relativo sea menor.

Para el químico: $x_{r_{i(\%)}} = \dfrac{1 \text{ mg}}{200 \text{ mg}} \cdot 100 = 0,5\ \%.$

Para el tendero: $x_{r_{i(\%)}} = \dfrac{1 \text{ g}}{2\,000 \text{ g}} \cdot 100 = 0,05\ \%.$

Por tanto, **es más precisa la medida del tendero.**

1.32. *¿Qué edad viene dada con más precisión: la de un niño de 30 meses o la de un hombre de 38 años?*

Solución:

Para el niño: $x_{r_{1(\%)}} = \dfrac{1 \text{ mes}}{30 \text{ meses}} \cdot 100 = 3{,}33\ \%.$

Para el hombre: $x_{r_{2(\%)}} = \dfrac{1 \text{ año}}{38 \text{ años}} \cdot 100 = 2{,}63\ \%.$

Por consiguiente, **la edad del hombre vendrá dada con mayor precisión.**

Solución: Como $x_{r_{i(\%)}} = \dfrac{x_i}{M} \cdot 100$, se ha de cumplir que:

$$\frac{x_i}{\pi} \cdot 100 < 0{,}1$$

de donde:

$$x_i < 0{,}00314\ldots$$

El error absoluto ha de afectar a la tercera cifra decimal. Por tanto, **debemos tomar π con tres cifras decimales.**

1.34. *¿Con cuántas cifras decimales debemos tomar $\sqrt{3}$ para que el error relativo cometido sea menor del 0,01 %?*

Solución: Análogamente al problema anterior:

$$\frac{x_i}{\sqrt{3}} \cdot 100 < 0{,}01$$

de donde:

$$x_i < \frac{\sqrt{3}}{10\,000} < 0{,}000173\ldots$$

Por consiguiente, **debemos tomar $\sqrt{3}$ con cuatro cifras decimales.**

1.35. *Expresar correctamente las siguientes mediciones:*

a) $(2{,}8 \pm 0{,}055)$ m; *b)* $(13{,}448 \pm 0{,}0361)$ g;
c) $(37 \pm 0{,}58)$ s; *d)* $(3{,}289371 \pm 0{,}0078)$ kg.

Solución:

a) (2,80 ± 0,06) m; b) (13,45 ± 0,04) g;

c) (37,0 ± 0,6) s; d) (3,289 ± 0,008) kg.

[illegible]

Mediciones	*Errores*, x_i	$\lvert x_i \rvert^2$	x_{r_i}
4,556 mm	*−0,001*	*0,000001*	*0,2 ‰*
4,559 mm	*+0,002*	*0,000004*	*0,4 ‰*
4,553 mm	*−0,004*	*0,000016*	*0,9 ‰*
4,561 mm	*+0,004*	*0,000016*	*0,9 ‰*
4,562 mm	*+0,005*	*0,000025*	*1,1 ‰*
4,555 mm	*−0,002*	*0,000004*	*0,4 ‰*
4,557 mm	*+0,000*	*0,000000*	*0,0 ‰*
4,553 mm	*−0,004*	*0,000016*	*0,9 ‰*
4,556 mm	*−0,001*	*0,000001*	*0,2 ‰*
4,558 mm	*+0,001*	*0,000001*	*0,2 ‰*
$\overline{M} = 4{,}557$ *mm*	$\Sigma\lvert x_i \rvert = 0{,}024$ $\delta = \dfrac{\Sigma\lvert x_i \rvert}{n} = 0{,}0024$	$\Sigma\lvert x_i \rvert^2 = 0{,}000084$	$\delta_r = 0{,}5$ ‰ $=$ $= \dfrac{0{,}0024}{4{,}557} \cdot 1\,000$

¿Cómo se debe expresar el resultado final de las mediciones?

Solución: El error probable de una medición aislada es:

$$x_p = \pm 0{,}6745 \sqrt{\frac{0{,}000084}{9}} = \pm 0{,}0021$$

y el error probable del resultado será: ±0,0007.

Expresaremos, por tanto, el resultado final de la forma:

(4,557 ± 0,0007) mm

Del concepto de error probable se deduce que hay un 50 % de probabilidades de que el verdadero valor del resultado final esté comprendido entre 4,5563 mm y 4,5577 m.

1.37. *Se han hecho las siguientes pesadas con una balanza:*

2,4682 g	*2,4716 g*	*2,4682 g*	*2,4700 g*
2,4690 g	*2,4690 g*	*2,4686 g*	*2,4698 g*
2,4686 g	*2,4686 g*	*2,4694 g*	*2,4680 g*
2,4702 g	*2,4694 g*	*2,4690 g*	*2,4696 g*

¿Cómo debemos expresar el resultado final de la pesada?

Solución: Tabulemos los datos anteriores:

Mediciones	Errores, x_i	$\|x_i\|^2$	x_{r_i}
2,4682 g	−0,0010	0,00000100	0,04 %
2,4716 g	+0,0024	0,00000576	0,10 %
2,4682 g	−0,0010	0,00000100	0,04 %
2,4700 g	+0,0008	0,00000064	0,03 %
2,4690 g	−0,0002	0,00000004	0,01 %
2,4690 g	−0,0002	0,00000004	0,01 %
2,4686 g	−0,0006	0,00000036	0,02 %
2,4698 g	+0,0006	0,00000036	0,02 %
2,4686 g	−0,0006	0,00000036	0,02 %
2,4686 g	−0,0006	0,00000036	0,02 %
2,4694 g	+0,0002	0,00000004	0,01 %
2,4680 g	−0,0012	0,00000144	0,05 %
2,4702 g	+0,0010	0,00000100	0,04 %
2,4694 g	+0,0002	0,00000004	0,01 %
2,4690 g	−0,0002	0,00000004	0,01 %
2,4696 g	+0,0004	0,00000016	0,02 %
$\bar{M} = 2,4692$ g	$\Sigma\|x_i\| = 0,0112$ $\delta = \frac{\Sigma\|x_i\|}{n} = 7 \cdot 10^{-4}$	$\Sigma\|x_i\|^2 = 1\,284 \cdot 10^{-8}$	$\delta_r = 0,028\ \% = \frac{7 \cdot 10^{-4}}{2,4692} \cdot 100$

El error probable del resultado será:

$$x_p = \pm 0,6745 \cdot \sqrt{\frac{1\,284 \cdot 10^{-8}}{16 \cdot 15}} \simeq 1,56 \cdot 10^{-4} \simeq 0,0002$$

Expresaremos, por tanto, el resultado final de la forma:

$$\boxed{(2,4692 \pm 0,0002)\ \text{g}}$$

1.38. *Al pesar 20 veces consecutivas un determinado objeto con una balanza de poca precisión se han obtenido los siguientes resultados en gramos: 25, 26, 24, 24, 26, 22, 27, 25, 25, 24, 25, 23, 28, 24, 23, 24, 24, 25, 27, 23.*

a) Construir la tabla de frecuencias, tanto absolutas como relativas.
b) Determinar el valor medio de las mediciones.
c) Indicar los valores correspondientes a la mediana y a la moda.
d) Construir el diagrama de barras y el histograma correspondiente.

Solución:

a)

TABLA DE FRECUENCIAS

Mediciones	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
22 g	1	0,05
23 g	3	0,15
24 g	6	0,30
25 g	5	0,25
26 g	2	0,10
27 g	2	0,10
28 g	1	0,05

b) El valor medio de las mediciones se puede obtener así:

$$\overline{M} = \frac{\Sigma m_i}{n} =$$

$$= \frac{(22g \cdot 1) + (23\,g \cdot 3) + (24\,g \cdot 6) + (25\,g \cdot 5) + (26\,g \cdot 2) + (27\,g \cdot 2) + (28\,g \cdot 1)}{20} = \boxed{24{,}7\,g}$$

c) La mediana es **25 g** y la moda **24 g**.

d) En la figura 1.1 podemos ver el diagrama de barras y en la 1.2 el correspondiente histograma.

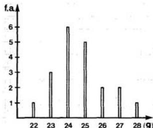


Fig. 1.1

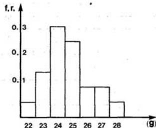


Fig. 1.2

1.39. ***(*) Sobre un cuerpo que pesa (3,75 ± 0,03) kg se aplica una fuerza de 12,6 N, valor escrito con todas sus cifras correctas. ¿Cuál es, escrito correctamente, el valor de la aceleración que adquiere?***

Solución: Si el cuerpo pesa (3,75 ± 0,03) kg, ello implica que su masa es (3,75 ± 0,03) kg. La aceleración que dicho cuerpo adquiere al actuar sobre él una fuerza de 12,6 N es:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{12{,}6 \text{ N}}{3{,}75 \text{ kg}} = 3{,}36 \text{ m/s}^2$$

Para calcular el error absoluto cometido en la determinación de la aceleración tomamos, en primer lugar, logaritmos neperianos en los dos miembros de la expresión de la aceleración, obteniendo:

$$\ln a = \ln F - \ln m$$

La diferenciación de la anterior expresión logarítmica conduce a:

$$\frac{da}{a} = \frac{dF}{F} - \frac{dm}{m}$$

Reemplazando las diferenciales por los errores absolutos, tenemos:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta m}{m} = \frac{0{,}1 \text{ N}}{12{,}6 \text{ N}} + \frac{0{,}03 \text{ kg}}{3{,}75 \text{ kg}} = 0{,}0159$$

De aquí que:

$$a = 0{,}0159 \cdot 3{,}36 \text{ m/s}^2 = 0{,}053 \text{ m/s}^2 \simeq 0{,}05 \text{ m/s}^2$$

Por tanto, la aceleración que adquiere el cuerpo, escrita correctamente, es:

$$\boxed{a = (3{,}36 \pm 0{,}05) \text{ m/s}^2}$$

1.40. ***Las dimensiones de una sala, medidas con la aproximación del centímetro, son: 5,45 m; 4,05 m; 3,25 m. Hallar el volumen de dicha sala con todas las cifras exactas.***

Solución: Llamemos a, b y c a las dimensiones de la habitación. El volumen será:

$$V = a \cdot b \cdot c = 5{,}45 \text{ m} \cdot 4{,}05 \text{ m} \cdot 3{,}25 \text{ m} = 71{,}735625 \text{ m}^3$$

Calculemos ahora el error absoluto cometido en la determinación del volumen. Tomando logaritmos neperianos en los dos miembros de la expresión $V = a \cdot b \cdot c$, tenemos:

$$\ln V = \ln a + \ln b + \ln c$$

La diferenciación de la anterior expresión logarítmica conduce a:

$$\frac{dV}{V} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} + \frac{dc}{c}$$

Reemplazando las diferenciales por los errores absolutos, tenemos:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} =$$

$$= \frac{0{,}01 \text{ m}}{5{,}45 \text{ m}} + \frac{0{,}01 \text{ m}}{4{,}05 \text{ m}} + \frac{0{,}01 \text{ m}}{3{,}25 \text{ m}} = 7{,}38 \cdot 10^{-3}$$

De ahí que:

$$V = 7{,}38 \cdot 10^{-3} \cdot 71{,}735625 \text{ m}^3 = 0{,}529 \text{ m}^3 \simeq 0{,}5 \text{ m}^3$$

Por tanto, el volumen de la sala, escrito con todas las cifras exactas, es:

$$\boxed{V = (71{,}7 \pm 0{,}5) \text{ m}^3}$$

1.41. *El valor del área de un cuadrado es 6,486 m², con todas sus cifras exactas. ¿Con cuántas cifras decimales debe darse el valor de su lado?*

Solución: En primer lugar:

$$l = \sqrt{S} = \sqrt{6{,}486 \text{ m}^2} = 2{,}5467627 \text{ m}$$

Calculemos ahora el error absoluto en la medida del lado:

$$\ln l = \frac{1}{2} \ln S$$

Por diferenciación se obtiene:

$$\frac{dl}{l} = \frac{1}{2} \frac{dS}{S}$$

Sustituyendo las diferenciales por los errores absolutos, tenemos:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} \frac{\Delta S}{S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}001 \text{ m}^2}{6{,}486 \text{ m}^2} = 7{,}7 \cdot 10^{-5}$$

De ahí que:

$$\Delta l = 7{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 2{,}5467627 \text{ m} = 1{,}96 \cdot 10^{-4} \text{ m} \simeq 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Como este error afecta a la cuarta cifra decimal, debemos expresar el valor del lado **con cuatro cifras decimales.**

1.42. *(*) Una fuerza de 8,25 N actúa durante un breve intervalo sobre un cuerpo cuyo peso es de 18,3 g y, prescindiendo de todo rozamiento, lo lanza a una velocidad inicial de 4,25 m/s. Si todos estos valores están escritos con todas sus cifras correctas, ¿cuál es en segundos, y escrito correctamente, el valor del intervalo de tiempo en que ha estado aplicada la fuerza sobre el cuerpo?*

Solución: De acuerdo con el teorema del impulso mecánico:

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$$

tenemos:

$$\Delta t = \frac{m \cdot \Delta v}{F} \qquad [1]$$

Sustituyamos, ahora, en esta expresión los datos numéricos del enunciado del problema:

$$\Delta t = \frac{18{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot (4{,}25\ \text{m/s} - 0\ \text{m/s})}{8{,}25\ \text{N}} = 9{,}427 \cdot 10^{-3}\ \text{s}$$

Para calcular el error absoluto cometido en la determinación del intervalo de tiempo, tomaremos logaritmos neperianos en la expresión [1]:

$$\ln (\Delta t) = \ln m + \ln (\Delta v) - \ln F \qquad [2]$$

Diferenciemos, ahora, los dos miembros de la expresión [2]:

$$\frac{d\,(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{dm}{m} + \frac{d\,(\Delta v)}{\Delta v} - \frac{dF}{F} \qquad [3]$$

Reemplazando las diferenciales por los errores absolutos, tenemos:

$$\frac{\Delta\,(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta\,(\Delta v)}{\Delta v} + \frac{\Delta F}{F} =$$

$$= \frac{0{,}1\ \text{g}}{18{,}3\ \text{g}} + \frac{0{,}01\ \text{m/s}}{4{,}25\ \text{m/s}} + \frac{0{,}01\ \text{N}}{8{,}25\ \text{N}} = 0{,}009$$

De aquí:

$$\Delta\,(\Delta t) = 0{,}009 \cdot 9{,}427 \cdot 10^{-3}\ \text{s} = 8{,}48 \cdot 10^{-5}\ \text{s} \simeq 8 \cdot 10^{-5}\ \text{s}$$

Por tanto, el valor del intervalo de tiempo en que ha estado aplicada la fuerza sobre el cuerpo, escrito correctamente, es:

$$\boxed{\Delta t = (9{,}43 \pm 0{,}08) \cdot 10^{-3}\ \text{s}}$$

1.43. *(*) Se tienen dos fuerzas de 5,45 y 3,26 kp, expresadas con todas sus cifras correctas, y cuyas líneas de acción forman entre sí un ángulo de 90°. ¿Cuál es el valor, con todas sus cifras correctas, que debe tener una tercera fuerza para que, con las dos anteriores, produzca equilibrio sobre el cuerpo que actúe?*

Solución: La fuerza pedida, $\vec{F}$, ha de tener el mismo módulo y la misma dirección, pero sentido contrario que la resultante de las dos fuerzas dadas. Por consiguiente, dicha fuerza valdrá (fig. 1.3):

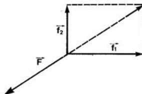


Fig. 1.3

$$F = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{(5{,}45\ \text{kp})^2 + (3{,}26\ \text{kp})^2} = 6{,}3505984\ \text{kp}$$

Para calcular el error absoluto cometido en la determinación de la fuerza tomaremos logaritmos neperianos en los dos miembros de la expresión anterior:

$$\ln F = \frac{1}{2} \ln (f_1^2 + f_2^2)$$

Diferenciemos ahora. Se obtiene:

$$\frac{dF}{F} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\,(f_1^2 + f_2^2)}{f_1^2 + f_2^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2f_1 \cdot df_1 + 2f_2 \cdot df_2}{f_1^2 + f_2^2} = \frac{f_1 \cdot df_1 + f_2 \cdot df_2}{F^2}$$

Reemplazando las diferenciales por los errores absolutos, llegamos a:

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{f_1 \cdot \Delta f_1 + f_2 \cdot \Delta f_2}{F^2}$$

De aquí:

$$\Delta F = \frac{f_1 \cdot \Delta f_1 + f_2 \cdot \Delta f_2}{F} = \frac{5{,}45\ \text{kp} \cdot 0{,}01\ \text{kp} + 3{,}26 \cdot 0{,}01\ \text{kp}}{6{,}3505984\ \text{kp}} = 0{,}0137\ \text{kp}$$

Por tanto, el valor de la fuerza, escrito con todas sus cifras correctas, es:

$$\boxed{\mathbf{F = (6{,}35 \pm 0{,}01)\ kp}}$$

1.44. *(*) ¿Cuál es el valor en newtons, escrito correctamente, de la fuerza centrífuga cuando se trata de un cuerpo que pesa 4,25 kg, que se mueve uniformemente sobre una circunferencia de 35,7 cm de radio (ambos valores expresados con todas sus cifras correctas), si la velocidad que lleva, medida varias veces, ha conducido a los valores de 33,6; 34,1; 35,2; 33,3; 34,1; 32,8 cm · s^{-1}?*

Solución: El valor medio de la velocidad es:

$$\bar{v} = \frac{(33{,}6 + 34{,}1 + 35{,}2 + 33{,}3 + 34{,}1 + 32{,}8) \text{ cm/s}}{6} = 33{,}9 \text{ cm/s}$$

y su error absoluto medio:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{(0{,}3 + 0{,}2 + 1{,}3 + 0{,}6 + 0{,}2 + 1{,}1) \text{ cm/s}}{6} = 0{,}6 \text{ cm/s}$$

Por otra parte:

$$F_c = m \cdot \frac{v^2}{r} = 4{,}25 \text{ kg} \cdot \frac{(0{,}339 \text{ m/s})^2}{0{,}357 \text{ m}} = 1{,}3681 \text{ N}$$

Tomando logaritmos neperianos en la expresión anterior y diferenciando a continuación, se obtiene:

$$\ln F_c = \ln m + 2 \ln v - \ln r; \; \frac{dF_c}{F_c} = \frac{dm}{m} + \frac{2\,dv}{v} - \frac{dr}{r}$$

Reemplazando las diferenciales por los errores absolutos, llegamos a:

$$\frac{\Delta F_c}{F_c} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta v}{v} + \frac{\Delta r}{r} = \frac{0{,}01 \text{ kg}}{4{,}25 \text{ kg}} + \frac{2 \cdot 0{,}6 \text{ cm/s}}{33{,}9 \text{ cm/s}} + \frac{0{,}1 \text{ cm}}{35{,}7 \text{ cm}} = 4{,}055 \cdot 10^{-2}$$

De aquí que:

$$F_c = 4{,}055 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}3681 \text{ N} = 0{,}05548 \text{ N} \simeq 0{,}06 \text{ N}$$

Por tanto, el valor de la fuerza, escrito correctamente, es:

$$\boxed{\mathbf{F_c = (1{,}37 \pm 0{,}06) \text{ N}}}$$

2. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO VECTORIAL

FORMULARIO-RESUMEN

Vector $\vec{A}$ $\begin{cases} \vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \\ \vec{A}\,(A_x, A_y, A_z) \end{cases}$

Módulo: $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

COSENOS DIRECTORES

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A};\ \cos\beta = \frac{A_y}{A};\ \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

PRODUCTO ESCALAR

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B\cdot\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\theta = \text{arc cos}\,\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A\cdot B}$$

PRODUCTO VECTORIAL

$$\vec{P} = \vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$P = A\cdot B\cdot\text{sen}\,\theta;\ S_{paralelogramo} = P;\ S_{triángulo} = \frac{1}{2}\,P$$

PRODUCTO MIXTO

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$ = Volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN PUNTO
$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{A}$; ($\vec{r}$ = vector de posición con respecto a dicho punto del punto de aplicación del vector $\vec{A}$).
$M = A \cdot d$; (d = distancia mínima del punto de referencia a la recta de acción de $\vec{A}$).
TEOREMA DE VARIGNON: $\vec{M}_R = \Sigma \vec{M}_{A_i}$, siendo $\vec{R} = \Sigma \vec{A}_i$
DERIVADA DE UN VECTOR RESPECTO A UN ESCALAR
Si $\vec{R} = \vec{R}(t) = R_x(t)\,\vec{i} + R_y(t)\,\vec{j} + R_z(t)\,\vec{k}$,
$\dfrac{d\vec{R}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = \dfrac{dR_x}{dt}\,\vec{i} + \dfrac{dR_y}{dt}\,\vec{j} + \dfrac{dR_z}{dt}\,\vec{k}$

2. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO VECTORIAL

2.1. *Identificar el carácter vectorial o escalar de las siguientes magnitudes físicas: masa, trabajo, velocidad, peso, potencia mecánica, flujo, intensidad de corriente, presión y aceleración.*

Solución: Son magnitudes **escalares:** masa, trabajo, potencia mecánica, flujo, intensidad de corriente y presión. **Vectoriales:** la velocidad, el peso y la aceleración.

2.2. *¿Es posible que la suma de dos vectores de módulos 5 y 7 sea otro vector de módulo 2? ¿Y de módulo 0?*

Solución: Si se trata de dos vectores de la misma dirección y de sentidos contrarios, el vector suma **tendrá por módulo 2.** En cambio, **nunca es posible** que el vector suma sea nulo.

2.3. *¿Existe algún caso en que el producto de dos vectores de módulos 10 y 25 sea nulo?*

Solución: Habrá que distinguir dos casos, según que se trate de un producto escalar o de uno vectorial.

a) El producto escalar de dos vectores **es nulo** si ambos son **perpendiculares.**

b) En cambio, el producto vectorial **será nulo** si los dos vectores son **paralelos.**

2.4. *¿Qué magnitudes físicas pueden definirse como un producto escalar? ¿Y como un producto vectorial?*

Solución: Se pueden definir mediante un producto escalar el trabajo ($W = \vec{F} \cdot \vec{s}$), el flujo eléctrico ($\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$), el flujo magnético ($\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$), etcétera, y mediante un producto vectorial el momento de una fuerza ($\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$), el momento cinético ($\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$), etc.

2.5. *¿Por qué una fuerza cuando se desplaza paralelamente a sí misma no realiza trabajo?*

Solución: Porque, al ser perpendiculares los vectores fuerza y desplazamiento, su producto escalar, que corresponde al trabajo, es nulo.

2.6. *¿Cómo se podría representar vectorialmente el movimiento del minutero de un reloj?*

Solución: Por medio de un vector axial perpendicular al plano del reloj, sentido el que determine la aplicación de la regla de Maxwell y de módulo: $\frac{\pi}{1\,800}$ rad/s (fig. 2.1).

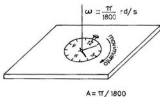


Fig. 2.1

Solución:

a) Si $\alpha = 30°$ (fig. 2.2):

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\ F_1F_2 \cos \alpha} =$$

$$= \sqrt{(9\ N)^2 + (12\ N)^2 + 2 \cdot 9\ N \cdot 12\ N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\mathbf{20{,}3\ N}}$$

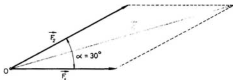


Fig. 2.2

b) Cuando $\alpha = 45°$ (fig. 2.3):

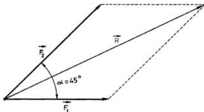


Fig. 2.3

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1F_2 \cos \alpha} =$$

$$= \sqrt{(9\ \text{N})^2 + (12\ \text{N})^2 \cdot 2 \cdot 9\ \text{N} \cdot 12\ \text{N} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \boxed{\mathbf{19{,}43\ N}}$$

c) Si $\alpha = 90°$ (fig. 2.4), resulta:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} =$$

$$= \sqrt{(9\ \text{N})^2 + (12\ \text{N})^2} = \boxed{\mathbf{15\ N}}$$

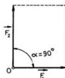


Fig. 2.4

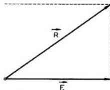


Fig. 2.5

Solución: Como $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ (fig. 2.5), resulta:

$$F_2 = \sqrt{R^2 - F_1^2} =$$

$$= \sqrt{(10\ \text{N})^2 - (8\ \text{N})^2} = \boxed{\mathbf{6\ N}}$$

2.9. *Descomponer un vector fuerza de 100 N en dos componentes rectangulares tales que sus módulos sean iguales.*

Solución: Para que las componentes rectangulares sean iguales, la fuerza de 100 N debe formar un ángulo de 45° con cada uno de los ejes (fig. 2.6). Por tanto:

$$F_x = F_y = 100\ \text{N} \cdot \text{sen}\ 45° = \boxed{\mathbf{70{,}7\ N}}$$

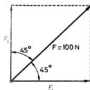


Fig. 2.6

O también:

$$\sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 100\ \text{N}$$

y como $F_x = F_y$, resolviendo el sistema, se obtiene:

$$\boxed{\mathbf{F_x = F_y = 70{,}7\ N}}$$

2.10. *Un muchacho tira de una cuerda atada a un cuerpo con una fuerza de 200 N. Si la cuerda forma un ángulo de 30° con el suelo horizontal, ¿cuál es el valor de la fuerza que tiende a elevar verticalmente el cuerpo?*

Solución: La componente vertical de la fuerza de 200 N viene dada por (fig. 2.7):

$$F_y = F \cdot \text{sen } 30° =$$

$$= 200 \text{ N} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{100 \text{ N}}$$

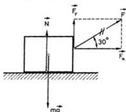


Fig. 2.7

2.11. *Un bloque de 10 kg se encuentra situado sobre un plano inclinado 30° sobre la horizontal. Calcular las componentes del peso, normal y paralela al plano.*

Solución: El peso del cuerpo viene dado por:

$$P = m \cdot g = 10 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 100 \text{ N}$$

Tras examinar el diagrama de fuerzas de la figura 2.8, se pueden calcular fácilmente las dos componentes del peso.

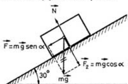


Fig. 2.8

Componente paralela al plano:

$$F_1 = mg \cdot \text{sen } \alpha = P \cdot \text{sen } \alpha = 100 \text{ N} \cdot 0{,}5 = \boxed{50 \text{ N}}$$

Componente perpendicular al plano:

$$F_2 = P \cdot \cos \alpha = 100 \text{ N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{86{,}6 \text{ N}}$$

2.12. *Dado el vector $\vec{A} = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 5\vec{k}$: a) representarlo gráficamente; b) calcular su módulo; c) calcular sus cosenos directores.*

Solución: a) Véase la figura 2.9.

b) $$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} =$$
$$= \sqrt{9 + 4 + 25} = \sqrt{38} = \boxed{6{,}164}$$

c) $$\cos \alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{3}{6{,}164} = \boxed{0{,}487}$$

$$\cos \beta = \frac{A_y}{A} = \frac{2}{6{,}164} = \boxed{0{,}324}$$

$$\cos \gamma = \frac{A_z}{A} = \frac{5}{6{,}164} = \boxed{0{,}811}$$

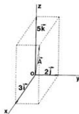


Fig. 2.9

2.13. *Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ vienen expresados por:*

$$\vec{A} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + \vec{k}\ ;\ \vec{B} = 4\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + 8\vec{k}$$

Deducir si son perpendiculares.

Solución: Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es nulo. Por tanto, calcularemos el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z =$$
$$= 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) + 1 \cdot 8 = 12 - 20 + 8 = 0$$

En consecuencia, **ambos vectores son perpendiculares.**

2.14. *Calcular los módulos y los cosenos directores de los vectores anteriores.*

Solución:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{26} = \boxed{5{,}1}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 8^2} = \sqrt{105} = \boxed{10{,}25}$$

Para el vector $\vec{A}$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{3}{\sqrt{26}} = \boxed{0{,}5883}$$
$$\cos\beta = \frac{A_y}{A} = \frac{4}{\sqrt{26}} = \boxed{0{,}7844}$$
$$\cos\gamma = \frac{A_z}{A} = \frac{1}{\sqrt{26}} = \boxed{0{,}1961}$$

Para el vector $\vec{B}$

$$\cos\alpha' = \frac{B_x}{B} = \frac{4}{\sqrt{105}} = \boxed{0{,}3904}$$
$$\cos\beta' = \frac{B_y}{B} = \frac{-5}{\sqrt{105}} = \boxed{-0{,}4879}$$
$$\cos\gamma' = \frac{B_z}{B} = \frac{8}{\sqrt{105}} = \boxed{0{,}7807}$$

2.15. *Dados los vectores $\vec{A}$ (3, −2, 0) y $\vec{B}$ (5, 1, −2), deducir: a) sus módulos, b) su producto escalar y c) el ángulo que forman.*

Solución:

a) $A = \sqrt{9 + 4} = \boxed{\sqrt{13}}$; $B = \sqrt{25 + 1 + 4} = \boxed{\sqrt{30}}$

b) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = 15 - 2 = \boxed{13}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B} = \dfrac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{30}} = 0{,}6583$; $\alpha = \text{arc}\cos 0{,}6583 = \boxed{48{,}83^\circ}$

2.16. *Deducir el valor de x para que los vectores $\vec{A}$ (5, 1, −2) y $\vec{B}$ (2, x, 6) sean perpendiculares.*

Solución: Bastará hallar el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ e igualarle a cero; puesto que si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar será nulo.

$$5 \cdot 2 + 1 \cdot x + (-2) \cdot 6 = 0$$

de donde:

$$\boxed{x = 2}$$

2.17. *Hallar un vector cuyas componentes sean proporcionales a 2, 3 y 4, respectivamente, y cuyo módulo sea $\sqrt{116}$.*

Solución: De acuerdo con los datos del enunciado, podemos escribir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{A_x}{2} = \dfrac{A_y}{3} = \dfrac{A_z}{4} \\ \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{116} \end{array}\right\}$$

La resolución de este sistema conduce a:

$$A_x = \pm 4; \; A_y = \pm 6; \; A_z = \pm 8$$

Por tanto, el vector pedido será:

$$\boxed{\vec{A} = \pm (4\,\vec{i} + 6\,\vec{j} + 8\vec{k})}$$

2.18. *Dados los vectores: $\vec{A} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{B} = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - 6\vec{k}$:*

a) Calcular el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$.
b) Calcular el producto vectorial $\vec{A} \wedge \vec{B}$.
c) Comprobar que el producto vectorial $\vec{A} \wedge \vec{B}$ es perpendicular a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Solución:

a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 4 \cdot (-6) = 6 - 6 - 24 = \boxed{-24}$

b) Resolviendo el determinante:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

se tiene:

$$\vec{P} = \vec{A} \wedge \vec{B} = 12\vec{i} + 8\vec{j} + 9\vec{k} - 12\vec{i} + 18\vec{j} + 4\vec{k} = \boxed{26\,\vec{j} + 13\vec{k}}$$

c) Habrá que comprobar que los productos escalares $\vec{P} \cdot \vec{A}$ y $\vec{P} \cdot \vec{B}$ son nulos.

$$\vec{P} \cdot \vec{A} = 0 \cdot 3 + 26 \cdot (-2) + 13 \cdot 4 = -52 + 52 = 0$$
$$\vec{P} \cdot \vec{B} = 0 \cdot 2 + 26 \cdot 3 + 13 \cdot (-6) = 78 - 78 = 0$$

2.19. ***Determinar el área del paralelogramo que definen los vectores del problema anterior.***

Solución: El área del paralelogramo coincide con el módulo del producto vectorial $\vec{A} \wedge \vec{B}$:

$$P = |\vec{A} \wedge \vec{B}| = \sqrt{26^2 + 13^2} = \sqrt{676 + 169} =$$
$$= \boxed{\textbf{29,1 unidades de superficie}}$$

2.20. ***Los vectores $\vec{A}$ (3, 1, −5) y $\vec{B}$ (2, −6, 3) forman entre sí un ángulo de 111,3°. Deducir el módulo de su producto vectorial: a) a partir de la definición; b) resolviendo el determinante.***

Solución:

a) $A = \sqrt{3^3 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$; $B = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = 7$

De acuerdo con la definición de producto vectorial:

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = A \cdot B \cdot \text{sen}\ \alpha = \sqrt{35} \cdot 7 \cdot \text{sen}\ 111{,}3° = \boxed{38{,}58}$$

b) $$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -27\vec{i} - 19\vec{j} - 20\vec{k}$$

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = \sqrt{(-27)^2 + (-19)^2 + (-20)^2} = \boxed{38{,}60}$$

2.21. ***Los vectores $\vec{A}$ (3, 2, −5), $\vec{B}$ (6, −4, 0) y $\vec{C}$ (0, 7, 4) están sometidos a esta operación:***

$$\vec{V} = 2\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

Calcular: a) el módulo de $\vec{V}$; b) el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{V}$.

Solución:

a) El vector $\vec{V}$ es:

$$\vec{V} = 2\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 2 \cdot (3, 2, -5) + (6, -4, 0) + (0, 7, 4) = (12, 7, -6)$$

y su módulo:

$$V = \sqrt{12^2 + 7^2 + (-6)^2} = \boxed{15{,}133}$$

b) $\vec{A} \cdot \vec{V} = A_x V_x + A_y V_y + A_z V_z = 3 \cdot 12 + 2 \cdot 7 + (-5) \cdot (-6) =$

$$= 36 + 14 + 30 = \boxed{80}$$

2.22. *¿Para qué valores de x el vector $\vec{A}$ $(3x^2, 2x, -(x+5))$ es perpendicular al vector $\vec{B}$ (2, 1, 4)?*

Solución: Para que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean perpendiculares su producto escalar ha de ser nulo. En consecuencia:

$$3x^2 \cdot 2 + 2x \cdot 1 - (x + 5) \cdot 4 = 0$$
$$6x^2 - 2x - 20 = 0$$

de donde:

$$\boxed{x = 2; x = -5/3}$$

2.23. *Deducir el producto escalar de los vectores $\vec{A}$ (2, 1, −3) y $\vec{B}$, el cual es suma de los vectores $\vec{C}$ (3, 1, 1) y $\vec{D}$ (−5, −3, 4).*

Solución: El vector $\vec{B}$ es:

$$\vec{B} = \vec{C} + \vec{D} = (3, 1, 1) + (-5, -3, 4) = (-2, -2, 5)$$

Hallemos ahora el producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 5 = -4 - 2 - 15 = \boxed{-21}$$

2.24. *Hallar un vector que sea perpendicular a los vectores $\vec{A} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{B} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, y tal que su módulo sea igual a 6.*

Solución: Este problema se puede resolver empleando dos métodos diferentes:

a) **Primer método:** Hallemos el vector $\vec{A} \wedge \vec{B}$, que es perpendicular a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

Para obtener un vector unitario perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dividiremos el anterior vector entre su módulo:

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{|\vec{A} \wedge \vec{B}|} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}}{3} = \frac{2}{3}\,\vec{i} - \frac{2}{3}\,\vec{j} - \frac{1}{3}\,\vec{k}$$

El vector pedido, de módulo igual a 6, será:

$$\vec{C} = 6\vec{u} = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

Otra solución será el vector opuesto:

$$-\vec{C} = -4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

Podemos agrupar las dos soluciones del problema en una sola:

$$\boxed{\pm \vec{C} = \pm (4\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - 2\vec{k})}$$

b) **Segundo método:** Por ser el vector $\vec{C}$ pedido perpendicular a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$, tendrán que ser nulos los productos escalares $\vec{A} \cdot \vec{C}$ y $\vec{B} \cdot \vec{C}$. Por tanto, si designamos por (C_x, C_y, C_z) las componentes del vector $\vec{C}$, se tendrá que cumplir que:

$$4C_x + 3C_y + 2C_z = 0 \qquad [1]$$

$$3C_x + 2C_y + 2C_z = 0 \qquad [2]$$

Por otra parte, como el módulo del vector $\vec{C}$ ha de ser igual a 6, resulta:

$$\sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} = 6 \qquad [3]$$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se obtiene:

$$C_x = \pm 4;\; C_y = \mp 4;\; C_z = \mp 2$$

Por tanto, el vector pedido es:

$$\boxed{\pm \vec{C} = \pm (4\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - 2\vec{k})}$$

2.25. *Hallar el área del paralelogramo cuyas diagonales son:* $\vec{A} = 5\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 7\vec{k}$ *y* $\vec{B} = \vec{i} + \vec{k}$.

Solución: El problema se puede resolver de dos formas ligeramente diferentes:

a) En la figura 2.10 vemos que:

$$\vec{A} = \vec{C} + \vec{D} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k} \quad [1]$$

$$\vec{B} = \vec{C} - \vec{D} = \vec{i} + \vec{k} \quad [2]$$

Sumando y restando las expresiones [1] y [2], obtenemos:

$$\vec{A} + \vec{B} = 2\vec{C} = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = 2\vec{D} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$$

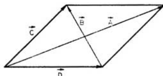


Fig. 2.10

de donde:

$$\vec{C} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} \text{ y } \vec{D} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

Para calcular el área del paralelogramo tendremos que hallar el producto vectorial de $\vec{C}$ y $\vec{D}$:

$$\vec{C} \wedge \vec{D} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

El área del paralelogramo es el módulo de dicho producto vectorial. Como:

$$|\vec{C} \wedge \vec{D}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

el área del paralelogramo es 3 unidades.

b) Calculemos en primer lugar el área del paralelogramo OPQR (fig. 2.11),

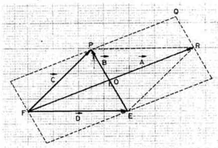


Fig. 2.11

que es igual al módulo del producto vectorial $\frac{\vec{A}}{2} \wedge \frac{\vec{B}}{2}$.

$$\frac{\vec{A}}{2} \wedge \frac{\vec{B}}{2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5/2 & 2 & 7/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \vec{k}$$

$$\left| \frac{\vec{A}}{2} \wedge \frac{\vec{B}}{2} \right| = \sqrt{1^2 + (1/2)^2 + 1^2} = \frac{3}{2} = S_{\text{paralelogramo OPQR}}$$

En la figura vemos que $S_{\text{triángulo OPR}} = \frac{3}{4}$ unidades. Por consiguiente:

$$\boxed{S_{\text{paralelogramo EFPR}} = 3 \text{ unidades}}$$

2.26. ***Comprobar que los siguientes vectores: $\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ y $\vec{C} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ forman un triángulo rectángulo.***

Solución: Primero tenemos que demostrar que los vectores citados forman un triángulo, para lo cual tendrá que cumplirse que uno de ellos sea la resultante o suma de los otros dos, o bien que la resultante de los tres sea cero.

Tras sencillos ensayos, podemos comprobar que $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$; luego los tres vectores forman triángulo.

Para que el triángulo sea rectángulo tendrá que cumplirse que los vectores representativos de los catetos sean perpendiculares, lo cual sucederá si su producto escalar es cero. Dado que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-5) = 14$$

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = 0$$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 4 = -21$$

se ve que el triángulo es rectángulo, ya que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{C}$ son perpendiculares.

Se puede llegar a esta misma conclusión considerando que:

$$|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

pudiendo comprobarse que $|\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{C}|^2$, de acuerdo con el teorema de Pitágoras. En consecuencia:

> **Los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ forman un triángulo rectángulo, en el que el vector $\vec{B}$ es la hipotenusa y $\vec{A}$ y $\vec{C}$ los catetos.**

2.27. ***Un barco navega hacia el norte con una velocidad de 12 km/h y la marea lo arrastra hacia el este con una velocidad de 9 km/h. ¿Cuál es en valor, dirección y sentido la velocidad real del barco?***

Solución: En la figura 2.12 se puede apreciar que:

$$v = \sqrt{(9\ \text{km/h})^2 + (12\ \text{km/h})^2} = \boxed{15\ \text{km/h}}$$

$$\alpha = \text{áng tg}\ \frac{12}{9} = \boxed{53{,}13°}$$

Por tanto, **la velocidad real del barco será de 15 km/h, dirigida hacia el nordeste, formando un ángulo de 53,13° a partir del este.**

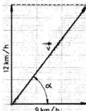


Fig. 2.12

2.28. *La velocidad de la corriente de un río es 4 km/h. Un barco es capaz de navegar a 8 km/h y quiere atravesar el río perpendicularmente a la corriente, con objeto de alcanzar un punto situado en la orilla opuesta, justo enfrente del de partida. ¿Qué ángulo debe formar con la orilla la dirección de la velocidad propia del barco?*

Solución: De acuerdo con la figura 2.13, vemos que:

$$\cos \alpha = \frac{4 \text{ km/h}}{8 \text{ km/h}} = \frac{1}{2}$$

de donde:

$$\boxed{\alpha = 60°}$$

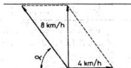
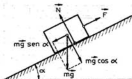


Fig. 2.13

2.29. *¿Qué fuerza paralela a un plano inclinado, de pendiente 27,8 %, se debe ejercer para conseguir que un cuerpo de 90 kg, colocado en él, no deslice?*

Solución: Para que el cuerpo no deslice (fig. 2.14) la fuerza F aplicada ha de ser igual a la componente del peso paralela al plano:



$$F = m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha =$$

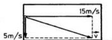
$$= 90 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}278 = \boxed{250{,}2 \text{ N}}$$

Fig. 2.14

2.30. *Un automóvil circula a una velocidad de 54 km/h y desde él se tira una piedra perpendicularmente al suelo de la carretera con una velocidad de 5 m/s. ¿Cuál es el valor de la velocidad de la piedra en el instante de salida?*

Solución: En primer lugar hemos de tener en cuenta que 54 km/h = 15 m/s.

De acuerdo con el diagrama de la figura 2.15, la velocidad de la piedra en el instante de salida será:



$$v = \sqrt{(15 \text{ m/s})^2 + (5 \text{ m/s})^2} = \boxed{15{,}8 \text{ m/s}}$$

Fig. 2.15

2.31. *Una fuerza de 400 N actúa verticalmente hacia arriba sobre un cuerpo. Otra fuerza, simultánea con la anterior, de valor 250 N, actúa sobre el mismo cuerpo formando un ángulo de 60° con la horizontal hacia arriba. ¿Cuál es el valor de la fuerza que tiende a elevar el cuerpo?*

Solución: La fuerza que tiende a elevar el cuerpo (véase fig. 2.16) es:

$$F = 400 \text{ N} + F_y = 400 \text{ N} + 250 \text{ N} \cdot \text{sen } 60° =$$

$$= 400 \text{ N} + 250 \text{ N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{616{,}5 \text{ N}}$$

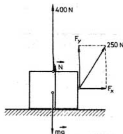


Fig. 2.16

2.32. ***Dados los vectores $\vec{A}$ (3, −1, 2) y $\vec{B}$ (1, 1, −2), calcular: a) su producto escalar; b) el ángulo que forman sus direcciones.***

Solución:

a)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -2$$

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = -2}$$

b) Como:

$$A = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}, \text{ y } B = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

por aplicación de la definición de producto escalar, resulta:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B} = \frac{-2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = -0{,}2182$$

de donde: $\boxed{\alpha = 102° \, 36'}$

2.33. ***Hallar el volumen del paralelepípedo de la figura 2.17, sabiendo que los vértices explicitados son: A (2, 3, 0), B (4, 2, 3), C (7, −1, 4) y D (1, 1, 1), coordenadas todas ellas expresadas en unidades del Sistema Internacional.***

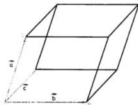


Fig. 2.17

Solución: Las tres aristas del paralelepípedo que concurren en el vértice D vienen dadas por los vectores:

$\vec{a} = \overrightarrow{DA} = \vec{A} - \vec{D} = (2-1)\,\vec{i} + (3-1)\,\vec{j} + (0-1)\,\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{b} = \overrightarrow{DB} = \vec{B} - \vec{D} = (4-1)\,\vec{i} + (2-1)\,\vec{j} + (3-1)\,\vec{k} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{c} = \overrightarrow{DC} = \vec{C} - \vec{D} = (7-1)\,\vec{i} + (-1-1)\,\vec{j} + (4-1)\,\vec{k} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es igual al producto mixto de dichos tres vectores:

$$V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{25\ m^3}$$

2.34. ***Los vectores $\vec{A}$ (−3, 2, 1), $\vec{B}$ (2, −4, 0) y $\vec{C}$ (4, −1, 8) son concurrentes en el punto (3, 1, 2).***

Calcular el momento de cada vector respecto al origen de coordenadas, el momento del vector resultante respecto al origen de coordenadas y comprobar que se cumple el teorema de Varignon.

Solución:

$$\vec{M}_A = \vec{r} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-3\vec{i} - 9\vec{j} + 9\vec{k} = (-3, -9, 9)}$$

$$\vec{M}_B = \vec{r} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{8\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 14\vec{k} = (8, 4, -14)}$$

$$\vec{M}_C = \vec{r} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \boxed{10\,\vec{i} - 16\,\vec{j} - 7\vec{k} = (10, -16, -7)}$$

El vector resultante de $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ es:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (3, -3, 9)$$

y su momento respecto al origen de coordenadas valdrá:

$$\vec{M}_R = \vec{r} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{15\,\vec{i} - 21\,\vec{j} - 12\vec{k} = (15, -21, -12)}$$

Se puede comprobar fácilmente cómo: $\vec{M}_R = \vec{M}_A + \vec{M}_B + \vec{M}_C$, de acuerdo con el teorema de Varignon: **«el momento respecto a un punto del vector resultante de un sistema de vectores concurrentes es igual a la suma de los momentos de cada vector componente del sistema respecto a dicho punto».**

2.35. ***El vector $\vec{B}$ (1, −2, 3) está aplicado en el punto P (2, 1, 2). Calcular su momento respecto al origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá su módulo?***

Solución: El momento del vector $\vec{B}$ respecto al origen de coordenadas es:

$$\vec{M}_B = \vec{r} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{7\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - 5\vec{k} = (7, -4, -5)}$$

y su módulo:

$$M = \sqrt{7^2 + (-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{90} = \boxed{9{,}49}$$

2.36. ***La fuerza $\vec{F} = 2\,\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ (SI) está aplicada en el punto $\vec{r} = \vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}$ (SI). Calcular:***

a) el momento de dicha fuerza respecto al origen de coordenadas, O;
b) el momento respecto al punto O′ (−2, −2, 1).

Solución:

a) $$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{5\,\vec{i} - 5\vec{k}\ \text{(SI)}}$$

El módulo del momento es:

$$M_o = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \boxed{5\,\sqrt{2}\ \text{N} \cdot \text{m}}$$

b) Esta segunda parte del problema se puede resolver de dos formas:

b_1) $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}$, y como $\overrightarrow{O'O} = \vec{O} - \vec{O}' = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, resulta:

$$\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}\ \text{(SI)}$$

Por consiguiente:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F} = 5\vec{i} - 5\vec{k} + 3\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k} =$$

$$= \boxed{8\,\vec{i} - 6\,\vec{j} - 11\vec{k}\ \text{(SI)}}$$

b_2) Ya que (véase fig. 2.18):

$$\vec{r}' = \vec{r} - \overrightarrow{OO'} = \vec{r} + \overrightarrow{O'O} =$$
$$= \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} + 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} =$$
$$= 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

resulta:

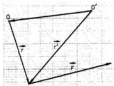


Fig. 2.18

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}' \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{8\,\vec{i} - 6\,\vec{j} - 11\vec{k}\ \text{(SI)}}$$

El módulo del momento es:

$$M_{O'} = \sqrt{8^2 + (-6)^2 + (-11)^2} = \boxed{\sqrt{221}\ \text{N} \cdot \text{m}}$$

2.37. ***Dado el vector $\vec{A} = P \cos \omega t \cdot \vec{i} + P \operatorname{sen} \omega t \cdot \vec{j}$, donde P y ω son constantes y t una variable escalar independiente, calcular: a) el módulo de $\vec{A}$; b) comprobar que es constante; c) la derivada de $\vec{A}$ respecto a la variable t; d) el módulo del vector derivada; e) comprobar que el vector $\vec{A}$ y su derivada son perpendiculares.***

Solución:

a) $A = \sqrt{P^2 \cos^2 \omega t + P^2 \operatorname{sen}^2 \omega t} = \sqrt{P^2 (\cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t)} = \boxed{P}$

b) Contestada en la respuesta anterior (P es constante).

c) $$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = -P\, \omega \operatorname{sen} \omega t\, \vec{i} + P\, \omega \cos \omega t\, \vec{j}}$$

d) $$\left| \frac{d\vec{A}}{dt} \right| = \sqrt{P^2\, \omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + P^2\, \omega^2 \cos^2 \omega t} = \boxed{P \cdot \omega}$$

e) Serán perpendiculares si el producto escalar es nulo:

$$\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = (P \cos \omega t) \cdot (-P\, \omega \operatorname{sen} \omega t) + (P \operatorname{sen} \omega t) \cdot (P\, \omega \cos \omega t) =$$

$$= -P^2\, \omega \operatorname{sen} \omega t \cdot \cos \omega t + P^2\, \omega \operatorname{sen} \omega t \cdot \cos \omega t = 0$$

Luego $\vec{A}$ y $\frac{d\vec{A}}{dt}$ **son perpendiculares.**

2.38. ***Dado el vector $\vec{A}$ $[2t^3, 1{,}5 \sqrt{3}\, t^2, 0{,}5\, (t^4 - t^2)]$, calcular el módulo de su derivada segunda cuando $t = 1$.***

Solución:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 6t^2\vec{i} + 3\sqrt{3}\, t\vec{j} + (2t^3 - t)\, \vec{k}$$

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = 12t\vec{i} + 3\sqrt{3}\, \vec{j} + (6t - 1)\, \vec{k}$$

Para t = 1, $\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = 12\vec{i} + 3\sqrt{3}\, \vec{j} + 5\vec{k}$

El módulo de $\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$ cuando t = 1 valdrá:

$$\left| \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} \right|_{t=1} = \sqrt{12^2 + (3\sqrt{3})^2 + 5^2} = \boxed{14}$$

2.39. ***La aceleración es la derivada segunda del espacio respecto al tiempo. Si la ecuación de un determinado movimiento es:***

$$s = A \text{ sen } \omega t$$

donde A y ω son constantes, deducir la ecuación de la aceleración.

Solución:

$$v = \frac{ds}{dt} = A\,\omega \cos \omega t$$

$$\boxed{\mathbf{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = -A\,\omega^2 \text{ sen } \omega t}}$$

2.40. ***Sabiendo que*** $\vec{A} = 2t\,\vec{i} - t^2\,\vec{j} + (2t-1)\,\vec{k}$ ***y*** $\vec{B} = t^2\,\vec{i} - (2t+5)\,\vec{j}$, ***calcular cuando*** $t = 1$:

a) $\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B})$;

b) $\frac{d}{dt}(\vec{A} \wedge \vec{B})$;

c) $\frac{d}{dt}(\vec{A} + \vec{B})$;

Solución:

a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 2t \cdot t^2 + (-t^2) \cdot (-2t-5) = 2t^3 + 2t^3 + 5t^2 = 4t^3 + 5t^2$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d}{dt}(4t^3 + 5t^2) = 12t^2 + 10t; \quad \boxed{\left| \frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \right|_{t=1} = 22}$$

b)

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & -t^2 & 2t-1 \\ t^2 & -(2t+5) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (4t^2 + 8t - 5)\,\vec{i} + (2t^3 - t^2)\,\vec{j} + (t^4 - 4t^2 - 10t)\,\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (8t + 8)\,\vec{i} + (6t^2 - 2t)\,\vec{j} + (4t^3 - 8t - 10)\,\vec{k}$$

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}(\vec{A}\wedge\vec{B})\right|_{t=1} = 16\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 14\vec{k}}$$

De otra manera:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\wedge\vec{B} + \vec{A}\wedge\frac{d\vec{B}}{dt} = (2\vec{i} - 2t\vec{j} + 2\vec{k})\wedge$$

$$\wedge[t^2\vec{i} - (2t+5)\,\vec{j}] + [2t\vec{i} - t^2\vec{j} + (2t-1)\,\vec{k}]\wedge(2t\vec{i} - 2\vec{j}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2t & 2 \\ t^2 & -(2t+5) & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & -t^2 & 2t-1 \\ 2t & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (4t+10)\,\vec{i} + 2t^2\vec{j} + (2t^3 - 4t - 10)\,\vec{k} + (4t-2)\,\vec{i} + (4t^2 -$$

$$- 2t)\,\vec{j} + (2t^3 - 4t)\,\vec{k} = (8t+8)\,\vec{i} + (6t^2 - 2t)\,\vec{j} + (4t^3 - 8t - 10)\,\vec{k}$$

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}(\vec{A}\wedge\vec{B})\right|_{t=1} = 16\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 14\vec{k}}$$

c) Ya que:

$$\vec{A} + \vec{B} = (t^2 + 2t)\,\vec{i} - (t^2 + 2t + 5)\,\vec{j} + (2t-1)\,\vec{k}$$

resulta:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} + \vec{B}) = (2t+2)\,\vec{i} - (2t+2)\,\vec{j} + 2\vec{k}$$

y cuando $t = 1$:

$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}(\vec{A} + \vec{B})\right|_{t=1} = 4\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 2\vec{k}}$$

3. CINEMÁTICA DEL PUNTO

FORMULARIO-RESUMEN		
Celeridad media (velocidad media escalar): $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$		m/s
Celeridad instantánea (velocidad instantánea escalar): $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$		
Velocidad media vectorial: $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$		
Velocidad instantánea vectorial: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	módulo: $\frac{ds}{dt}$ dirección: tangente a la trayectoria sentido: el del movimiento	
Aceleración media: $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$	**Aceleración instantánea:** $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	m/s^2

COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN	
Aceleración tangencial: $a_t = \frac{dv}{dt}$	$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$
Aceleración normal: $a_n = \frac{v^2}{r}$	$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (v = cte)

$$s = s_o + v \cdot t$$

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (a_t = cte; a_n = 0)

$$v = v_o + at \qquad s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2 \qquad v^2 - v_o^2 = 2a(s - s_o)$$

MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE DE GRAVES

$$v = v_o \pm gt \qquad h = h_o + v_o t \pm \frac{1}{2} gt^2 \qquad v^2 - v_o^2 = 2g(h - h_o)$$

MAGNITUDES ANGULARES

Ángulo: φ

Velocidad angular: $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

Aceleración angular: $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

$$s = \varphi \cdot r \qquad v = \omega \cdot r \qquad a = \alpha \cdot r$$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (a_t = 0; a_n = cte)

$$\varphi = \varphi_o + \omega t \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r \qquad \nu = \frac{1}{T} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu$$

T = período; ν = frecuencia

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO (a_t = cte; a_n = cte)

$$\omega = \omega_o + \alpha t \qquad \varphi = \varphi_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \qquad \omega^2 - \omega_o^2 = 2\alpha(\varphi - \varphi_o)$$

MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO

$$s = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_o)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_o)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_o) = -\omega^2 \cdot s$$

s = elongación
A = amplitud
ω = pulsación
$\omega t + \varphi_o$ = fase
φ_o = fase inicial

3. CINEMÁTICA DEL PUNTO

3.1. ***Desde un punto de vista conceptual ¿es lo mismo decir trayectoria recorrida que desplazamiento efectuado? ¿Y desde un punto de vista práctico? ¿Puede darse algún caso en que el desplazamiento coincida con la trayectoria?***

Solución:

Trayectoria es la línea originada por los extremos de los distintos vectores posición del punto en cada instante. Físicamente representa la línea descrita por un punto móvil en su movimiento.

Desplazamiento —o, mejor aún, vector desplazamiento— es la diferencia entre dos vectores posición (fig. 3.1).

Por consiguiente, la trayectoria y el desplazamiento son magnitudes diferentes, ya que la primera es una magnitud escalar y el segundo vectorial.

Nunca pueden coincidir el desplazamiento y la trayectoria. Sin embargo, en el caso de un movimiento rectilíneo y sin retroceso, o si se supone un desplazamiento infinitesimal, la longitud de la trayectoria recorrida por el móvil coincide con el módulo del vector desplazamiento.

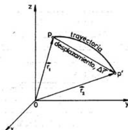


Fig. 3.1

3.2. ***¿Existe algún movimiento en que permaneciendo constante el valor de la velocidad tenga, sin embargo, aceleración?***

Solución: Sí; el movimiento circular uniforme.

En este movimiento no se modifica el valor de la velocidad ($a_t = 0$); pero sí se modifica su dirección y sentido ($a_n \neq 0$).

3.3. ***¿Qué clase de movimiento posee un cuerpo que presenta aceleración constante en módulo y perpendicular a la trayectoria del móvil?***

Solución: Se trata de un movimiento circular uniforme. En este movimiento la aceleración radial es constante, puesto que no varía el módulo de la velocidad. La dirección de la aceleración radial es perpendicular a la dirección de la velocidad.

3.4. *¿Qué diferencias conceptuales hay entre celeridad y velocidad?*

Solución: La celeridad es una magnitud escalar, definida por la relación: longitud recorrida/tiempo empleado. Físicamente representa la rapidez del movimiento.

La velocidad es una magnitud vectorial, definida por un módulo (el valor de la celeridad), una dirección (la de la tangente a la trayectoria) y un sentido (el del movimiento).

3.5. *¿Es la aceleración una magnitud vectorial?*

Solución: La aceleración viene definida por la relación: variación de velocidad/tiempo invertido.

Como la velocidad es una magnitud vectorial y el tiempo es una magnitud escalar, el cociente de un vector entre un escalar es siempre un vector.

3.6. ***Un ciclista va por una región donde existen subidas y bajadas, ambas de igual longitud. En las subidas marcha a 5 km/h y en las bajadas a 20 km/h. Calcular su celeridad media en km/h.***

Solución: Vamos a llamar l a la longitud de una subida o de una bajada. El camino total recorrido por el ciclista será, entre una subida y una bajada, igual a 2l, y el tiempo total empleado será la suma del que invierte en subir más el que invierte en bajar.

Por tanto:

$$\text{Tiempo de subida} = \frac{s}{v} = \frac{l}{5} \text{ horas}$$

$$\text{Tiempo de bajada} = \frac{s}{v'} = \frac{l}{20} \text{ horas}$$

$$\text{Tiempo total invertido: } \frac{l}{5} + \frac{l}{20} = \frac{l}{4} \text{ horas}$$

En consecuencia, la celeridad media vendrá dada por:

$$v_m = \frac{2l \text{ km}}{l/4 \text{ horas}} = \boxed{\mathbf{8\ km/h}}$$

3.7. ***La ecuación de un determinado movimiento es:***

$$s = 4t^2 + 2t + 8 \ (SI)$$

¿Cuál es su celeridad al cabo de 2 segundos? ¿Y su aceleración?

Solución: La celeridad es la derivada del espacio respecto al tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt} = 8t + 2 \text{ (SI)}$$

Al cabo de 2 segundos:

$$v_{t=2s} = 8 \cdot 2 + 2 = \boxed{18\ m/s}$$

La aceleración es la derivada de la celeridad respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = 8\ (SI)$$

Al cabo de 2 segundos:

$$a_{t=2s} = \boxed{8\ m/s^2}$$

3.8. *¿Cuál es la velocidad, en rad/s, de una rueda que gira a razón de 300 r.p.m.?*

Solución:

$$\omega = 300\ \frac{rev}{min} \cdot \frac{2\pi\ rad}{1\ rev} \cdot \frac{1\ min}{60\ s} = \boxed{31{,}4\ rad/s}$$

3.9. *Siendo 30 cm el radio de las ruedas de un coche y 956 las revoluciones que dan por minuto, calcúlese: a) la velocidad angular de las mismas; b) la velocidad del coche en m/s y en km/h; c) la aceleración radial de un punto situado en la periferia de dichas ruedas.*

Solución:

a) $\omega = 956\ \frac{rev}{min} \cdot \frac{1\ min}{60\ s} \cdot \frac{2\pi\ rad}{1\ rev} = \boxed{100\ rad/s}$

b) $v = \omega \cdot r = 100\ \frac{rad}{s} \cdot 0{,}3\ m = \boxed{30\ m/s}$

$v = 30\ \frac{m}{s} \cdot \frac{1\ km}{1\ 000\ m} \cdot \frac{3\ 600\ s}{1\ h} = \boxed{108\ km/h}$

c) $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(30\ m/s)^2}{0{,}3\ m} = \boxed{3 \cdot 10^3\ m/s^2}$

3.10. *La ecuación de un determinado movimiento viene dada por la expresión:*

$$s = 10 + 5t + t^3\ (SI)$$

Calcúlese: la distancia al origen, la velocidad y la aceleración al cabo de 5 segundos de iniciado el movimiento.

Solución: La distancia al origen se calcula sustituyendo directamente el tiempo por su valor:

$$s_5 = 10 + 5 \cdot 5 + 5^3 = \boxed{160\ m}$$

Para calcular la velocidad es preciso determinar previamente su ecuación, y después sustituir en ella t por su valor correspondiente:

$$v = \frac{ds}{dt} = 5 + 3t^2$$

$$v_{t=5s} = 5 + 3 \cdot 5^2 = \boxed{80 \text{ m/s}}$$

Procediendo de forma similar, se calcula la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t$$

$$a_{t=5s} = 6 \cdot 5 = \boxed{30 \text{ m/s}^2}$$

3.11. ***Justifíquese que si en un determinado movimiento las dos componentes del vector aceleración son nulas, el movimiento ha de ser rectilíneo y uniforme.***

Solución: Si la aceleración tangencial es nula, quiere decir que no hay modificación en el valor del módulo del vector velocidad (celeridad). Por tanto, el movimiento debe ser uniforme.

Si la aceleración radial es nula, quiere decir que no se modifican ni la dirección ni el sentido de la velocidad. Por tanto, la trayectoria debe ser rectilínea.

3.12. ***Un tren eléctrico de juguete da vueltas en una pista circular de 2 m de radio, con una velocidad constante de 4 m/s. ¿Tiene aceleración? ¿Cuánto vale?***

Solución: Existe aceleración, puesto que hay un cambio en la dirección del vector velocidad. Esta aceleración es la radial, normal o centrípeta. Su valor viene dado por:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(4 \text{ m/s})^2}{2 \text{ m}} = \boxed{8 \text{ m/s}^2}$$

3.13. ***Un automotor parte del reposo en una vía circular de 400 m de radio y va moviéndose con movimiento uniformemente acelerado hasta que a los 50 segundos de iniciada su marcha alcanza la velocidad de 72 km/h, desde cuyo momento conserva tal velocidad. Calcular: a) la aceleración tangencial en la primera etapa de su movimiento; b) la aceleración radial en el momento de conseguir los 72 km/h; c) la aceleración total en ese instante.***

Solución: Previamente transformaremos la velocidad en m/s:

$$72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\,000}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$$

a) $a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}}{50 \text{ s}} = \boxed{0{,}4 \text{ m/s}^2}$

b) $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(20 \text{ m/s})^2}{400 \text{ m}} = \boxed{1 \text{ m/s}^2}$

c) $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(0{,}4 \text{ m/s}^2)^2 + (1 \text{ m/s}^2)^2} = \boxed{1{,}08 \text{ m/s}^2}$

3.14. *La distancia alcanzada por un proyectil disparado verticalmente hacia arriba viene dada por la expresión:*

$$s = 800t - 5t^2$$

Deducir: a) las fórmulas de su velocidad y de su aceleración; b) el tiempo para el cual se anula la velocidad (s, medido en m; t, medido en s).

Solución:

a) $$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = 800 - 10t} \; ; \; \boxed{a = \frac{dv}{dt} = -10 \text{ m/s}^2}$$

b) $$800 - 10t = 0; \text{ de donde: } t = \frac{800}{10} = \boxed{80 \text{ s}}$$

3.15. *Una rueda de 15 cm de diámetro gira a razón de 300 r.p.m. y en 15 segundos, mediante la acción de un freno, logra detenerse. Calcúlese su aceleración angular y la aceleración lineal de un punto de su periferia.*

Solución: Expresaremos, en primer lugar, todos los datos en unidades del Sistema Internacional:

$$\omega = 300 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$r = 7{,}5 \text{ cm} = 0{,}075 \text{ m}$$

Apliquemos ahora la expresión correspondiente al movimiento circular uniformemente variado: $\omega = \omega_0 + \alpha t$. De ella se deduce:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 10\pi \text{ rad/s}}{15 \text{ s}} = \boxed{-2{,}1 \text{ rad/s}^2}$$

Ya que toda magnitud lineal es igual a su correspondiente magnitud angular multiplicada por el radio, la aceleración lineal de un punto de la periferia de la rueda valdrá:

$$a = \alpha \cdot r = -2{,}1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}075 \text{ m} = \boxed{-0{,}157 \text{ m/s}^2}$$

3.16. *La ecuación de un determinado movimiento es:*

$$s = 6t^3 + 8t^2 + 2t - 5 \text{ (SI)}$$

Calcúlese el espacio recorrido, la velocidad y la aceleración al cabo de 3 segundos de iniciado el movimiento. ¿Qué espacio recorrió el móvil durante el tercer segundo?

Solución: El espacio recorrido al cabo de 3 segundos de iniciado el movimiento será la diferencia entre las posiciones del móvil en los instantes $t = 0$ y $t = 3$:

$$\Delta s = s_3 - s_o = 6 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 -$$

$$- (6 \cdot 0^3 + 8 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 5) = \boxed{240 \text{ m}}$$

Este razonamiento es correcto siempre que en dicho intervalo no tenga lugar una inversión en el sentido del movimiento, fácilmente constatable porque, en caso de suceder así, en uno o más puntos del intervalo la velocidad del móvil se anulará.

La ecuación de la velocidad se calcula derivando respecto al tiempo la ecuación del movimiento:

$$v = \frac{ds}{dt} = 18t^2 + 16t + 2 \text{ (SI)}$$

Para t = 3 s:

$$v_3 = 18 \cdot 3^2 + 16 \cdot 3 + 2 = \boxed{212 \text{ m/s}}$$

Por último, la aceleración será:

$$a = \frac{dv}{dt} = 36t + 16 \text{ (SI)}$$

y al cabo de 3 segundos:

$$a_3 = 36 \cdot 3 + 16 = \boxed{124 \text{ m/s}^2}$$

El espacio recorrido por el móvil durante el tercer segundo es igual a la diferencia entre sus posiciones en los instantes t = 3 s y t = 2 s.

Al cabo de 3 s:

$$s_3 = 6 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 = 235 \text{ m}$$

Al cabo de 2 s:

$$s_2 = 6 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 5 = 79 \text{ m}$$

Por tanto:

$$\Delta s = s_3 - s_2 = 235 \text{ m} - 79 \text{ m} = \boxed{156 \text{ m}}$$

3.17. ***La posición de una partícula material, que se desplaza sobre el eje OX, viene dada, en función del tiempo, por la ecuación:***

$$x = t^2 - 6t + 5 \text{ (SI)}$$

Hallar el espacio recorrido por dicha partícula en los cinco primeros segundos de su movimiento.

Solución: La velocidad de la partícula viene dada por la expresión:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t - 6 \text{ (SI)}$$

que pone de manifiesto que dicha velocidad se anula (2t − 6 = 0) cuando t = 3 s. Por tanto, en ese instante tiene lugar un cambio en el sentido del movimiento de la partícula: durante los tres primeros segundos se desplaza en sentido negativo del eje OX, y luego en sentido positivo.

En consecuencia, tendremos que descomponer el movimiento en dos etapas: la primera, de t = 0 a t = 3, tiempo durante el cual la partícula recorre un espacio

$$s_1 = x_3 - x_0 = -4\ \text{m} - 5\ \text{m} = -9\ \text{m} = 9\ \text{m}$$

en sentido negativo del eje OX. El espacio recorrido por la partícula en la segunda etapa será:

$$s_2 = x_5 - x_3 = 0\ \text{m} - (-4\ \text{m}) = 4\ \text{m}$$

Por tanto, el espacio recorrido en los cinco primeros segundos es:

$$s = 9\ \text{m} + 4\ \text{m} = \boxed{13\ \text{m}}$$

3.18. ***Las trayectorias de dos móviles tienen por ecuaciones:***

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= 4t^2 + 3t - 2 \\ s_2 &= 2t^2 + 2t + 3 \end{aligned}\right\} \ (SI)$$

¿Qué relación existe entre los espacios recorridos por ambos y entre sus velocidades al cabo de 5 segundos?

Solución: Los espacios recorridos por ambos móviles al cabo de 5 segundos serán la diferencia entre sus posiciones en los instantes t = 0 y t = 5. Procediendo de esta forma, resulta:

Para el primer móvil: $s_1 = 115$ m.

Para el segundo móvil: $s_2 = 60$ m.

Por consiguiente:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{115\ \text{m}}{60\ \text{m}} = \boxed{1{,}917}$$

Las ecuaciones de la velocidad de los dos móviles son:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{ds_1}{dt} = 8t + 3 \\ v_2 &= \frac{ds_2}{dt} = 4t + 2 \end{aligned}\right\} \ (\text{SI})$$

Al cabo de 5 s:

$$v_1 = 8 \cdot 5 + 3 = 43\ \text{m/s}$$
$$v_2 = 4 \cdot 5 + 2 = 22\ \text{m/s}$$

Por tanto:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{43 \text{ m/s}}{22 \text{ m/s}} = \boxed{1{,}955}$$

3.19. ***Sean las ecuaciones de un movimiento:***

$$x = A \cdot sen\ \omega t$$
$$y = A \cdot cos\ \omega t$$

Deducir la ecuación de la trayectoria, las componentes cartesianas de la velocidad y la ecuación de la celeridad.

Solución:

a) Para hallar la ecuación de la trayectoria deberá eliminarse t en las dos ecuaciones:

$$\text{sen}\ \omega t = \frac{x}{A};\ \text{sen}^2\ \omega t = \frac{x^2}{A^2}$$

$$\cos^2 \omega t = 1 - \text{sen}^2\ \omega t = 1 - \frac{x^2}{A^2}$$

Elevando al cuadrado $y = A \cdot \cos \omega t$ y sustituyendo $\cos^2 \omega t$ por su valor, se tiene:

$$y^2 = A^2 \left[1 - \frac{x^2}{A^2}\right]$$

o, lo que es lo mismo:

$$\boxed{x^2 + y^2 = A^2}$$

que corresponde a la ecuación de una circunferencia.

b) Las componentes de la velocidad vienen dadas por:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -A\omega\ \text{sen}\ \omega t \end{aligned}}$$

c) El valor de v se calcula mediante:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{A^2\omega^2 \cos^2 \omega t + A^2\omega^2 \text{sen}^2\ \omega t} = A \cdot \omega$$

$$\boxed{v = A \cdot \omega}$$

3.20. ***La ecuación de un determinado movimiento es:***

$$s = 10t^2 + 5t - 4 \ (SI)$$

Calcúlese el espacio recorrido por el móvil y su velocidad al cabo de 4 segundos de iniciado el movimiento. ¿Qué espacio recorrió durante el cuarto segundo?

Solución: El espacio recorrido por el móvil al cabo de 4 segundos será igual a la diferencia entre las posiciones del móvil en los instantes t = 0 y t = 4, ya que en dicho intervalo no tiene lugar variación alguna en el sentido del movimiento.

Para t = 0: $s_o = 10 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 4 = -4$ m.

Para t = 4: $s_4 = 10 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 - 4 = 176$ m.

Por tanto: $\Delta s = s_4 - s_o = 176 \text{ m} - (-4 \text{ m}) = \boxed{\mathbf{180 \ m}}$

La ecuación de la velocidad será:

$$v = \frac{ds}{dt} = 20\,t + 5 \ (SI)$$

Al cabo de 4 segundos:

$$v_4 = 20 \cdot 4 + 5 = \boxed{\mathbf{85 \ m/s}}$$

El espacio recorrido por el móvil durante el cuarto segundo se obtiene restando sus posiciones al cabo de 4 s y 3 s:

Para t = 4 s: $s_4 = 10 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 - 4 = 176$ m.

Para t = 3 s: $s_3 = 10 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 4 = 101$ m.

Por tanto: $\Delta s = s_4 - s_3 = 176 \text{ m} - 101 \text{ m} = \boxed{\mathbf{75 \ m}}$

3.21. ***¿En qué instante tendrán la misma velocidad dos móviles cuyas respectivas ecuaciones de movimiento son:***

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 3t^2 + 5t + 6 \\ s_2 = 6t + 8 \end{array}\right\} (SI)$$

Solución: Las ecuaciones de la velocidad correspondientes a estos movimientos son:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \dfrac{ds_1}{dt} = 6t + 5 \\ v_2 = \dfrac{ds_2}{dt} = 6 \end{array}\right\} (SI)$$

Igualando ambas expresiones, se obtiene:

$$6t + 5 = 6, \text{ de donde: } \boxed{t = \frac{1}{6} \ s}$$

3.22. *(*) El vector de posición de un punto en función del tiempo está dado por:*

$$\vec{r} = t\,\vec{i} + (t^2 + 2)\,\vec{j} + t^2\vec{k} \text{ (SI)}$$

Hallar:

a) Su posición, su velocidad y su aceleración en el instante t = 2.
b) El ángulo que forman el vector velocidad y el vector aceleración en ese instante.

Solución:

a) Hallemos, en primer lugar, las expresiones correspondientes a la velocidad y a la aceleración:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 2t\vec{j} + 2t\vec{k} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{j} + 2\vec{k} \end{aligned}\right\} \text{(SI)}$$

En el instante t = 2 s:

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_2 &= 2\vec{i} + (2^2 + 2)\,\vec{j} + 2^2\vec{k} = \boxed{2\,\vec{i} + 6\,\vec{j} + 4\vec{k}} \\ \vec{v}_2 &= \vec{i} + 2 \cdot 2\vec{j} + 2 \cdot 2\vec{k} = \boxed{\vec{i} + 4\,\vec{j} + 4\vec{k}} \\ &\boxed{\vec{a}_2 = 2\,\vec{j} + 2\vec{k}} \end{aligned}\right\} \text{(SI)}$$

b) Los módulos de los vectores velocidad y aceleración al cabo de 2 segundos son:

$$v_2 = \sqrt{1^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{33} \text{ m/s}$$

$$a_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

Por consiguiente, el ángulo que forman los vectores $\vec{v}$ y $\vec{a}$ en el instante t = 2 s es:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{a}_2}{v_2 \cdot a_2} = \frac{8 + 8}{\sqrt{33} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{16}{2\sqrt{66}} = \frac{8}{\sqrt{66}} = 0{,}9847$$

de donde:

$$\boxed{\alpha = 10°}$$

3.23. ***La posición de una partícula, en función del tiempo, viene dada por las siguientes ecuaciones paramétricas:***

$$\left.\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= 3t \\ z &= 5 \end{aligned}\right\} \quad (SI)$$

Hallar la velocidad y la aceleración de la partícula, así como el radio de curvatura de la trayectoria, al cabo de 2 segundos de iniciarse el movimiento.

Solución: Dado que el vector posición de la partícula es:

$$\vec{r} = t^2\vec{i} + 3t\vec{j} + 5\vec{k} \text{ (SI)}$$

el vector velocidad será:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\vec{i} + 3\vec{j} \text{ (SI)}$$

y su módulo:

$$v = \sqrt{(2t)^2 + 3^2} = \sqrt{4t^2 + 9} \text{ (m/s)}$$

Al cabo de 2 segundos:

$$\boxed{\mathbf{v_{2s} = 5\ m \cdot s^{-1}}}$$

El vector aceleración es:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{i} \text{ (SI)}$$

siendo su módulo:

$$a = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Como vemos, la aceleración es constante a lo largo del tiempo, tanto en módulo como en dirección y sentido. Por tanto, al cabo de 2 segundos:

$$\boxed{\mathbf{a_{2s} = 2\ m \cdot s^{-2}}}$$

Calculemos, ahora, la aceleración tangencial:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{4t^2 + 9}} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$$

Al cabo de 2 segundos:

$$a_{t_{2s}} = 1{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Por tanto, la aceleración normal de la partícula al cabo de 2 segundos es:

$$a_{n_{2s}} = \sqrt{a_{2s}^2 - a_{t_{2s}}^2} = \sqrt{(2\ m \cdot s^{-2})^2 - (1{,}6\ m \cdot s^{-2})^2} = 1{,}2\ m \cdot s^{-2}$$

Por último, como: $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, resulta:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(5\ m \cdot s^{-1})^2}{1{,}2\ m \cdot s^{-2}} = \boxed{20{,}83\ m}$$

3.24. ***La trayectoria descrita por un móvil viene definida por el vector de posición:***

$$\vec{r} = 4t\,\vec{i} + 2t^2\,\vec{j}\ (SI)$$

Determinar:

a) Los vectores velocidad y aceleración del móvil, así como sus módulos respectivos.
b) Las componentes intrínsecas de la aceleración.
c) El radio de curvatura de la trayectoria.

Solución:

a) El vector velocidad del móvil es:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4\vec{i} + 4t\vec{j}\ (SI)$$

y su módulo:

$$v = \sqrt{4^2 + (4t)^2} = 4\sqrt{1 + t^2}\ (m \cdot s^{-1})$$

$$\boxed{\vec{v} = 4\,\vec{i} + 4t\,\vec{j}\ (SI);\ v = 4\sqrt{1 + t^2}\ (m \cdot s^{-1})}$$

El vector aceleración es:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{j}\ (SI)$$

y su módulo:

$$a = 4\ m \cdot s^{-2}$$

La aceleración del móvil es constante en módulo, dirección y sentido.

$$\boxed{\vec{a} = 4\,\vec{j}\ (SI);\ a = 4\ m \cdot s^{-2}}$$

b) La aceleración tangencial es:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[4\sqrt{1 + t^2}\right] = \frac{4t}{\sqrt{1 + t^2}}\ (m \cdot s^{-2})$$

y la normal:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{1+t^2}} \ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$$

$$\boxed{\mathbf{a_t = \frac{4t}{\sqrt{1+t^2}} \ (m \cdot s^{-2});\ a_n = \frac{4}{\sqrt{1+t^2}} \ (m \cdot s^{-2})}}$$

c) Como $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, resulta:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{16\,(1+t^2)}{\dfrac{4}{\sqrt{1+t^2}}} = 4\,(1+t^2)^{3/2}\ (\mathrm{m})$$

$$\boxed{\mathbf{\rho = 4\,(1+t^2)^{3/2}\ (m)}}$$

3.25. *El vector de posición de un punto material respecto a un sistema de ejes coordenados OXY viene dado por:*

$$\vec{r} = 4\,(1 - \cos 2t)\,\vec{i} + 4\,(2t - \mathrm{sen}\,2t)\,\vec{j}$$

estando expresadas todas las magnitudes en unidades del Sistema Internacional. Hallar:

a) Los vectores velocidad y aceleración del punto material, así como sus módulos respectivos.
b) Las componentes intrínsecas de la aceleración.
c) El radio de curvatura de la trayectoria.

Solución:

a) Ya que el enunciado del problema nos da el vector de posición del punto material, el vector velocidad será:

$$\boxed{\mathbf{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 8\ sen\ 2t\ \vec{i} + 8\,(1 - cos\ 2t)\ \vec{j}\ (SI)}}$$

siendo su módulo:

$$v = \sqrt{(8\ \mathrm{sen}\ 2t)^2 + [8\,(1 - \cos 2t)]^2} =$$
$$= 8\sqrt{2\,(1 - \cos 2t)} = 16\ \mathrm{sen}\ t\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$$

$$\boxed{\mathbf{v = 16\ sen\ t\ (m \cdot s^{-1})}}$$

Hallemos ahora el vector aceleración:

$$\boxed{\mathbf{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 16\ cos\ 2t\ \vec{i} + 16\ sen\ 2t\ \vec{j}\ (SI)}}$$

Su módulo es:

$$a = \sqrt{(16 \cos 2t)^2 + (16 \operatorname{sen} 2t)^2} = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\boxed{\mathbf{a = 16 \ m \cdot s^{-2}}}$$

b) Llegado este momento, vamos a calcular las componentes intrínsecas de la aceleración. La aceleración tangencial es:

$$\boxed{\mathbf{a_t = \frac{dv}{dt} = 16 \cos t \ (m \cdot s^{-2})}}$$

y la normal:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{(16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^2 - [(16 \cos t) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}]^2} =$$
$$= 16 \operatorname{sen} t \ (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

$$\boxed{\mathbf{a_n = 16 \ sen \ t \ (m \cdot s^{-2})}}$$

c) Como: $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$,

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(16 \operatorname{sen} t)^2}{16 \operatorname{sen} t} \text{ (m)} = 16 \operatorname{sen} t \text{ (m)}$$

$$\boxed{\mathbf{\rho = 16 \ sen \ t \ (m)}}$$

3.26. *(*) Un punto se mueve sobre una circunferencia de acuerdo con la ley:*

$$s = t^3 + 2t^2$$

siendo s la longitud del arco recorrido y t el tiempo. Si la aceleración total del punto al cabo de 2 segundos es 16 $\sqrt{2}$ m · s^{-2}, ¿cuál es el radio de la circunferencia?

Solución: La velocidad sigue la ley:

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t \text{ (SI)}$$

siendo su valor al cabo de 2 segundos:

$$v_{2s} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La aceleración tangencial viene dada por la expresión:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 6t + 4 \text{ (SI)}$$

valiendo al cabo de 2 segundos:

$$a_{t_{2s}} = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Teniendo en cuenta que las dos componentes intrínsecas de la aceleración son perpendiculares, se deduce que:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{(16\sqrt{2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^2 - (16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^2} = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Por otra parte, como $a_n = \frac{v^2}{R}$, resulta:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = \boxed{25 \text{ m}}$$

3.27. *La ecuación de la celeridad en un determinado movimiento es:*

$$v = 6 + 8t$$

Suponiendo que el origen de los espacios coincida con el de los tiempos, ¿qué longitud habrá recorrido el móvil a los 5 segundos de iniciado el movimiento? (v en m/s y t en segundos).

Solución: La ecuación del espacio recorrido viene dada por:

$$s = \int_0^5 v \cdot dt = \int_0^5 (6 + 8t)\, dt = [6t + 4t^2]_0^5 = \boxed{130 \text{ m}}$$

3.28. *Sobre un cuerpo de 2 kg de masa actúa una fuerza variable con el tiempo dada por la expresión:*

$$F = 20t + 6$$

en la que t se expresa en segundos y F en newtons. Sabiendo que en el instante inicial $s_o = 3$ m, $v_o = 5$ m · s^{-1}, calcular la velocidad adquirida por el móvil y su posición al cabo de 5 segundos.

Solución: La aceleración que adquiere el cuerpo es:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{(20t + 6) \text{ N}}{2 \text{ kg}} = (10t + 3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Dado que:

$$a = \frac{dv}{dt} = 10t + 3$$

se sigue:

$$v = \int dv = \int a \cdot dt = \int (10t + 3)\, dt = 5t^2 + 3t + v_o =$$

$$= 5t^2 + 3t + 5 \text{ (SI)}$$

Para t = 5 s:

$$\boxed{\mathbf{v_5 = 145\ m \cdot s^{-1}}}$$

Por otra parte, como $v = \dfrac{ds}{dt}$:

$$s = \int ds = \int v \cdot dt = \int (5t^2 + 3t + 5)\, dt =$$

$$= \frac{5}{3}\, t^3 + \frac{3}{2}\, t^2 + 5t + s_o = \frac{5}{3}\, t^3 + \frac{3}{2}\, t^2 + 5t + 3 \text{ (SI)}$$

Para t = 5 s:

$$\boxed{\mathbf{s_5 = \frac{1\,643}{6}\ m}}$$

3.29. ***La aceleración del movimiento de una partícula cuya trayectoria es rectilínea viene dada por la expresión:***

$$a = 24t^2 - 16$$

en la que el tiempo se expresa en segundos y la aceleración en $m \cdot s^{-2}$. Sabiendo que en el instante en que el cronómetro comienza a contar el tiempo, la partícula móvil se encuentra a 5 m del origen y que al cabo de 2 segundos su velocidad es de 36 $m \cdot s^{-1}$, calcular:

a) La ecuación de la velocidad y de la posición de la partícula móvil.
b) Su velocidad media entre los instantes t = 1 s y t = 3 s.

Solución:

a) Ya que: $a = \dfrac{dv}{dt}$, resulta:

$$dv = a \cdot dt = (24t^2 - 16)\, dt$$

Por tanto:

$$v = \int (24t^2 - 16)\, dt = 8t^3 - 16t + \text{cte}$$

Para hallar el valor de la constante de integración hemos de tener en cuenta que cuando t = 2s, v = 36 m/s. Si sustituimos estos valores en la ecuación anterior, se obtiene: cte = 4 m/s, que es el valor de la veloci-

dad inicial. Por tanto, la ecuación de la velocidad de la partícula es:

$$\boxed{v = 8t^3 - 16t + 4 \text{ (SI)}}$$

Ya que $v = \frac{ds}{dt}$, resulta:

$$ds = v \cdot dt = (8t^3 - 16t + 4)\ dt$$

Por tanto:

$$s = \int (8t^3 - 16t + 4)\ dt = 2t^4 - 8t^2 + 4t + cte$$

Para hallar, en este caso, el valor de la constante de integración, que coincide con el espacio ya recorrido por la partícula cuando se empieza a contar el tiempo, tenemos que, como en ese momento la partícula se encuentra a 5 metros del origen, s_o = cte = 5 m. En consecuencia, la ecuación de la posición de la partícula móvil es:

$$\boxed{s = 2t^4 - 8t^2 + 4t + 5 \text{ (SI)}}$$

b) Para t = 1 s, s_1 = 3 m, mientras que para t = 3 s, s_3 = 107 m. Por tanto, la velocidad media de la partícula entre ambos instantes es:

$$v_m = \frac{s_3 - s_1}{\Delta t} = \frac{107 \text{ m} - 3 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\boxed{v_m = 52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

3.30. *Una partícula se desplaza a través de un plano XY con una velocidad $v = (2t - 2)\ \vec{i} + 3\vec{j}$, expresada en unidades internacionales. Cuando t = 2 s su vector de posición es $\vec{r} = 2\ \vec{i} + 3\ \vec{j}$ (m). Determinar la ecuación de la trayectoria de dicha partícula.*

Solución: La posición de la partícula viene dada en todo momento por el vector:

$$\vec{r} = \int \vec{v} \cdot dt = \int [(2t - 2)\ \vec{i} + 3\vec{j}]\ dt = (t^2 - 2t)\ \vec{i} + 3t\vec{j} + \vec{r}_o$$

Para el cálculo de $\vec{r}_o$ hemos de tener en cuenta que cuando t = 2 s, $\vec{r}_2 = 6\vec{j} + \vec{r}_o$; pero también, de acuerdo con el enunciado del problema, $\vec{r}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Por tanto, igualando ambas expresiones, obtenemos:

$$6\vec{j} + \vec{r}_o = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

de donde:

$$\vec{r}_o = 2\vec{i} - 3\vec{j}$$

Por consiguiente, la ecuación vectorial del movimiento es:

$$\vec{r} = (t^2 - 2t)\,\vec{i} + 3t\vec{j} + \vec{r}_o = (t^2 - 2t + 2)\,\vec{i} + (3t - 3)\,\vec{j}$$

que se puede descomponer en las dos ecuaciones paramétricas siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x = t^2 - 2t + 2 \\ y = 3t - 3 \end{array}\right\}$$

Si en estas dos ecuaciones eliminamos el tiempo, obtenemos la ecuación de la trayectoria de la partícula:

$$\boxed{\mathbf{y^2 - 9x + 9 = 0}}$$

que es la ecuación de una parábola.

3.31. ***(*) Una partícula P se mueve en un plano, siendo su trayectoria la curva xy = 1 (x e y en metros). La proyección de su vector velocidad sobre el eje OY es constante e igual a −10 cm/s, y para t = 4, x = 2. Se pide:***

a) Ecuaciones del movimiento: x = x (t) e y = y (t).
b) Posición, velocidad y aceleración de la partícula en los instantes t = 1 y t = 5.

Solución:

a) La componente v_y de la velocidad es constante ($v_y = -0{,}1$ m/s); en consecuencia, el movimiento según el eje OY es rectilíneo uniforme, siendo su ecuación: $y = -0{,}1t + y_o$.

Para el cálculo de y_o hemos de tener en cuenta que cuando t = 4, $x = 2$ e $y = \frac{1}{2}$. Sustituyendo en la ecuación anterior, resulta:

$$\frac{1}{2} = -0{,}1 \cdot 4 + y_o$$

de donde:

$$y_o = 0{,}9$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas del movimiento de la partícula son:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \mathbf{y = -0{,}1t + 0{,}9} \\ \mathbf{x = \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{-0{,}1t + 0{,}9}} \end{array}\right\} \textbf{(SI)}}$$

b) El vector de posición de la partícula es:

$$\vec{r} = \frac{1}{-0{,}1t + 0{,}9}\ \vec{i} + (-0{,}1t + 0{,}9)\ \vec{j}\ (SI)$$

y la velocidad y la aceleración vendrán dadas por los vectores respectivos:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{0{,}1}{(-0{,}1t + 0{,}9)^2}\ \vec{i} - 0{,}1\vec{j}\ (SI)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{0{,}02}{(-0{,}1t + 0{,}9)^3}\ \vec{i}\ (SI)$$

Al cabo de 1 s:

$$\vec{r}_1 = 1{,}25\ \vec{i} + 0{,}8\ \vec{j}\ (SI)$$
$$\vec{v}_1 = 0{,}16\ \vec{i} - 0{,}1\ \vec{j}\ (SI)$$
$$\vec{a}_1 = 3{,}9 \cdot 10^{-2}\ \vec{i}\ (SI)$$

Al cabo de 5 s:

$$\vec{r}_5 = 2{,}5\ \vec{i} + 0{,}4\ \vec{j}\ (SI)$$
$$\vec{v}_5 = 0{,}625\ \vec{i} - 0{,}1\ \vec{j}\ (SI)$$
$$\vec{a}_5 = 0{,}3125\ \vec{i}\ (SI)$$

3.32. ***Sobre un cilindro de 25 cm de diámetro, que gira en torno a su eje, dispuesto horizontalmente, con una velocidad angular constante de $\frac{240}{\pi}$ r.p.m., está enrollada una cuerda, de tal forma que ésta se va desenrollando a medida que el cilindro gira. En el extremo de la cuerda está sujeto un pequeño vagón de juguete, que se desliza, al desenrollarse la cuerda, sobre unos raíles en forma de arco de parábola, de ecuación $x^2 = 4y$ (fig. 3.2). Hallar la aceleración del vagón en el momento en que lleva descendido 1 m.***

Solución: La velocidad angular del cilindro, expresada en unidades internacionales, es:

$$\omega = \frac{240}{\pi}\ \frac{rev}{min} \cdot \frac{2\pi\ rad}{1\ rev} \cdot \frac{1\ min}{60\ s} = 8\ \frac{rad}{s}$$

siendo la velocidad lineal de un punto de su periferia;

$$v = \omega \cdot R = 8\ \frac{rad}{s} \cdot 0{,}125\ m = 1\ m/s$$

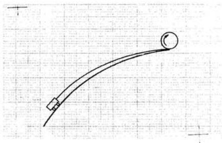


Fig. 3.2

Esta misma velocidad lineal constante es con la que el vagón se desliza a lo largo de los raíles. Tenemos que:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

siendo:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \text{cte} = 1 \text{ m/s}$$

Por otra parte:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d\,(x^2/4)}{dt} = \frac{x}{2}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{x}{2}\cdot v_x \end{aligned}\right\}$$

Por tanto:

$$v = \sqrt{v_x^2 + \left(\frac{x}{2}\cdot v_x\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + \frac{x^2}{4}\cdot v_x^2} =$$

$$= \frac{v_x}{2}\cdot\sqrt{4 + x^2} = 1 \ \frac{m}{s}$$

de donde:

$$v_x = \frac{2}{\sqrt{4 + x^2}}$$

$$v_y = \frac{x}{2}\cdot v_x = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}}$$

En consecuencia, el vector velocidad lineal del vagón en un punto cualquiera de su trayectoria sobre los raíles definido por la abscisa x vendrá dado por:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = \frac{2}{\sqrt{4 + x^2}}\ \vec{i} + \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}}\ \vec{j}\ \text{(SI)}$$

Calculemos ahora el vector aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{2x}{(4 + x^2)^{3/2}} \cdot \frac{dx}{dt}\ \vec{i} + \frac{4}{(4 + x^2)^{3/2}} \cdot \frac{dx}{dt}\ \vec{j} =$$

$$= -\frac{2x}{(4 + x^2)^{3/2}} \cdot v_x \cdot \vec{i} + \frac{4}{(4 + x^2)^{3/2}} \cdot v_x \cdot \vec{j} =$$

$$= -\frac{2x}{(4 + x^2)^{3/2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{4 + x^2}}\ \vec{i} + \frac{4}{(4 + x^2)^{3/2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{4 + x^2}}\ \vec{j} =$$

$$= -\frac{4x}{(4 + x^2)^2}\ \vec{i} + \frac{8}{(4 + x^2)^2}\ \vec{j}\ \text{(SI)}$$

Para y = 1 m, x = 2 m, y sustituyendo en la expresión general del vector aceleración, tenemos:

$$\vec{a}_{x=2} = -\frac{1}{8}\ \vec{i} + \frac{1}{8}\ \vec{j}\ \text{(SI)}$$

siendo su módulo:

$$\boxed{\mathbf{a_{x=2}} = \sqrt{\left(-\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{8}\ \mathbf{m \cdot s^{-2}}}$$

Nota: Esta aceleración es radial, ya que, como la velocidad con que se desliza el vagón es constante en módulo, no existe aceleración tangencial.

3.33. *Compruébese que la ecuación de la aceleración radial tiene las dimensiones de una aceleración.*

Solución: Como $a_n = \frac{v^2}{r}$, resulta:

$$[a_n] = \left[\frac{v^2}{r}\right] = \frac{(LT^{-1})^2}{L} = \boxed{\mathbf{LT^{-2}}}$$

3.34. ***Una rueda que gira a 900 r.p.m. mediante la acción de un freno gira a 300 r.p.m., tardando en este proceso 1/4 de minuto. ¿A qué aceleración angular estuvo sometida? Si el diámetro de la rueda es 60 cm, ¿cuál es la aceleración lineal de un punto de su periferia?***

Solución: Expresemos, en primer lugar, todos los datos en unidades del Sistema Internacional:

$$\omega_o = 900\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 30\pi\ \text{rad/s}$$

$$\omega = 300\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 10\pi\ \text{rad/s}$$

$$t = \frac{1}{4}\ \text{min} = 15\ \text{s}$$

La aceleración angular de la rueda es:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{10\pi\ \text{rad/s} - 30\pi\ \text{rad/s}}{15\ \text{s}} = -\frac{4}{3}\ \pi\ \text{rad/s}^2 = \boxed{-4{,}2\ \text{rad/s}^2}$$

Calculemos ahora la aceleración lineal de un punto de su periferia:

$$a = \alpha \cdot r = -\frac{4}{3}\ \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}3\ \text{m} = -0{,}4\pi\ \text{m/s}^2 = \boxed{-1{,}26\ \text{m/s}^2}$$

3.35. ***Un móvil toma una curva con una aceleración tangencial constante de 3 m/s². El radio de la curva es 50 m. ¿A qué aceleración total estará sometido el móvil en el instante en que su velocidad sea 90 km/h?***

Solución: En el instante pedido, en que la velocidad del móvil es 90 km/h = 25 m/s, su aceleración radial valdrá:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(25\ \text{m/s})^2}{50\ \text{m}} = 12{,}5\ \text{m/s}^2$$

Como la aceleración tangencial y la radial son perpendiculares, el valor de la aceleración total será:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(3\ \text{m/s}^2)^2 + (12{,}5\ \text{m/s}^2)^2} = \boxed{12{,}85\ \text{m/s}^2}$$

3.36. ***La velocidad tangencial adecuada para trabajar el hierro fundido es 0,6 m/s, aproximadamente. ¿A cuántas r.p.m. debe girar en un torno una pieza de 5 cm de diámetro?***

Solución: Como r = 2,5 cm = 0,025 m, tenemos:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{0{,}6\ \text{m/s}}{0{,}025\ \text{m}} = 24\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 24\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \frac{1\ \text{rev}}{2\pi\ \text{rad}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} =$$

$$= 229{,}18\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \simeq \boxed{230\ \text{r.p.m.}}$$

3.37. ***Demuéstrese que en el movimiento uniformemente acelerado la aceleración es igual al doble del espacio recorrido en la primera unidad de tiempo.***

Solución: En el movimiento uniformemente acelerado, si el móvil parte del reposo, se cumple que:

$$s = \frac{1}{2} at^2$$

El espacio que recorre el móvil en la primera unidad de tiempo es:

$$s_1 = \frac{1}{2} a$$

de donde se deduce que:

$$\boxed{a = 2 s_1}$$

3.38. ***¿Por qué un movimiento uniforme no puede iniciarse a partir del reposo?***

Solución: Si un cuerpo está en reposo, para iniciar su movimiento ha de poseer una cierta aceleración y, en consecuencia, el movimiento no podrá ser uniforme.

3.39. ***La figura 3.3 representa un movimiento rectilíneo y uniforme. A partir de los datos expuestos en ella deduce la ecuación de ese movimiento.***

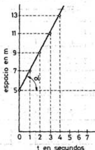


Fig. 3.3

Solución: La ordenada en el origen corresponde al espacio inicial s_o. Por tanto, $s_o = 5$. La pendiente de la recta coincide con el valor de la velocidad:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{7-5}{1} = \frac{9-5}{2} = \frac{11-5}{3} = 2$$

La ecuación será: $\boxed{s = 5 + 2t}$

3.40. ***Determinar las constantes de un movimiento uniformemente acelerado, sabiendo que el móvil tiene una velocidad de 17 m/s a los 4 segundos de haberse comenzado a contar el tiempo, y que en los instantes 2 y 4 segundos dista del origen 12 y 40 m, respectivamente.***

Solución: Sustituyendo los datos en las ecuaciones de la velocidad y del espacio, se tiene:

$$17 = v_o + 4a$$
$$12 = s_o + 2v_o + 2a$$
$$40 = s_o + 4v_o + 8a$$

Resolviendo el sistema, se obtienen los siguientes resultados:

$$\mathbf{a = 3\ m/s^2;\quad v_o = 5\ m/s;\quad s_o = -4\ m}$$

3.41. ***En un movimiento rectilíneo la distancia al origen viene dada por la expresión:***

$$s = 10 + 2t + t^3$$

Determinar las características del movimiento, la distancia al origen, la velocidad y la aceleración a los 2 segundos de iniciado el movimiento.

Solución: La ecuación de la velocidad viene dada por:

$$v = \frac{ds}{dt} = 2 + 3t^2$$

y la de la aceleración por:

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t$$

Al ser variable la aceleración se tratará de **un movimiento variado no uniformemente.**

Los valores de s, v y a se obtienen directamente de sus ecuaciones al sustituir t por su valor (2 segundos):

s = 22 unidades de longitud
v = 14 unidades de velocidad
a = 12 unidades de aceleración

3.42. ***Un móvil parte de un punto con una velocidad inicial de 1,10 m/s y recorre una trayectoria rectilínea con aceleración constante de −0,1 m/s². ¿Cuánto tiempo tardará en pasar por un punto situado a 1,05 m del origen? Interpretar físicamente los resultados obtenidos.***

Solución: Basta sustituir los datos en la ecuación del espacio:

$$1{,}05 \text{ m} = 1{,}1 \text{ (m/s) t} - \frac{1}{2} \text{ } 0{,}1 \text{ (m/s}^2\text{) t}^2$$

Despejando t, se obtienen los siguientes resultados:

$$\boxed{\begin{aligned} t_1 &= 1 \text{ s} \\ t_2 &= 21 \text{ s} \end{aligned}}$$

Esto quiere decir que **el móvil pasa dos veces por el mismo punto: una a la ida y otra a la vuelta.**

3.43. *Calcúlese la velocidad inicial y el espacio inicial en un movimiento uniformemente variado, de aceleración -8 m/s², sabiendo que la velocidad se anula para $t = 3$ s y que el espacio se anula para $t = 11$ s.*

Solución: Consideremos las dos fórmulas fundamentales del movimiento uniformemente variado:

$$v = v_o + at$$

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2$$

Como $a = -8$ m/s², sustituyendo resulta:

$$v = v_o - 8t \qquad [1]$$

$$s = s_o + v_o t - 4t^2 \qquad [2]$$

Teniendo en cuenta en la ecuación [1] que cuando $t = 3$ s, $v = 0$, se obtiene:

$$0 = v_o - 8 \cdot 3$$

de donde:

$$\boxed{v_o = 24 \text{ m/s}}$$

Como, por otra parte, para $t = 11$ s, $s = 0$, sustituyendo en la ecuación [2], tenemos:

$$0 = s_o + 24 \cdot 11 - 4 \cdot 11^2$$

de donde:

$$\boxed{s_o = 220 \text{ m}}$$

3.44. *Un coche marcha a 45 km/h y apretando el acelerador se logra que al cabo de medio minuto se ponga a 90 km/h. Calcular la aceleración del vehículo y el espacio recorrido en ese tiempo.*

Solución: Expresemos, en primer lugar, todos los datos en unidades del Sistema Internacional:

$$v_o = 45\ \frac{km}{h} \cdot \frac{1\ 000\ m}{1\ km} \cdot \frac{1\ h}{3\ 600\ s} = 12{,}5\ m/s$$

$$v = 90\ \frac{km}{h} \cdot \frac{1\ 000\ m}{1\ km} \cdot \frac{1\ h}{3\ 600\ s} = 25\ m/s$$

$$t = 0{,}5\ min = 30\ s$$

La aceleración del coche será:

$$a = \frac{v - v_o}{t} = \frac{25\ m/s - 12{,}5\ m/s}{30\ s} = 0{,}4167\ m/s^2 \simeq \boxed{0{,}42\ m/s^2}$$

y el espacio recorrido:

$$s = v_o t + \frac{1}{2}\ at^2 = 12{,}5\ \frac{m}{s} \cdot 30\ s + \frac{1}{2}\ 0{,}42\ \frac{m}{s^2} \cdot (30\ s)^2 = \boxed{564\ m}$$

3.45. *Una rueda gira a razón de 1 200 r.p.m. y mediante la acción de un freno se logra detenerla después de dar 50 vueltas. Deducir la aceleración angular de frenado y el tiempo empleado en el fenómeno.*

Solución: En primer lugar hay que expresar los datos en unidades SI:

$$1\ 200\ r.p.m. = 40\pi\ rad/s; \quad 50\ vueltas = 100\pi\ rad$$

Sustituyendo estos datos en las ecuaciones de la velocidad angular y del ángulo descrito:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 40\pi + \alpha \cdot t \\ 100\pi &= 40\pi \cdot t + \frac{1}{2}\ \alpha \cdot t^2 \end{aligned}\right\}$$

y resolviendo el sistema formado, se deduce:

$$\boxed{t = 5\ s; \quad \alpha = -8\pi\ rad/s^2}$$

3.46. *Un volante necesita 3 segundos para conseguir un giro de 234 radianes. Si su velocidad angular al cabo de ese tiempo es de 108 rad/s, ¿cuál fue su aceleración angular, supuesta constante? ¿Y su velocidad angular inicial?*

Solución: Sustituyendo los datos en las ecuaciones de la velocidad angular y del ángulo, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 108 = \omega_o + 3\alpha \\ 234 = 3\omega_o + 4{,}5\alpha \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, se obtienen los siguientes resultados:

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega_o = \mathbf{48\ rad/s} \\ \alpha = \mathbf{20\ rad/s^2} \end{array}}$$

3.47. ***Un volante gira a razón de 60 r.p.m. y al cabo de 5 segundos posee una velocidad angular de 37,7 rad/s. ¿Cuántas vueltas dio en ese tiempo?***

Solución: Calculemos, en primer lugar, la aceleración angular del volante, teniendo en cuenta que:

$$\omega_o = 60\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 2\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega = 37{,}7\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 12\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{12\pi\ \text{rad/s} - 2\pi\ \text{rad/s}}{5\ \text{s}} = 2\pi\ \text{rad/s}^2$$

El ángulo girado por el volante en 5 segundos es:

$$\varphi = \omega_o \cdot t + \frac{1}{2}\ \alpha \cdot t^2 = 2\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 5\ \text{s} + \frac{1}{2}\ 2\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (5\ \text{s})^2 = 35\pi\ \text{rad} =$$

$$= 35\pi\ \text{rad} \cdot \frac{1\ \text{vuelta}}{2\pi\ \text{rad}} = \boxed{\mathbf{17{,}5\ vueltas}}$$

3.48. ***(*) Un automóvil, partiendo del reposo, acelera uniformemente para alcanzar una velocidad de 20 m/s en 250 m de recorrido; a partir de este instante y manteniendo constante la velocidad recorre una distancia de 1 500 m, para detenerse a continuación en 50 m, mediante un movimiento uniformemente retardado, caracterizado por una aceleración negativa de 400 cm/s². Determinar los tiempos empleados en cada una de las tres fases del movimiento y dibujar la representación gráfica de la velocidad en función del tiempo.***

Solución: En la primera fase el movimiento es uniformemente acelerado, cumpliéndose las ecuaciones de dicho movimiento:

$$v = v_o + at$$

$$s = v_o t + \frac{1}{2}\ at^2$$

De acuerdo con los datos del problema:

$$\left.\begin{aligned} 20 &= at \\ 250 &= \frac{1}{2}\,at^2 \end{aligned}\right\}$$

Resuelto este sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\boxed{t_1 = 25\ s}$$

En la segunda fase el movimiento es uniforme, de acuerdo con la ecuación: s = vt. De aquí:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1\,500\ m}{20\ m/s} = 75\ s;\quad \boxed{t_2 = 75\ s}$$

Por último, en la tercera fase el movimiento es uniformemente retardado. Como $v = v_o + at$:

$$t = \frac{v - v_o}{a} = \frac{0\ m/s - 20\ m/s}{-4\ m/s^2} = 5\ s$$

$$\boxed{t_3 = 5\ s}$$

Obsérvese cómo en esta tercera fase del movimiento el enunciado del problema nos suministra datos en exceso.

La representación gráfica de la velocidad en función del tiempo se recoge en la figura 3.4.

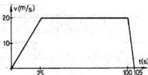


Fig. 3.4

3.49. ***Deducir las velocidades, supuestas constantes, de dos móviles A y B, separados por una distancia de 30 km, sabiendo que si se mueven en la misma dirección y sentido, se encuentran a 10 km de B, pero que si se mueven en sentidos opuestos, tardan 40 minutos en encontrarse.***

Solución: Expresaremos todos los datos en unidades del Sistema Internacional:

$$30 \text{ km} = 30\,000 \text{ m}$$
$$10 \text{ km} = 10\,000 \text{ m}$$
$$40 \text{ min} = 2\,400 \text{ s}$$

En el primer caso el móvil A recorre 40 000 m y el B 10 000 m. El tiempo invertido por ambos es el mismo. Por tanto:

$$\frac{40\,000}{v_A} = \frac{10\,000}{v_B}$$

de donde:

$$v_A = 4v_B \qquad [1]$$

En el segundo caso el espacio que recorre el móvil A, más el que recorre el móvil B, habrá de ser igual a la distancia que los separa. Es decir:

$$v_A \cdot 2\,400 + v_B \cdot 2\,400 = 30\,000$$

y simplificando:

$$v_A + v_B = 12{,}5 \qquad [2]$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones [1] y [2], se tiene:

$$\boxed{\mathbf{v_A = 10 \text{ m/s}; \quad v_B = 2{,}5 \text{ m/s}}}$$

3.50. *Dos cuerpos, A y B, separados por una distancia de 2 km, salen simultáneamente en la misma dirección y sentido, ambos con movimiento uniformemente variado, siendo la aceleración del más lento, el B, de 0,32 cm/s². El encuentro se realiza a 3,025 km de distancia del punto de partida de B. Calcular:*

a) El tiempo invertido por ambos móviles.
b) La aceleración de A.
c) Las velocidades de ambos en el instante del encuentro.

Solución:

a) El movimiento de B es uniformemente variado, según la ecuación:

$$S_B = \frac{1}{2} a_B \cdot t^2 = \frac{1}{2}\ 0{,}0032\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 = 0{,}0016\ t^2$$

Como, de acuerdo con los datos del problema, $S_B = 3\,025$ m, resulta:

$$3\,025 = 0{,}0016\ t^2$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{t = 1\,375 \text{ s}}}$$

b) Como A y B distan 2 km, el espacio recorrido por A será:

$$S_A = 3\,025 \text{ m} + 2\,000 \text{ m} = 5\,025 \text{ m}$$

Por otra parte, el movimiento de A también es uniformemente variado. En consecuencia:

$$S_A = \frac{1}{2}\, a_A \cdot t^2$$

de donde:

$$a_A = \frac{2\,S_A}{t^2} = \frac{2 \cdot 5\,025 \text{ m}}{(1\,375 \text{ s})^2} = \boxed{0{,}0053 \text{ m/s}^2}$$

c) Calculemos, por último, las velocidades de los dos cuerpos en el momento del encuentro:

$$v_A = v_{o_A} + a_A \cdot t = 0 \text{ m/s} + 0{,}0053 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\,375 \text{ s} = \boxed{7{,}3 \text{ m/s}}$$

$$v_B = v_{o_B} + a_B \cdot t = 0 \text{ m/s} + 0{,}0032 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\,375 \text{ s} = \boxed{4{,}4 \text{ m/s}}$$

3.51. ***Un coche lleva una velocidad de 72 km/h y los frenos que posee son capaces de producirle una deceleración máxima de 6 m/s². El conductor tarda 0,8 segundos en reaccionar desde que ve un obstáculo hasta que frena adecuadamente. ¿A qué distancia ha de estar el obstáculo para que el conductor pueda evitar el choque en las circunstancias citadas?***

Solución: Mientras dura el tiempo de reacción, el coche, con movimiento uniforme, avanza un espacio:

$$s_1 = v \cdot t = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}8 \text{ s} = 16 \text{ m}$$

Una vez que el coche comienza a frenar el espacio que recorre hasta pararse será:

$$s_2 = \frac{v^2 - v_o^2}{2a} = \frac{0 - (20 \text{ m/s})^2}{2 \cdot (-6 \text{ m/s}^2)} = 33{,}3 \text{ m}$$

Por tanto, para evitar el choque, el obstáculo ha de estar a una distancia:

$$s = s_1 + s_2 = 16 \text{ m} + 33{,}3 \text{ m} = \boxed{49{,}3 \text{ m}}$$

3.52. ***En un movimiento uniformemente variado los espacios recorridos por el móvil en los instantes 1, 3 y 5 segundos son, respectivamente, 55 cm, 225 cm y 555 cm. Calcular el espacio inicial, la velocidad inicial y la aceleración.***

Solución: En el movimiento uniformemente variado se cumple que:

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2$$

De acuerdo con los datos del problema, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}55 \text{ m} &= s_o + v_o \cdot 1 \text{ s} + \frac{1}{2} a \cdot (1 \text{ s})^2 \\ 2{,}25 \text{ m} &= s_o + v_o \cdot 3 \text{ s} + \frac{1}{2} a \cdot (3 \text{ s})^2 \\ 5{,}55 \text{ m} &= s_o + v_o \cdot 5 \text{ s} + \frac{1}{2} a \cdot (5 \text{ s})^2 \end{aligned}\right\}$$

La resolución de este sistema de ecuaciones conduce a:

$$\boxed{\mathbf{s_o = 0{,}3 \text{ m}; \; v_o = 0{,}05 \text{ m/s}; \; a = 0{,}4 \text{ m/s}^2}}$$

3.53. ***En el minuto 32 del primer tiempo, correspondiente al partido de fútbol España-Eire, jugado el día 16 de noviembre de 1988, Andrinúa lanzó un balón a ras de suelo, en pase recto, a una velocidad de 27 km/h. Butragueño, que se encontraba 10 m detrás de Andrinúa, en la misma dirección de lanzamiento del balón, salió tras de él con intención de alcanzarlo y pasárselo a Manolo. La velocidad de Butragueño era de 36 km/h.***

¿Qué distancia hubo de recorrer «El Buitre» para alcanzar el balón? ¿Cuánto tiempo empleó?

Dato: El rozamiento del balón contra el suelo le produjo a éste una deceleración constante de 2 m/s².

Solución: Expresemos ambas velocidades en unidades SI:

$$27 \text{ km/h} = 7{,}5 \text{ m/s}; \quad 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$$

El espacio recorrido por el balón hasta ser alcanzado por Butragueño es:

$$s_1 = 7{,}5t + \frac{1}{2} (-2) t^2 = 7{,}5t - t^2$$

mientras que la distancia que recorre el jugador será:

$$s_2 = 10t$$

Como $s_2 = s_1 + 10$, sustituyendo resulta:

$$7{,}5t - t^2 + 10 = 10t$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{t = 2{,}15 \text{ s}}}$$

(La otra solución de la ecuación carece de significado físico.)

La distancia que tuvo que recorrer el jugador es:

$$s_2 = 10t = 10\ \frac{m}{s} \cdot 2,15\ s = \boxed{\mathbf{21,5\ m}}$$

3.54. ***Un conejo corre hacia su madriguera a la velocidad de 72 km/h. Cuando se encuentra a 200 m de ella, un perro, situado 40 m más atrás, sale en su persecución, recorriendo 90 m con la aceleración de 5 m/s² y continuando luego con velocidad constante.***

a) Deducir cinemáticamente si salvará su piel el conejo.
b) Razonar matemáticamente qué sucedería si la madriguera estuviera 100 m más lejos.

Solución:

a) Calculemos los tiempos invertidos por el conejo y el perro en llegar hasta la madriguera.

Como el conejo corre a velocidad constante de 72 km/h = 20 m/s, su movimiento es uniforme y el tiempo que emplea es:

$$t_c = \frac{s}{v} = \frac{200\ m}{20\ m/s} = 10\ s$$

El perro en la primera etapa de su movimiento emplea un tiempo:

$$t_{p_1} = \sqrt{\frac{2\ s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 90\ m}{5\ m/s^2}} = 6\ s$$

adquiriendo al cabo de estos 6 segundos una velocidad:

$$v = v_o + at = 0\ m/s + 5\ \frac{m}{s^2} \cdot 6\ s = 30\ m/s$$

Durante la segunda etapa recorre: 240 m − 90 m = 150 m, a la velocidad constante de 30 m/s, invirtiendo un tiempo de:

$$t_{p_2} = \frac{150\ m}{30\ m/s} = 5\ s$$

El tiempo total que emplea el perro es:

$$t_p = t_{p_1} + t_{p_2} = 6\ s + 5\ s = 11\ s$$

mayor que el del conejo. Por tanto, **éste se salvará.**

b) El razonamiento es análogo al del caso anterior:

$$t_c = \frac{300\ m}{20\ m/s} = 15\ s$$

$$t_{p_1} = 6\ s$$

$$t_{p_2} = \frac{340 \text{ m} - 90 \text{ m}}{30 \text{ m/s}} = \frac{250 \text{ m}}{30 \text{ m/s}} = 8{,}33 \text{ s}$$

$$t_p = t_{p_1} + t_{p_2} = 6 \text{ s} + 8{,}33 \text{ s} = 14{,}33 \text{ s}$$

Como $t_p < t_c$, **el conejo será capturado por el perro.**

3.55. *Desde un punto situado a 10 m sobre el suelo se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de 30 m/s. ¿Con qué velocidad llegará al suelo?*

Solución: Calcularemos, primero, el tiempo que tardará la piedra en alcanzar la máxima altura, momento en que se anula su velocidad. Por tanto:

$$t = \frac{v - v_o}{g} = \frac{0 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s}}{-10 \text{ m/s}^2} = 3 \text{ s}$$

La altura que alcanza la piedra al cabo de este tiempo (que será la altura máxima) vale:

$$h = h_o + v_o t + \frac{1}{2} g t^2 =$$

$$= 10 \text{ m} + 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot (3 \text{ s})^2 = 55 \text{ m}$$

Hallemos, por último, la velocidad con que llega la piedra al suelo:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 55 \text{ m}} = \boxed{\mathbf{33{,}17 \text{ m/s}}}$$

También se puede resolver el problema de una manera más sencilla, considerando que cuando la piedra efectúa su movimiento de descenso, al pasar por el punto de lanzamiento su velocidad es de 30 m/s. Todo se reduce, pues, a calcular su velocidad cuando ha recorrido 10 metros desde dicho punto:

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2gh} = \sqrt{(30 \text{ m/s})^2 + 2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m}} = \boxed{\mathbf{33{,}17 \text{ m/s}}}$$

3.56. *Se lanzan dos piedras verticalmente hacia arriba: una desde 20 m más arriba que la otra. Si ambas piedras alcanzan la misma altura máxima, ¿qué relación existe entre sus velocidades iniciales?*

Solución: Si la más alta se lanza con una velocidad v_o y alcanza una altura h, la más baja, que se lanza con una velocidad v'_o, recorrerá una distancia vertical h + 20. Ambas piedras al alcanzar la máxima altura anulan su velocidad. Por tanto:

$$v_o^2 = 2gh$$
$$v_o'^2 = 2g\,(h + 20)$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, resulta:

$$\frac{v_o'^2}{v_o^2} = \frac{h + 20}{h}$$

de donde:

$$\boxed{\frac{v_o'}{v_o} = \sqrt{1 + \frac{20}{h}}}$$

3.57. *(*) Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s. Calcular:*

a) La altura máxima que alcanzará.
b) El tiempo que tarda en alcanzar dicha altura.
c) El tiempo mínimo que tarda en alcanzar una velocidad de 10 m/s. (Tómese $g = 10\ m/s^2$.)

Solución: Al ser un movimiento de ascenso vertical, es uniformemente retardado, valiendo la aceleración de la gravedad $g = -10\ m/s^2$.

a) Al alcanzar la altura máxima la velocidad del cuerpo se anula ($v = 0$). Por tanto:

$$h_{máx} = \frac{v^2 - v_o^2}{2g} = \frac{(0\ m/s)^2 - (20\ m/s)^2}{2 \cdot (-10\ m/s^2)} = \boxed{20\ m}$$

b)

$$t = \frac{v - v_o}{g} = \frac{0\ m/s - 20\ m/s}{-10\ m/s^2} = \boxed{2\ s}$$

c) El cuerpo alcanza la velocidad de 10 m/s dos veces: una al subir y la otra al bajar. El tiempo mínimo que tarda en alcanzar dicha velocidad será al subir. En consecuencia, aplicando la fórmula $v = v_o + gt$, tenemos:

$$t = \frac{v - v_o}{g} = \frac{10\ m/s - 20\ m/s}{-10\ m/s^2} = \boxed{1\ s}$$

3.58. *(*) Dos proyectiles se lanzan verticalmente hacia arriba con dos segundos de intervalo, el primero con una velocidad inicial de 50 m/s y el segundo con velocidad inicial de 80 m/s. ¿Cuál será el tiempo transcurrido hasta que los dos se encuentren? ¿A qué altura sucederá? ¿Qué velocidad tendrá cada uno en ese momento? (Tómese $g = 9{,}8\ m/s^2$.)*

Solución: Llamemos t al tiempo que transcurre desde que se lanza el se-

gundo proyectil hasta el momento en que los dos se encuentran. Cuando eso sucede, ambos están a la misma altura. Por tanto:

$$50\,(t + 2) - \frac{1}{2}\,9{,}8\,(t + 2)^2 = 80\,t - \frac{1}{2}\,9{,}8\,t^2$$

Operando en esta expresión, se obtiene:

$$t = \frac{50 - 9{,}8}{15 + 9{,}8} = \boxed{1{,}62\ s}$$

El tiempo transcurrido desde que se lanzó el proyectil es:

$$t' = t + 2 = \boxed{3{,}62\ s}$$

Calculemos ahora la altura a la que se encuentran y apliquemos para ello la ecuación $h = v_o t + \frac{1}{2}\,gt^2$ a un proyectil cualquiera, por ejemplo al segundo. Tenemos:

$$h = 80\,\frac{m}{s} \cdot 1{,}62\ s + \frac{1}{2}\left(-9{,}8\,\frac{m}{s^2}\right) \cdot (1{,}62\ s)^2 = \boxed{116{,}74\ m}$$

La velocidad del primer proyectil en el punto del encuentro será:

$$v_1 = v_o + gt' = 50\ m/s + (-9{,}8\ m/s^2) \cdot 3{,}62 s = \boxed{14{,}52\ m/s}$$

y la del segundo:

$$v_2 = v_o + gt = 80\ m/s + (-9{,}8\ m/s^2) \cdot 1{,}62\ s = \boxed{64{,}12\ m/s}$$

3.59. ***(*) Un globo que se eleva verticalmente con una velocidad de 4,8 m/s abandona un saco de lastre en el instante en que el globo se encuentra a 19,2 metros sobre el suelo.***

a) Calcular la posición y la velocidad del saco de lastre al cabo de 1/4 s, 1/2 s, 1 s y 2 s.
b) ¿Al cabo de cuántos segundos llegará al suelo?
c) ¿Cuál será su velocidad en ese instante?

Solución:

a) Si tomamos como nivel de referencia el suelo, la velocidad inicial del saco de lastre positiva (por estar dirigida hacia arriba) y la aceleración de la gravedad negativa (ya que su sentido es siempre hacia abajo), la posición y la velocidad del saco de lastre vendrán dadas en todo momento por las expresiones:

$$h = 19{,}2 + 4{,}8\,t - 4{,}9\,t^2\ (m); \quad v = 4{,}8 - 9{,}8\,t\ (m/s)$$

Por sustitución en las ecuaciones anteriores, se obtiene:

Para t = 1/4 s, h = 20,09 m;	**v = 2,35 m/s (hacia arriba).**
Para t = 1/2 s, h = 20,37 m;	**v = −0,1 m/s (hacia abajo).**
Para t = 1 s, h = 19,1 m;	**v = −5 m/s (hacia abajo).**
Para t = 2 s, h = 9,2 m;	**v = −14,8 m/s (hacia abajo).**

b) Cuando el saco de lastre llegue a tierra, h = 0. La ecuación de la posición queda reducida a:

$$0 = 19{,}2 + 4{,}8\ t - 4{,}9\ t^2$$

de donde:

$$\boxed{t = 2{,}53\ s}$$

c) La velocidad del saco al llegar al suelo será:

$$v = 4{,}8\ m/s - 9{,}8\ m/s^2 \cdot 2{,}53\ s = \boxed{-20\ m/s\ \text{(hacia abajo)}}$$

3.60. *(*) Dos móviles se encuentran sobre una misma horizontal separados 20 metros. En el mismo instante se lanzan verticalmente hacia arriba con velocidad de 100 y 150 m/s.*

a) ¿A qué distancia se encontrarán uno de otro al cabo de 10 segundos de iniciarse el movimiento?
b) ¿En qué instante se encontrarán a la misma altura? ¿Cuál es esta altura?

Solución:

a) Al cabo de un cierto tiempo t, la altura alcanzada por el primer móvil es:

$$h_1 = v_1 t - \frac{1}{2}\ gt^2$$

mientras que la que alcanza el segundo, lanzado simultáneamente, es:

$$h_2 = v_2 t - \frac{1}{2}\ gt^2$$

La diferencia de alturas que alcanzan ambos móviles al cabo de 10 segundos de iniciarse el movimiento es:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = (v_2 - v_1) \cdot t = (150\ m/s - 100\ m/s) \cdot 10\ s = 500\ m$$

Al cabo de 10 segundos la distancia entre ambos móviles (véase la figura 3.5) es:

$$d = \sqrt{(500\ m)^2 + (20\ m)^2} = \boxed{500{,}4\ m}$$

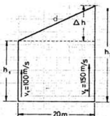


Fig. 3.5

b) Cuando ambos móviles se encuentren a la misma altura se cumplirá que $h_1 = h_2$, de donde se deduce que $v_1t = v_2t$, lo cual, dado que $v_1 \neq v_2$, sólo es posible cuando $\boxed{t = 0}$. Para este valor de t, $\boxed{h_1 = h_2 = 0}$.

3.61. ***Desde un punto situado a una altura de 78,4 m por encima de un plano horizontal se deja caer una pelota de goma, que, tras chocar con el plano, rebota, conservando la mitad de su velocidad. Calcular:***

a) La altura que alcanza la pelota en su rebote.
b) El tiempo total transcurrido desde que se dejó caer la pelota hasta que choca por segunda vez con el plano.

Solución:

a) La velocidad con la que la pelota llega al suelo es:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\ m \cdot s^{-2} \cdot 78{,}4\ m} = 39{,}2\ m/s$$

Al rebotar conserva la mitad de su velocidad, siendo, por tanto, la velocidad inicial de ascenso:

$$v'_o = \frac{1}{2} \cdot 39{,}2\ m/s = 19{,}6\ m/s$$

Con esta velocidad inicial la altura que alcanzará la pelota en su rebote es:

$$h' = \frac{v^2 - v_o^2}{2g} = \frac{(0\ m/s)^2 - (19{,}6\ m/s)^2}{2 \cdot (-9{,}8\ m/s^2)} = \boxed{19{,}6\ m}$$

b) El tiempo invertido en la primera caída es:

$$t_1 = \frac{v - v_o}{g} = \frac{39{,}2\ m/s - 0\ m/s}{9{,}8\ m/s^2} = 4\ s$$

El tiempo empleado en el primer ascenso es:

$$t_2 = \frac{1}{2} t_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ s} = 2 \text{ s}$$

Por último, el tiempo que invierte la pelota en su segunda caída es el mismo que el del ascenso anterior.

$$t_3 = t_2 = 2 \text{ s}$$

Por tanto, el tiempo total es:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 4 \text{ s} + 2 \text{ s} + 2 \text{ s} = \boxed{8 \text{ s}}$$

3.62. *(*) Determinar la profundidad de un pozo cuando el sonido producido por una piedra que se suelta en su brocal, al chocar con su fondo, se oye 3 segundos después. (Considérese: $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; velocidad del sonido en el aire = $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.)*

Solución: Llamemos h a la profundidad del pozo. Es evidente que el tiempo de 3 segundos es la suma del tiempo empleado por la piedra en su caída con movimiento uniformemente acelerado y velocidad inicial nula ($\sqrt{2h/g}$) y del que invierte el sonido con movimiento uniforme en subir hasta el brocal (h/340). Por consiguiente:

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{340} = 3$$

Como $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$:

$$\sqrt{\frac{h}{5}} + \frac{h}{340} = 3$$

o, lo que es lo mismo:

$$\sqrt{\frac{h}{5}} = 3 - \frac{h}{340}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de la anterior ecuación y quitando denominadores, obtenemos, tras simplificar:

$$h^2 - 25\,160\, h + 1\,040\,400 = 0$$

Resolvamos ahora esta ecuación de segundo grado:

$$h = \frac{25\,160 \pm \sqrt{25\,160^2 - 4 \cdot 1\,040\,400}}{2} = \begin{cases} 25\,118 \text{ m} \\ 41{,}4 \text{ m} \end{cases}$$

De las dos soluciones obtenidas sólo la segunda tiene significado físico.

La primera ha surgido al elevar la ecuación original al cuadrado, y, como se puede comprobar fácilmente, si fuera válida, tanto la piedra al caer como el sonido al subir emplearían más de 3 segundos. En consecuencia:

$$\boxed{\mathbf{h = 41{,}4\ m}}$$

3.63. *(*) Dibujar en sendas gráficas el espacio y la velocidad, ambas en función del tiempo, de una piedra lanzada verticalmente hacia arriba, hasta el momento en que de nuevo es recogida por la persona que la lanzó.*

Solución: Tenemos que representar gráficamente dos funciones. La primera es:

$$s = v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

(El signo negativo en la anterior ecuación se debe al hecho de que se trata de un movimiento de ascenso vertical en el campo gravitatorio terrestre, que es uniformemente retardado.) Esta ecuación corresponde a una parábola. Vamos a hallar sus puntos de intersección con los ejes:

Para $t = 0$, $s = 0$; por otra parte, para $s = 0$, $t \cdot \left(v_o - \frac{1}{2} g t \right) = 0$,

ecuación que tiene dos soluciones: $t_1 = 0$ y $t_2 = 2v_o/g$. Por consiguiente, los puntos de intersección con los ejes son (0, 0) y $(2v_o/g, 0)$.

Para encontrar el punto, o los puntos, en que la función adquiere su valor máximo o mínimo, tenemos que igualar a cero la primera derivada:

$$\frac{ds}{dt} = v_o - gt = 0$$

de donde se obtiene: $t = v_o/g$. Para este valor de t:

$$s = v_o \cdot \frac{v_o}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_o}{g} \right)^2 = \frac{v_o^2}{2g}$$

Como:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g < 0$$

el valor antes obtenido es un máximo. La función adquiere un valor máximo en el punto:

$$\left(\frac{v_o}{g}, \frac{v_o^2}{2g} \right)$$

Tras este estudio teórico podemos ya construir la representación gráfica del espacio en función del tiempo (fig. 3.6).

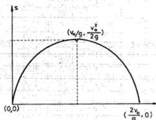


Fig. 3.6

La segunda función que tenemos que representar es:

$$v = v_o - gt$$

Esta ecuación corresponde a una recta, cuyos puntos de intersección con los ejes los calcularemos haciendo $t = 0$ y $v = 0$. Para $t = 0$, $v = v_o$, y para $v = 0$, $t = v_o/g$. Por consiguiente, los puntos de intersección con los ejes son: $(0, v_o)$ y $(v_o/g, 0)$. Por otra parte, cuando la piedra llega al suelo, después de haber transcurrido un tiempo $t = 2v_o/g$, su velocidad es: $v = v_o - g \cdot (2v_o/g) = -v_o$, igual a la inicial de lanzamiento, pero en sentido contrario. En resumen, la representación gráfica de la velocidad en función del tiempo es la que vemos reproducida en la figura 3.7.

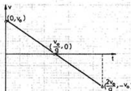


Fig. 3.7

3.64. ***Una pelota cae desde la cornisa de un edificio y tarda 0,3 segundos en pasar por delante de una ventana de 2,5 metros de alto (longitud de la ventana). ¿A qué distancia de la cornisa se encuentra el marco superior de la ventana?***

Solución: Según el esquema representado en la figura 3.8, la pelota «entra» en la ventana con una velocidad inicial v', que podemos calcular conocida la longitud de la ventana y el tiempo que tarda en pasar por delante de ella:

$$h = h_o + v't + \frac{1}{2}\,gt^2$$

$$2{,}5\,m = v' \cdot 0{,}3\,s + \frac{1}{2}\,10\,m/s^2 \cdot (0{,}3\,s)^2$$

de donde: $v' = 6{,}8$ m/s.

Ahora el problema se reduce a calcular desde qué altura debería caer la pelota ($v_o = 0$) para alcanzar esa velocidad de 6,8 m/s. Aplicando la expresión:

$$v^2 - v_o^2 = 2gh$$

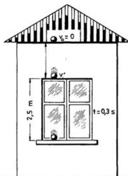


Fig. 3.8

correspondiente a la caída libre, tenemos:

$$h = \frac{v^2 - v_o^2}{2g} = \frac{(6{,}8\,m/s)^2 - 0}{2 \cdot 10\,m/s^2} = \boxed{2{,}3\,m}$$

También se puede resolver el problema considerando dos movimientos de caída de la pelota: desde la cornisa hasta el marco superior de la ventana y desde la cornisa hasta el marco inferior. Resulta, así, el siguiente sistema de ecuaciones (fig. 3.9):

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}\,gt^2 \\ h + 2{,}5 &= \frac{1}{2}\,g\,(t + 0{,}3)^2 \end{aligned}\right\}$$

La resolución de este sistema, tomando $g = 10$ m/s², conduce a:

$$t = 0{,}683\,s$$

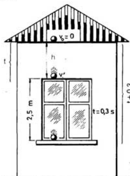


Fig. 3.9

valor que, sustituido en una cualquiera de las ecuaciones del sistema, da como resultado:

$$\boxed{h = 2{,}3\,m}$$

3.65. ***Una plataforma circular, dispuesta horizontalmente, gira con velocidad angular constante en torno a un eje vertical que pasa por su centro. Del techo de la habitación donde se encuentra dicha plataforma cuelga una polea fija, de la que, a través de un hilo de masa despreciable que pasa por su garganta, penden dos esferillas idénticas, situadas ambas en un plano vertical que contiene al eje de rotación y a un mismo lado de él, tiznadas de negro de humo y que distan de la plataforma 240,1 cm y 176,4 cm, respectivamente. En un momento determinado se rompe el hilo y las esferillas caen, chocando contra la plataforma y dejando en ella dos señales ennegrecidas, que con el centro como vértice determinan un ángulo de 45°. Calcular la velocidad angular de la plataforma.***

Solución: El tiempo que tarda la primera esferilla en alcanzar la plataforma es:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}401 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 0{,}7 \text{ s}$$

mientras que el que invierte la segunda es:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}764 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 0{,}6 \text{ s}$$

Luego las dos esferillas llegan a la plataforma con una diferencia de tiempo:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 0{,}7 \text{ s} - 0{,}6 \text{ s} = 0{,}1 \text{ s}$$

En ese intervalo de tiempo la plataforma giró 45°. Por tanto, su velocidad angular será:

$$\omega = \frac{45°}{0{,}1 \text{ s}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{360°} = \boxed{\mathbf{75 \ \frac{vueltas}{min}}}$$

3.66. ***Un móvil animado de movimiento vibratorio armónico tiene una aceleración de 5 m/s² cuando su elongación es de 5 cm. ¿Cuánto vale su período?***

Solución: Si consideramos positiva la elongación, la aceleración debemos considerarla negativa. Por tanto, los datos podemos expresarlos así:

$$s = 5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$
$$a = -5 \text{ m/s}^2$$

Apliquemos la ecuación que relaciona la aceleración con la elongación:

$$a = -\omega^2 \cdot s$$

Se deduce que:

$$-5 \text{ m/s}^2 = -5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \omega^2$$

de donde:

$$\omega = 10 \text{ rad/s}$$

Y como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

resulta:

$$T = \frac{2\pi \text{ rad}}{10 \text{ rad/s}} = 0{,}2\pi \text{ s} = \boxed{0{,}63 \text{ s}}$$

3.67. ***Una masa puntual, sujeta a un muelle elástico dispuesto horizontalmente, está animada de un movimiento armónico simple de amplitud $A = 2$ m y pulsación $\omega = 2\pi$ rad/s. Calcular:***

a) El período y la frecuencia del movimiento armónico simple.
b) La ecuación que relaciona la elongación de la masa puntual con el tiempo transcurrido, sabiendo que en el instante inicial el móvil se encuentra en su posición de equilibrio, desplazándose en el sentido positivo del eje de elongaciones.
c) Las ecuaciones análogas que relacionan la velocidad y la aceleración con el tiempo.
d) La elongación, velocidad y aceleración de la masa puntual tras haber transcurrido un tiempo $t = \frac{1}{3}$ s después del instante inicial.
e) El tiempo mínimo que es necesario que transcurra para que la elongación de la masa puntual sea $x = -1$ m.
f) La velocidad máxima que adquiere la masa puntual en su movimiento.

Solución:

a) El período del movimiento es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{2\pi \text{ rad/s}} = 1 \text{ s}$$

y su frecuencia:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{1 \text{ s}} = 1 \text{ s}^{-1}$$

$$\boxed{T = 1 \text{ s}; \quad \nu = 1 \text{ s}^{-1}}$$

b) En todo movimiento armónico simple la elongación viene dada por la ecuación: $x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0)$. Como en el caso del problema, para $t = 0$, $x = 0$, sin más que sustituir en la ecuación anterior obtenemos: $\text{sen } \varphi_0 = 0$, de donde se concluye que $\varphi_0 = 0$. Por tanto, la ecuación que relaciona la elongación con el tiempo viene dada por: $x = A \text{ sen } \omega t$.

Sustituyendo los valores de A y ω, llegamos al resultado final:

$$\boxed{x = 2 \text{ sen } 2\pi t \text{ (SI)}}$$

c) La velocidad y la aceleración de la masa puntual son respectivamente:

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = 4\pi \cdot \cos 2\pi t \text{ (SI)}}$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = -8\pi^2 \text{ sen } 2\pi t \text{ (SI)} = -4\pi^2 x \text{ (SI)}}$$

d) Para $t = \frac{1}{3}$ s, los valores de la elongación, velocidad y aceleración de la masa puntual son, respectivamente:

$$x_{1/3} = 2 \text{ sen } \frac{2\pi}{3} = \boxed{\sqrt{3} \text{ m}}$$

$$v_{1/3} = 4\pi \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = \boxed{-2\pi \text{ m/s}}$$

$$a_{1/3} = -4\pi^2 x = \boxed{-4\pi^2 \sqrt{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

e) Si en la expresión de la elongación hacemos $x = -1$ m, tenemos: $-1 = 2 \text{ sen } 2\pi t$, de donde:

$$2\pi t = \text{arc sen } (-1/2) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

Por tanto:

$$t = \frac{7\pi/6}{2\pi} = \boxed{\frac{7}{12} \text{ s}}$$

f) La velocidad máxima de la masa puntual tendrá lugar cuando $\cos 2\pi t = \pm 1$. Luego:

$$\boxed{v_{máx} = 4\pi \text{ m/s}}$$

3.68. ***El movimiento del pistón de un automóvil es, aproximadamente, armónico simple. Si la carrera del motor (dos veces la amplitud) es de 10 cm y la pulsación 3 600 r.p.m. calcular la aceleración del pistón en el extremo de su carrera y su velocidad al pasar por el punto medio de la misma.***

Solución: Expresaremos previamente los datos en unidades del Sistema Internacional:

$$A = 5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\omega = 3\,600\ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 120\ \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

En el extremo de la carrera la elongación es máxima y viene dada por la ecuación:

$$a_{máx} = -A \cdot \omega^2$$

Por tanto:

$$a_{máx} = -5 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \left(120\ \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = \boxed{-7\ 106\ \text{m/s}^2}$$

Por otra parte, como $s = A$ sen $(\omega t + \varphi_o)$, tenemos:

$$v = \frac{ds}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_o) = A \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - \text{sen}^2(\omega t + \varphi_o)} =$$

$$= A \cdot \omega \sqrt{1 - \frac{s^2}{A^2}} = A\omega \sqrt{\frac{A^2 - s^2}{A^2}} = \omega \cdot \sqrt{A^2 - s^2}$$

Al pasar por el punto medio de la carrera, $s = 0$. Por tanto:

$$v = \omega \cdot A = 120\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 5 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 6\pi\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 18{,}85\ \frac{\text{m}}{\text{s}} =$$

$$= 18{,}85\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1\ \text{km}}{1\ 000\ \text{m}} \cdot \frac{3\ 600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = \boxed{67{,}86\ \text{km/h}}$$

3.69. ***(*) En el instante en que un cuerpo que se mueve con movimiento armónico simple se encuentra a 6 cm de su posición de equilibrio, su velocidad es de 1 cm/s, mientras que cuando se encuentra a 2 cm, su velocidad es de 4 cm/s. Calcular la frecuencia y la amplitud del citado movimiento.***

Solución: Como:

$$v = A \cdot \omega \cdot \sqrt{\frac{A^2 - s^2}{A^2}} = \omega \sqrt{A^2 - s^2}$$

sustituyendo en los dos casos, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 1\ \text{cm/s} &= \omega \sqrt{A^2 - (6\ \text{cm})^2} \\ 4\ \text{cm/s} &= \omega \sqrt{A^2 - (2\ \text{cm})^2} \end{aligned}\right\}$$

Dividiendo miembro a miembro, se obtiene:

$$\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{A^2 - 36}}{\sqrt{A^2 - 4}}$$

y elevando al cuadrado:

$$\frac{1}{16} = \frac{A^2 - 36}{A^2 - 4}$$

de donde:

$$A = \sqrt{\frac{572}{15}}\ \text{cm} = \boxed{6{,}2\ \text{cm}}$$

Partiendo de la primera de las ecuaciones iniciales tenemos:

$$\omega = \frac{v}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{1\ \text{cm/s}}{\sqrt{(6{,}2\ \text{cm})^2 - (6\ \text{cm})^2}} = \frac{1}{\sqrt{32/15}} = \sqrt{\frac{15}{32}}\ \text{rad/s}$$

Por tanto:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{15/32}}{2\pi}\ \text{Hz} = \boxed{0{,}11\ \text{Hz}}$$

3.70. ***A una partícula de 10 g se la obliga a describir un movimiento vibratorio armónico en el eje de las Y. La amplitud del movimiento es 5 cm y la frecuencia 0,5 s^{-1}. Calcúlese:***

a) La ecuación del movimiento.
b) Los valores de la elongación para los cuales será máxima la velocidad.
c) La máxima velocidad que puede alcanzar la partícula.

Solución:

a) En la ecuación $s = A \text{ sen } 2\pi\nu t$ sustituyamos los datos del problema: $A = 0{,}05$ m y $\nu = 0{,}5\ s^{-1}$. Resulta así:

$$\boxed{\mathbf{s = 0{,}05\ sen\ \pi\ t\ (SI)}}$$

b) Según hemos visto en los problemas anteriores:

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - s^2}$$

Se deduce fácilmente que **la velocidad será máxima en los puntos en que s = 0.**

c) La velocidad máxima valdrá:

$$v_{máx} = \omega \cdot A = 2\pi\nu \cdot A = 2\pi\ \text{rad} \cdot 0{,}5\ s^{-1} \cdot 0{,}05\ \text{m} = \boxed{0{,}05\pi\ \text{m/s}}$$

4. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

FORMULARIO-RESUMEN
COMPOSICIÓN DE DOS MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS Y UNIFORMES DE LA MISMA DIRECCIÓN
$v = v_1 \pm v_2$, $s = (v_1 \pm v_2) \cdot t$ — Signo +: mismo sentido; Signo −: sentidos contrarios
COMPOSICIÓN DE DOS MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS Y UNIFORMES DE DIRECCIONES CUALESQUIERA QUE FORMAN ENTRE SÍ UN ÁNGULO α
$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2\, v_1 \cdot v_2 \cdot \cos \alpha}$
COMPOSICIÓN DE DOS MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS Y UNIFORMEMENTE VARIADOS DE LA MISMA DIRECCIÓN
$s = s_1 \pm s_2 = (s_{o_1} \pm s_{o_2}) + (v_{o_1} \pm v_{o_2}) \cdot t + \frac{1}{2}\,(a_1 \pm a_2) \cdot t^2$
COMPOSICIÓN DE UN MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME Y OTRO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO DE LA MISMA DIRECCIÓN
$s = s_1 + s_2 = (s_{o_1} + s_{o_2}) + (v_{o_1} + v_{o_2}) \cdot t + \frac{1}{2}\, a \cdot t^2$
LANZAMIENTO VERTICAL DE PROYECTILES
$Y_{máx} = \frac{v_o^2}{2g}$
LANZAMIENTO HORIZONTAL DE PROYECTILES
$X_{máx} = v_x \cdot \sqrt{\frac{2Y}{g}}$

LANZAMIENTO OBLICUO DE PROYECTILES (α = **ángulo de elevación)**

Ecuación de la trayectoria: $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \dfrac{g \cdot x^2}{2 v_o^2 \cdot \cos^2 \alpha}$

Altura máxima ($Y_{máx}$): $Y_{máx} = \dfrac{v_o^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$

Alcance final (X): $X = \dfrac{v_o^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$

COMPOSICIÓN DE DOS MOVIMIENTOS VIBRATORIOS ARMÓNICOS SIMPLES DE LA MISMA DIRECCIÓN Y FRECUENCIA

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \cdot \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \cdot \operatorname{sen} \varphi_2}{A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2}$$

COMPOSICIÓN DE DOS MOVIMIENTOS ARMÓNICOS SIMPLES DE LA MISMA FRECUENCIA Y DIRECCIONES PERPENDICULARES

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2\, x \cdot y}{A_1 \cdot A_2} \cos \varphi = \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

Si $\varphi = 2k\pi$, $y = \dfrac{A_2}{A_1} \cdot x$ (recta)

Si $\varphi = (2k + 1)\pi$, $y = -\dfrac{A_2}{A_1} \cdot x$ (recta)

Si $\varphi = \left(2k \pm \dfrac{1}{2}\right)\pi$, $\dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{A_2^2} = 1$ (elipse)

Si $A_1 = A_2$, $x^2 + y^2 = A^2$ (circunferencia)

MOVIMIENTO DE ARRASTRE DE TRASLACIÓN

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_o$$
$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_a$$
$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_a$$

ACELERACIÓN DE CORIOLIS

$$\vec{a}_c = 2\,[\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r]$$

4. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

4.1. ***Cita uno o más ejemplos que pongan de manifiesto el principio de la independencia de movimientos de Galileo.***

Solución: El movimiento de un nadador que atraviesa un río es la combinación del movimiento propio del nadador junto con el de la corriente.

También el movimiento del humo de una chimenea es combinación del movimiento vertical de ascenso del humo con el del aire, que suele ser horizontal, resultando de esta forma un movimiento de ascenso oblicuo.

4.2. ***Si aumenta la velocidad del agua de un río, un nadador ¿tardará más o menos tiempo en cruzarlo?***

Solución:

a) Si el nadador desea tan sólo alcanzar la orilla opuesta, sin importarle el punto de llegada, el tiempo empleado será siempre el mismo, ya que dependerá únicamente de su velocidad, v. Sin embargo, el punto de llegada estará tanto más lejos cuanto mayor sea la velocidad de la corriente del río (fig. 4.1).

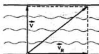


Fig. 4.1

b) Por el contrario, si el nadador desea alcanzar el punto de la orilla opuesta situado enfrente del de partida (fig. 4.2), como para lograrlo tiene que dirigirse oblicuamente contra la corriente, tardará tanto más tiempo cuanto mayor sea la velocidad del río, ya que en el mismo sentido disminuye la componente perpendicular a la orilla de la velocidad del nadador. Por consiguiente, el nadador no podrá alcanzar el punto en cuestión si su velocidad es menor o igual que la de la corriente.

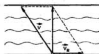


Fig. 4.2

4.3. ***Teniendo en cuenta la resistencia del aire, si lanzamos un cuerpo verticalmente hacia arriba, ¿en qué emplea más tiempo: en subir o en bajar?***

Solución: En el ascenso las dos aceleraciones a que se encuentra sometido el móvil (la de la gravedad y la de la resistencia del aire) son del mismo signo, mientras que al bajar sus signos son opuestos. Por tanto, la aceleración al subir es mayor que al bajar, y el cuerpo empleará más tiempo en bajar que en subir. (Comprobarlo para el siguiente caso: $v_o = 40$ m/s; $g = 10$ m/s^2; a_r (aire) $= 2$ m/s^2).

4.4. ***Una canoa, que vamos a considerar puntual, atraviesa perpendicularmente un río de 100 m de ancho, con una velocidad de 10 m/s. La velocidad de la corriente es de 5 m/s. Calcular:***

a) El tiempo que tardará la canoa en llegar a la orilla opuesta.
b) En qué punto de la orilla opuesta atracará.
c) La velocidad real de la canoa y el espacio recorrido por ella.
d) El espacio recorrido por la canoa en ese tiempo si navegara en el sentido de la corriente.
e) El espacio recorrido si navegara en sentido contrario a la corriente.

Solución:

a) El tiempo que tardará la canoa en cruzar el río es:

$$t = \frac{s_1}{v_1} = \frac{100 \text{ m}}{10 \text{ m/s}} = \boxed{\mathbf{10 \text{ s}}}$$

b) Calculemos ahora el espacio recorrido por la canoa en la dirección de la corriente:

$$s_2 = v_2 \cdot t = 5 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} = \boxed{\mathbf{50 \text{ m}}}$$

c) La velocidad real de la canoa es:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(10 \text{ m/s})^2 + (5 \text{ m/s})^2} = \boxed{\mathbf{11{,}18 \text{ m/s}}}$$

y el espacio recorrido por ella:

$$s = v \cdot t = 11{,}18 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} = \boxed{\mathbf{111{,}8 \text{ m}}}$$

d) Si la canoa navega en el sentido de la corriente:

$$v = v_1 + v_2 = 10 \text{ m/s} + 5 \text{ m/s} = 15 \text{ m/s}$$

y en consecuencia:

$$s = v \cdot t = 15 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} = \boxed{\mathbf{150 \text{ m}}}$$

e) Si, por el contrario, la canoa navegara en sentido opuesto a la corriente:

$$v' = v_1 - v_2 = 10 \text{ m/s} - 5 \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$$

y, por lo tanto:

$$s' = v' \cdot t = 5 \text{ m/s} \cdot 10 \text{ s} = \boxed{\mathbf{50 \text{ m}}}$$

4.5. *El agua discurre por el cauce de un río de 160 m de anchura, con una velocidad de 10 m/s. En dirección perpendicular a una de sus orillas sale una barca con una velocidad de 4 m/s respecto a tierra. Simultáneamente, siguiendo el mismo centro del río y desde un punto situado 1 km aguas abajo del primero, sale otra barca navegando a contracorriente, la cual se cruza con la primera en el punto medio del río, a igual distancia de ambas orillas. Con estos datos se pide calcular:*

a) El tiempo que tardan en cruzarse.
b) El espacio que recorre la segunda barca hasta que se cruza con la primera.
c) La velocidad de la segunda barca respecto al agua.

Solución:

a) El tiempo que tardan ambas barcas en cruzarse (véase fig. 4.3) es igual al que emplea la primera en llegar al centro del río. Este tiempo es:

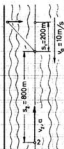


Fig. 4.3

$$t = \frac{80 \text{ m}}{4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = \boxed{20 \text{ s}}$$

b) En ese tiempo de 20 s la primera barca es arrastrada por la corriente a lo largo del río una longitud:

$$s_1 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 20 \text{ s} = 200 \text{ m}$$

Por tanto, el espacio que recorre la segunda barca hasta ese momento es:

$$s_2 = 1\,000 \text{ m} - s_1 = 1\,000 \text{ m} - 200 \text{ m} = \boxed{800 \text{ m}}$$

c) La velocidad de la segunda barca respecto a tierra es:

$$v_{2,t} = \frac{800 \text{ m}}{20 \text{ s}} = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ahora bien, la velocidad de la barca respecto al agua es igual a la velocidad de la barca respecto a tierra menos la velocidad del agua respecto a tierra:

$$v_{2,a} = v_{2,t} - v_{a,t}$$

En el caso del problema, la barca segunda navega a contracorriente, por lo que $v_{2,t}$ y $v_{a,t}$ son de sentido contrario. En consecuencia:

$$v_{2,a} = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} + 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \boxed{\mathbf{50\ m \cdot s^{-1}}}$$

4.6. ***Se lanza verticalmente hacia arriba un móvil con una velocidad inicial de 80 m/s. Considerando g = 10 m/s², ¿qué altura máxima alcanzará y qué tiempo invertirá en alcanzarla?***

Solución: Cuando alcance la altura máxima, v = 0 m/s. Por lo tanto:

$$0 \text{ m/s} = 80 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s}^2 \cdot t$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{t = 8\ s}}$$

El espacio recorrido en ese tiempo será:

$$s = Y_{\text{máx}} = 80 \text{ m/s} \cdot 8 \text{ s} - \frac{1}{2}\ 10 \text{ m/s}^2 \cdot (8 \text{ s})^2 = \boxed{\mathbf{320\ m}}$$

o también:

$$Y_{\text{máx}} = \frac{v_o^2}{2g} = \frac{(80 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2} = \boxed{\mathbf{320\ m}}$$

4.7. ***Se lanza verticalmente una piedra hacia arriba, con una velocidad de 45 m/s.***

a) Expresar su velocidad en km/h.
b) ¿Qué altura alcanzará al cabo de 2 segundos?
c) ¿Qué altura máxima alcanzará?
d) ¿Cuánto tiempo tardará en pasar por un punto situado a 5 m del origen? (Interpretar físicamente los dos resultados obtenidos.)

Solución:

a) $$v = 45\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1\,000 \text{ m}} \cdot \frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = \boxed{\mathbf{162\ km/h}}$$

b) $$h = v_o t + \frac{1}{2}\ gt^2 = 45\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot (-10 \text{ m/s}^2) \cdot (2 \text{ s})^2 = \boxed{\mathbf{70\ m}}$$

c) $$Y_{\text{máx}} = \frac{v_o^2}{2g} = \frac{(45 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2} = \boxed{\mathbf{101{,}25\ m}}$$

d) Como:

$$h = 5 \text{ m y } g = -10 \text{ m/s}^2$$

sustituyendo en la ecuación:

$$h = v_o t + \frac{1}{2} g t^2$$

resulta:

$$5 \text{ m} = 45 \text{ m/s} \cdot t + \frac{1}{2} (-10 \text{ m/s}^2) \cdot t^2$$

de donde:

$$\boxed{t_1 = 0{,}11 \text{ s}}$$

$$\boxed{t_2 = 8{,}9 \text{ s}}$$

Se obtienen dos resultados posibles, porque el móvil pasa dos veces por el mismo punto en tiempos diferentes; una vez al subir y otra al bajar.

4.8. ***Desde un punto situado a 10 m sobre el suelo se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de 30 m/s. ¿Qué altura alcanzará? ¿Con qué velocidad llegará al suelo?***

Solución: Calcularemos, primero, el tiempo que tardará la piedra en alcanzar la máxima altura. Sabemos que cuando el móvil alcanza la altura máxima su velocidad se anula. Por tanto:

$$0 = 30 \text{ m/s} + (-10 \text{ m/s}^2) \cdot t$$

de donde: $t = 3$ s.

Sustituyendo este dato en la ecuación del espacio:

$$h = h_o + v_o t + \frac{1}{2} g t^2$$

resulta:

$$h = 10 \text{ m} + 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3 \text{ s} + \frac{1}{2} (-10 \text{ m/s}^2) \cdot (3 \text{ s})^2 = \boxed{55 \text{ m}}$$

O también:

$$Y_{máx} = \frac{v_o^2}{2g} = \frac{(30 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2} = 45 \text{ m}$$

El móvil alcanza una altura de 45 m sobre el punto de lanzamiento; pero como este punto está situado a 10 m sobre el suelo, la altura sobre el suelo que alcanza la piedra será:

$$h = 45 \text{ m} + 10 \text{ m} = \boxed{55 \text{ m}}$$

La velocidad con que la piedra llega al suelo se calcula fácilmente aplicando la ecuación:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Por tanto:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 55 \text{ m}} = \boxed{33{,}2 \text{ m/s}}$$

4.9. ***Desde 20 m de altura se dispara horizontalmente un proyectil con una velocidad de 600 m/s. Calcular:***

a) El tiempo que tardará en caer al suelo.
b) El alcance del disparo.
c) La velocidad del proyectil en el instante de llegar al suelo.

Solución:

a) $$t = \sqrt{\frac{2\,Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} = \boxed{2 \text{ s}}$$

b) $$X_{máx} = v_x \cdot t = 600 \text{ m/s} \cdot 2 \text{ s} = \boxed{1\,200 \text{ m}}$$

c) Como $v_x = 600$ m/s y $v_y = g \cdot t = 10 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ s} = 20$ m/s, la velocidad resultante será:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(600 \text{ m/s})^2 + (20 \text{ m/s})^2} = \boxed{600{,}33 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

4.10. ***Desde un punto situado a 100 m sobre el suelo se dispara horizontalmente un proyectil con una velocidad de 400 m/s. ¿Cuánto tiempo tardará en caer? ¿Cuál será su alcance? ¿Con qué velocidad llegará al suelo?***

Solución: El tiempo que tarda el móvil en llegar al suelo es:

$$t = \sqrt{\frac{2\,Y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} = \boxed{4{,}47 \text{ s}}$$

El movimiento de avance es un movimiento rectilíneo y uniforme. El tiempo de avance es el mismo que el de caída. Por tanto:

$$X = v_x \cdot t = 400 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4{,}47 \text{ s} = \boxed{1\,789 \text{ m}}$$

La velocidad con que el proyectil llega al suelo es la resultante vectorial de la velocidad horizontal de avance: $v_x = 400$ m/s, y de la velocidad vertical hacia abajo que adquiere en la caída, que en el momento de llegar al suelo será:

$$v_y = gt = 10 \text{ m/s}^2 \cdot 4{,}47 \text{ s} = 44{,}7 \text{ m/s}$$

Por tanto, la velocidad con que el proyectil llega al suelo es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(400 \text{ m/s})^2 + (44{,}7 \text{ m/s})^2} = \boxed{402{,}5 \text{ m/s}}$$

4.11. ***Un avión que vuela a una altura de 2 km lleva una velocidad de 100 m/s. ¿A qué distancia horizontal del blanco debe soltar una bomba para que explosione exactamente en ese punto?***

Solución: Esta distancia es, precisamente, el alcance; hay que tener en cuenta que la velocidad horizontal de la bomba es igual a la velocidad de avance del avión. Por consiguiente:

$$X = v_x \cdot \sqrt{\frac{2\,Y}{g}} = 100\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 2\,000 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} = \boxed{2\,000 \text{ m}}$$

4.12. ***(*) A una altura h del suelo se lanzan simultáneamente dos bolas con la misma velocidad, una verticalmente hacia arriba y la otra verticalmente hacia abajo. La primera bola llega al suelo 5 segundos más tarde que la segunda.***

¿Con qué velocidad fueron lanzadas las bolas?

Dato: $g = 9{,}8$ m · s^{-2}.

Solución: Suponiendo nulo el rozamiento contra el aire, resulta evidente que las dos bolas emplearán el mismo tiempo en recorrer la distancia h. En consecuencia, los 5 segundos de diferencia en sus llegadas al suelo se deberán al tiempo que invierte la bola que se lanza hacia arriba en subir y bajar la altura h' (véase fig. 4.4).

Considerando tan sólo esta bola y tomando como nivel de referencia el punto de lanzamiento, cuando vuelva a pasar por este punto (h = 0) habrán transcurrido 5 s.

Por consiguiente:

$$0 = v_o \cdot 5 \text{ s} + \frac{1}{2}\ (-9{,}8 \text{ m/s}^2) \cdot (5 \text{ s})^2$$

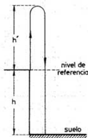


Fig. 4.4

de donde:

$$v_o = \frac{9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 25 \text{ s}^2}{2 \cdot 5 \text{ s}} = \boxed{24{,}5 \text{ m/s}}$$

4.13. ***(*) Un bombardero que vuela horizontalmente suelta 3 bombas con intervalos de 1 segundo. ¿Cuál es la distancia vertical entre la primera y la segunda, y entre la segunda y la tercera?:***

a) ***En el instante en que se deja caer la tercera.***
b) ***Después de que la primera ha descendido 200 m.***

Despreciar la resistencia del aire.

Solución:

a) En el instante en que el bombardero deja caer la tercera bomba habrán transcurrido 2 s y 1 s, respectivamente, desde el lanzamiento de la primera y de la segunda bomba. Las distancias verticales recorridas por cada una de ellas hasta ese momento son:

$$h_1 = \frac{1}{2}\ g \cdot t_1^2 = \frac{1}{2}\ 9{,}8\ m/s^2 \cdot (2\ s)^2 = 19{,}6\ m$$

$$h_2 = \frac{1}{2}\ g \cdot t_2^2 = \frac{1}{2}\ 9{,}8\ m/s^2 \cdot (1\ s)^2 = 4{,}9\ m$$

$$h_3 = 0$$

Por lo tanto, la distancia vertical entre la primera y la segunda será:

$$h_1 - h_2 = 19{,}6\ m - 4{,}9\ m = \boxed{\mathbf{14{,}7\ m}}$$

y entre la segunda y la tercera:

$$h_2 - h_3 = 4{,}9\ m - 0\ m = \boxed{\mathbf{4{,}9\ m}}$$

b) En descender 200 m la primera bomba invierte un tiempo:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200\ m}{9{,}8\ m/s^2}} = 6{,}389\ s$$

La segunda bomba habrá estado cayendo durante un tiempo:

$$t_2 = t_1 - 1\ s = 6{,}389\ s - 1\ s = 5{,}389\ s$$

descendiendo una altura:

$$h_2 = \frac{1}{2}\ g \cdot t_2^2 = \frac{1}{2}\ 9{,}8\ m/s^2 \cdot (5{,}389\ s)^2 = 142{,}3\ m$$

Efectuando cálculos idénticos para la bomba tercera, tenemos:

$$t_3 = t_2 - 1\ s = 5{,}389\ s - 1\ s = 4{,}389\ s$$

$$h_3 = \frac{1}{2}\ g \cdot t_3^2 = \frac{1}{2}\ 9{,}8\ m/s^2 \cdot (4{,}389\ s)^2 = 94{,}4\ m$$

Por lo tanto, la distancia vertical entre la primera bomba y la segunda será:

$$h_1 - h_2 = 200 \text{ m} - 142{,}3 \text{ m} = \boxed{57{,}7 \text{ m}}$$

y entre la segunda y la tercera:

$$h_2 - h_3 = 142{,}3 \text{ m} - 94{,}4 \text{ m} = \boxed{47{,}9 \text{ m}}$$

4.14. ***Se dispara un proyectil con una velocidad de 200 m/s, formando un ángulo de 30° con la horizontal. Calcular:***

a) ***Componentes rectangulares de la velocidad en el instante de la salida.***
b) ***Tiempo que tarda en alcanzar la máxima altura.***
c) ***Altura máxima alcanzada.***
d) ***Alcance del proyectil.***

Solución:

a) $$v_{ox} = v_o \cdot \cos 30° = 200 \text{ m/s} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{100\sqrt{3} \text{ m/s}}$$

$$v_{oy} = v_o \cdot \text{sen } 30° = 200 \text{ m/s} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{100 \text{ m/s}}$$

b) La máxima altura se alcanza cuando la componente vertical de la velocidad se hace cero:

$$t_{Y_{máx}} = \frac{v_o \cdot \text{sen } \alpha}{g} = \frac{200 \text{ m/s} \cdot 1/2}{10 \text{ m/s}^2} = \boxed{10 \text{ s}}$$

c) Aplicando la ecuación del desplazamiento vertical:

$$Y_{máx} = \frac{v_o^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha}{2g} = \frac{(200 \text{ m/s})^2 \cdot 1/4}{10 \text{ m/s}^2} = \boxed{500 \text{ m}}$$

d) El tiempo de avance será el doble del invertido en alcanzar la altura máxima:

$$t_{av} = 2 \cdot 10 \text{ s} = 20 \text{ s}$$

y, aplicando la ecuación del desplazamiento horizontal:

$$X = 100\sqrt{3} \text{ m/s} \cdot 20 \text{ s} = \boxed{2\,000\sqrt{3} \text{ m}}$$

o también, aplicando la fórmula del alcance final:

$$X = \frac{v_o^2 \cdot \text{sen } 2\alpha}{g} = \frac{(200 \text{ m/s})^2 \cdot \sqrt{3}/2}{10 \text{ m/s}^2} = \boxed{2\,000\sqrt{3} \text{ m}}$$

4.15. ***Se dispara un proyectil con una velocidad de 600 m/s, formando un ángulo de 60° con la horizontal.***

a) ¿Qué altura máxima alcanzará?
b) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzarla?
c) ¿Qué velocidad tendrá en dicho punto?

Solución: La velocidad de salida se descompone en dos componentes: una horizontal, de avance, que es constante, y otra vertical, de subida, afectada por la aceleración debida a la gravedad.

Estas componentes valdrán:

$$v_{ox} = v_o \cdot \cos \alpha = 600 \text{ m/s} \cdot 1/2 = 300 \text{ m/s}$$

$$v_{oy} = v_o \cdot \text{sen } \alpha = 600 \text{ m/s} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 300\sqrt{3} \text{ m/s}$$

a) y b) En la máxima altura se anula la componente vertical de la velocidad:

$$v_y = v_{oy} - gt = 300\sqrt{3}\ \frac{m}{s} - 10\ \frac{m}{s^2} \cdot t$$

Por tanto:

$$0 = 300\sqrt{3} - 10\ t$$

de donde:

$$\boxed{t = 30\sqrt{3}\ s}$$

La altura máxima vendrá dada por:

$$Y_{máx} = v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2}\ gt^2 = 300\sqrt{3}\ \frac{m}{s} \cdot 30\sqrt{3}\ s - \frac{1}{2}\ 10\ \frac{m}{s^2} \cdot (30\sqrt{3}\ s)^2 = 27\ 000\ m - 13\ 500\ m = \boxed{13\ 500\ m}$$

O también:

$$Y_{máx} = \frac{v_o^2 \cdot \text{sen}^2\ \alpha}{2g} = \frac{(600\ m/s)^2 \cdot (\sqrt{3}/2)^2}{2 \cdot 10\ m/s^2} = \boxed{13\ 500\ m}$$

c) La velocidad en la posición de máxima altura es la componente horizontal de la velocidad inicial de lanzamiento, puesto que la componente vertical es nula.

Esta velocidad es, como se calculó antes:

$$\boxed{v = 300\ m/s}$$

4.16. *(*) El movimiento plano de un punto material pesado se refiere a unos ejes cartesianos, de manera que el eje OX es horizontal y OY es vertical, siendo el sentido del semieje positivo hacia arriba.*

La velocidad inicial es $v_o = 100\ m \cdot s^{-1}$ y forma un ángulo $\pi/4$ con el semieje de abscisas positivo. Tómese $g = 10\ m \cdot s^{-2}$. Hallar la ecuación de la curva descrita por el punto material.

Solución: Se trata de un cuerpo lanzado oblicuamente con respecto a la horizontal (véase fig. 4.5). Las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial son:

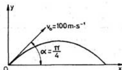


Fig. 4.5

$$v_{ox} = v_o \cdot \cos \alpha = v_o \cdot \cos \pi/4$$
$$v_{oy} = v_o \cdot \operatorname{sen} \alpha = v_o \cdot \operatorname{sen} \pi/4$$

El movimiento del punto material se puede considerar como el resultado de la composición de dos movimientos rectilíneos perpendiculares: uno horizontal uniforme con velocidad constante $v_x = v_{ox} = v_o \cdot \cos \pi/4$, y otro vertical uniformemente retardado, debido a la aceleración de la gravedad, variando la velocidad con el tiempo de acuerdo con la expresión:

$$v_y = v_{oy} - gt = v_o \cdot \operatorname{sen} \pi/4 - gt$$

Al cabo de un tiempo t después del lanzamiento las coordenadas *x, y* de la posición del punto material serán:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_{ox} \cdot t = v_o \cdot \cos \pi/4 \cdot t \\ y &= v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2}\, gt^2 = v_o \cdot \operatorname{sen} \pi/4 \cdot t - \frac{1}{2}\, gt^2 \end{aligned}\right\}$$

Si eliminamos el tiempo entre estas dos expresiones, se obtiene la ecuación de la trayectoria:

$$y = v_o \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x}{v_o \cdot \cos \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\, g\, \frac{x^2}{v_o^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4}} =$$
$$= x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{gx^2}{2v_o^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4}}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior los valores de v_o, g, sen $\frac{\pi}{4}$ y cos $\frac{\pi}{4}$, obtenemos la ecuación de la curva descrita por el punto material:

$$\boxed{y = x - 10^{-3}\,x^2 \text{ (SI)}}$$

que corresponde a una parábola con el eje de simetría paralelo al eje de ordenadas y la concavidad dirigida hacia abajo.

4.17. ***Un artillero situado al nivel del mar desea que su disparo, efectuado con un ángulo de elevación de 45°, rebase justamente la cumbre de una colina de 350 m de altura. Determinar la velocidad mínima necesaria para ello, sabiendo que la distancia horizontal entre la cumbre de la colina y el artillero es de 1 500 m.***

Solución: Se trata del lanzamiento oblicuo de un proyectil, cuya trayectoria viene dada por la ecuación:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_o^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

Si consideramos como origen de coordenadas el punto de lanzamiento, donde se encuentra situado el artillero, la cumbre de la colina corresponde al punto (1 500, 350). Sustituyendo estos valores en la ecuación de la trayectoria, tenemos:

$$350 \text{ m} = 1\,500 \text{ m} - \frac{10 \text{ m/s}^2 \cdot (1\,500 \text{ m})^2}{2v_o^2 \cdot \frac{1}{2}}$$

de donde:

$$\boxed{v_o = 140 \text{ m/s}}$$

4.18. ***¿A qué llamamos parábola de seguridad?***

Solución: Es la curva envolvente de todas las posibles trayectorias seguidas por un proyectil disparado oblicua u horizontalmente con distinto ángulo y velocidad constante. Fuera de ella existe la completa seguridad de que ningún punto es alcanzado por el proyectil.

4.19. *(*) Un proyectil disparado formando un ángulo de 53° por encima de la horizontal alcanza un edificio alejado 43,2 m en un punto que se encuentra 13,5 m por encima del punto de proyección.*

a) Calcular la velocidad del disparo.
b) Calcular el valor y el sentido de la velocidad del proyectil cuando golpea el edificio.
c) Hallar el tiempo de vuelo.

Solución:

a) Considerando como origen de coordenadas el punto de lanzamiento del proyectil, el punto de impacto sobre el edificio tendrá de coordenadas (43,2, 13,5), las cuales han de satisfacer la ecuación de la trayectoria:

$$y = x \cdot \text{tg } 53° - \frac{g \cdot x^2}{2\, v_o^2 \cdot \cos^2 53°}$$

Sustituyendo, resulta:

$$13{,}5 \text{ m} = 43{,}2 \text{ m} \cdot 1{,}327 - \frac{9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot (43{,}2 \text{ m})^2}{2\, v_o^2 \cdot 0{,}3622}$$

de donde:

$$\boxed{v_o \simeq 24 \text{ m/s}}$$

b) y c) La componente horizontal de la velocidad del proyectil cuando golpea el edificio es la misma que la inicial:

$$v_x = v_{ox} = v_o \cdot \cos 53° = 14{,}4 \text{ m/s}$$

El tiempo de vuelo del proyectil se calcula fácilmente teniendo en cuenta que su movimiento horizontal es uniforme:

$$t = \frac{x}{v_x} = \frac{43{,}2 \text{ m}}{14{,}4 \text{ m/s}} = \boxed{3 \text{ s}}$$

Hallemos, por último, la componente vertical de la velocidad en el punto de impacto:

$$v_y = v_o \cdot \text{sen } 53° - gt = 24 \text{ m/s} \cdot 0{,}7986 - 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \text{ s} = -10{,}2 \text{ m/s}$$

Por tanto, el módulo de la velocidad es (fig. 4.6):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(14{,}4 \text{ m/s})^2 + (-10{,}2 \text{ m/s})^2} = \boxed{17{,}65 \text{ m/s}}$$

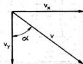


Fig. 4.6

formando con la pared un ángulo:

$$\alpha = \text{áng tg } \frac{14,4}{10,2} = \boxed{54,7^\circ}$$

4.20. ***En el partido de fútbol Atlético de Madrid-Sporting de Gijón, celebrado el día 20 de noviembre de 1988, Joaquín lanzó una volea con un ángulo de 30° y una velocidad de 108 km/h. Kevin Moran, que estaba a 50 m del punto de lanzamiento en la dirección de avance horizontal del balón, salió corriendo con la intención de alcanzarlo en el mismo instante de su llegada al suelo, lo que, efectivamente, consiguió. ¿Cuál fue la celeridad de Moran, supuesta constante? Considérese nula la resistencia del aire.***

Solución: Expresemos, en primer lugar, la velocidad del lanzamiento en unidades internacionales: 108 km/h = 30 m/s.

El alcance de la volea es:

$$X = \frac{v_o^2 \cdot \text{sen } 2\,\alpha}{g} = \frac{(30 \text{ m/s})^2 \cdot \sqrt{3}/2}{10 \text{ m/s}^2} = 77,9 \text{ m}$$

y el tiempo que el balón permanece en el aire:

$$t_{avance} = \frac{2\,v_o \cdot \text{sen } \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 30 \text{ m/s} \cdot 1/2}{10 \text{ m/s}^2} = 3 \text{ s}$$

En este tiempo Moran tiene que recorrer la distancia PA (véase fig. 4.7):

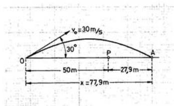


Fig. 4.7

$$PA = 77,9 \text{ m} - 50 \text{ m} = 27,9 \text{ m}$$

Por tanto, su celeridad será:

$$v = \frac{27,9 \text{ m}}{3 \text{ s}} = \boxed{9,3 \text{ m/s}}$$

4.21. ***Sucedió en un partido de fútbol jugado recientemente por la selección española. Sacaba Zubizarreta de puerta y soplaba el viento horizontalmente a su favor con una fuerza F. Llamemos P al peso del balón. ¿Con qué ángulo debía Zubizarreta efectuar su saque, si deseaba que la altura máxima a la que se elevase el balón fuese igual a la mitad del alcance del lanzamiento?***

Solución: Llamemos α al ángulo de lanzamiento y v_o a la velocidad inicial del saque. Las componentes horizontal y vertical de esta velocidad son:

$$v_{ox} = v_o \cdot \cos \alpha$$
$$v_{oy} = v_o \cdot \text{sen } \alpha$$

El movimiento del balón se puede considerar como el résultado de la composición de dos movimientos rectilíneos perpendiculares, ambos uniformemente variados: uno horizontal uniformemente acelerado debido a la fuerza del viento, que comunica al balón una aceleración $a = \frac{F}{P} \cdot g$, y otro vertical uniformemente retardado a causa de la aceleración de la gravedad. Como consecuencia de esta composición de movimientos, las componentes horizontal y vertical de la velocidad del balón al cabo de un tiempo t son:

$$v_x = v_o \cdot \cos \alpha + \frac{F}{P} gt \qquad [1]$$

$$v_y = v_o \cdot \text{sen } \alpha - gt \qquad [2]$$

En ese momento las coordenadas *x, y* de la posición del balón serán:

$$x = v_o \cdot \cos \alpha \cdot t + \frac{g}{2} \frac{F}{P} t^2 \qquad [3]$$

$$y = v_o \cdot \text{sen } \alpha \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 \qquad [4]$$

Cuando el balón alcance el punto más alto de su trayectoria, $v_y = 0$; por tanto, de acuerdo con [2], el tiempo que en ello emplea será:

$$t = \frac{v_o \cdot \text{sen } \alpha}{g} \qquad [5]$$

La altura máxima alcanzada por el balón se obtiene sustituyendo en [4] el valor del tiempo que figura en la ecuación [5]. Se llega de esta forma a:

$$y = v_o \cdot \text{sen } \alpha \cdot \frac{v_o \cdot \text{sen } \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_o \cdot \text{sen } \alpha}{g} \right)^2 = \frac{v_o^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha}{2g} \qquad [6]$$

El tiempo total de permanencia del balón en el aire es el doble del tiempo de ascenso:

$$t' = \frac{2\, v_o \cdot \text{sen } \alpha}{g}$$

Por consiguiente, el alcance del balón será:

$$x = v_o \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2\, v_o \cdot \operatorname{sen} \alpha}{g} + \frac{g}{2} \cdot \frac{F}{P} \cdot \left(\frac{2\, v_o \cdot \operatorname{sen} \alpha}{g} \right)^2 =$$

$$= \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} + \frac{2F}{P} \cdot \frac{v_o^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}{g} = \frac{v_o^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \cdot \left(1 + \frac{F}{P} \operatorname{tg} \alpha \right)$$

Como, de acuerdo con el enunciado del problema, el saque de Zubizarreta tiene que cumplir la condición: $x = 2y$, tenemos:

$$\frac{v_o^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \left(1 + \frac{F}{P} \operatorname{tg} \alpha \right) = 2 \cdot \frac{v_o^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$$

Operando matemáticamente con esta ecuación trigonométrica, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$, llegamos a la conclusión final:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{2P}{P - 2F}}$$

4.22. ***Desde un punto A de un plano inclinado 45° con respecto a la horizontal se lanza verticalmente hacia arriba una pelota de goma perfectamente elástica, la cual, tras alcanzar una altura de 40 m, inicia su descenso, chocando elásticamente contra el mismo punto A. Después del rebote la pelota vuelve a chocar con el plano en otro punto B. Calcular la distancia AB.***

Solución: La velocidad de la pelota en el instante mismo del primer choque es:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 40 \text{ m}} = 28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

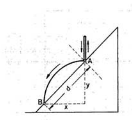


Fig. 4.8

Tras el choque elástico y oblicuo con el plano (véase fig. 4.8), la pelota sale rebotada en dirección horizontal con una velocidad de $28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, describiendo una trayectoria parabólica dada por la ecuación:

$$x = v \cdot \sqrt{\frac{2\,y}{g}} = 28 \sqrt{\frac{2\,y}{g}} \qquad [1]$$

El punto B será el de intersección de esta parábola con la recta $y = x$, que define el perfil del plano:

$$y = x \qquad [2]$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones [1] y [2], obtenemos:

$$x = y = 160 \text{ m}$$

En la figura 4.8 se aprecia claramente que:

$$d = \overline{AB} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(160 \text{ m})^2 + (160 \text{ m})^2} = \boxed{\mathbf{160\sqrt{2}\ m}}$$

4.23. ***En el mismo instante en que una partícula que se mueve en el plano XY pasa por el origen de coordenadas, animada de una velocidad v_o en el sentido positivo del eje OY, se le comunican dos aceleraciones constantes y de igual módulo «a», una dirigida en el sentido positivo del eje OX y la otra en el sentido negativo del eje OY. Hallar:***

a) ***La ecuación de la trayectoria descrita por la partícula.***
b) ***El punto del plano XY en el que la velocidad de la partícula es mínima.***

Solución:

a) El movimiento de la partícula se puede considerar como el resultado de la composición de dos movimientos rectilíneos perpendiculares. Según el eje OX el movimiento es uniformemente acelerado y sin velocidad inicial, mientras que en la dirección del eje OY es uniformemente retardado con velocidad inicial v_o.

Por tanto, al cabo de un tiempo t las coordenadas que definen la posición de la partícula son:

$$x = \frac{1}{2}\,at^2$$

$$y = v_o t - \frac{1}{2}\,at^2$$

La ecuación de la trayectoria la obtenemos eliminando t entre ambas ecuaciones:

$$x = \frac{1}{2}\,a\,\frac{(x+y)^2}{v_o^2} \quad ; \quad \boxed{\mathbf{x^2 + y^2 + 2\,xy - 2\,\frac{v_o^2}{a}\,x = 0}}$$

b) Ya que las componentes de la velocidad de la partícula en las direcciones de ambos ejes son:

$$v_x = at$$
$$v_y = v_o - at$$

el módulo de la velocidad en todo momento será:

$$v = \sqrt{v_o^2 + 2\,a^2t^2 - 2\,v_o at}$$

Para hallar la velocidad mínima tendremos que derivar la expresión anterior con respecto al tiempo, e igualar a cero esta primera derivada:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2\,a^2t - v_o \cdot a}{v} = 0$$

de donde:

$$t = \frac{v_o}{2a}$$

La partícula adquirirá su velocidad mínima al cabo de un tiempo $t = \frac{v_o}{2a}$. Puede comprobarse que esta velocidad es mínima y no máxima, hallando la derivada segunda $\frac{d^2v}{dt^2}$ y viendo cómo para $t = \frac{v_o}{2a}$ toma valor positivo.

Las coordenadas del punto en que la velocidad de la partícula es mínima son:

$$x = \frac{1}{2}\,at^2 = \frac{1}{2}\,a\left(\frac{v_o}{2a}\right)^2 = \frac{v_o^2}{8a}$$

$$y = v_o t - \frac{1}{2}\,at^2 = v_o \cdot \frac{v_o}{2a} - \frac{1}{2}\,a\left(\frac{v_o}{2a}\right)^2 = \frac{3v_o^2}{8a}$$

El punto del plano XY en que la velocidad de la partícula es mínima es:

$$\boxed{\left(\frac{v_o^2}{8a},\ \frac{3v_o^2}{8a}\right)}$$

4.24. *Al componerse dos movimientos armónicos simples perpendiculares entre sí, de la misma amplitud y período y con una diferencia de fase de $2\pi/3$, ¿cuál es la ecuación de la curva de Lissajous obtenida?*

Solución: Las ecuaciones de ambos movimientos serán:

$$x = A \text{ sen } 2\pi\nu t$$

$$y = A \text{ sen } \left[2\pi\nu t + \frac{2\pi}{3}\right]$$

Vamos a eliminar el tiempo entre esas dos ecuaciones. Para ello hemos de tener en cuenta que:

$$\text{sen } 2\pi\nu t = \frac{x}{A}$$

$$\cos 2\pi\nu t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

y como:

$$y = A \left[\text{sen } 2\pi\nu t \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + \cos 2\pi\nu t \cdot \text{sen } \frac{2\pi}{3} \right]$$

resulta, por sustitución:

$$y = A \left[\frac{x}{A} \cdot \left(- \frac{1}{2} \right) + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] =$$

$$= - \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

Elevando al cuadrado y sustituyendo, se obtiene finalmente:

$$\boxed{\mathbf{4x^2 + 4y^2 + 4xy - 3A^2 = 0 \text{ (una elipse)}}}$$

4.25. ***Una masa puntual está sometida simultáneamente a dos movimientos armónicos simples sobre los ejes OX y OY de igual frecuencia $\nu = 0{,}5$ ciclos/s, y cuyas ecuaciones respectivas son:***

$$\left. \begin{aligned} x &= 4 \text{ sen } \omega t \\ y &= 6 \text{ sen } \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned} \right\} \text{(SI)}$$

Calcular la velocidad de la masa puntual al cabo de 2 segundos de iniciado el movimiento.

Solución: El vector posición de la masa puntual en todo momento es:

$$\vec{r} = x \, \vec{i} + y \, \vec{j} = 4 \text{ sen } \omega \, t \, \vec{i} + 6 \text{ sen } \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) \vec{j} \text{ (SI)}$$

Por tanto, su velocidad valdrá:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4 \, \omega \cos \omega t \, \vec{i} + 6 \, \omega \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) \vec{j} =$$

$$= 4 \cdot 2\pi\nu \cdot \cos 2\pi\nu t \, \vec{i} + 6 \cdot 2\pi\nu \cdot \cos \left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3} \right) \vec{j} =$$

$$= 4\pi \cdot \cos \pi t \, \vec{i} + 6\pi \cdot \cos \left(\pi t + \frac{\pi}{3} \right) \vec{j} \text{ (SI)}$$

Al cabo de 2 s:

$$\vec{v}_{2s} = 4\pi \cdot \cos 2\pi \, \vec{i} + 6\pi \cdot \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \vec{j} = 4\pi \, \vec{i} + 3\pi \, \vec{j} \text{ (SI)}$$

Por tanto, la velocidad de la masa puntual 2 segundos después de iniciado el movimiento es:

$$v_{2s} = \sqrt{(4\pi)^2 + (3\pi)^2} = \boxed{5\pi \text{ m/s}}$$

4.26. ***¿Sabrías citar algún ejemplo que ponga de manifiesto el principio de la relatividad de Galileo?***

Solución: Si en el interior de un vagón que se desplaza con velocidad constante sobre una vía rectilínea dejamos caer un objeto cualquiera, éste cae justamente siguiendo la vertical del punto de lanzamiento.

En un barco con movimiento no acelerado se puede jugar al billar, ping-pong, etc., exactamente igual que en tierra firme.

Quizá la demostración más palpable del principio de la relatividad de Galileo radique en el hecho, claramente constatado, de que cuando viajamos en un tren, coche, autobús, etc., animado de movimiento rectilíneo uniforme, nos parece que es el paisaje el que se mueve, y no el vehículo.

4.27. ***¿Puede originar vértigo viajar en línea recta a velocidad muy elevada?***

Solución: No; un vehículo moviéndose en línea recta y a velocidad constante es un sistema inercial, y en su interior los pasajeros experimentarán las mismas sensaciones que en tierra firme. Lo que sí puede originar vértigo son las aceleraciones: despegue y aterrizaje de un avión, cambios de dirección o de altura, etc.

4.28. ***Un barco efectúa el servicio de pasajeros entre dos ciudades A y B, situadas en la misma ribera de un río y separadas por una distancia de 75 km. Se supone que la velocidad propia del barco y la de la corriente del río son constantes. Si en ir de A a B tarda 3 horas y en volver de B a A tarda 5 horas, deducir la velocidad del barco y la de la corriente.***

Solución: La velocidad media real del barco en la ida es:

$$\frac{75 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 25 \text{ km/h}$$

y equivale a la suma de la velocidad del barco, v, más la velocidad de arrastre de la corriente, v'. En el retorno la velocidad media es:

$$\frac{75 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 15 \text{ km/h}$$

que equivale a la diferencia entre la velocidad propia del barco menos la de arrastre. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} v + v' = 25 \text{ km/h} \\ v - v' = 15 \text{ km/h} \end{array}\right\}$$

de donde:

v (velocidad del barco) = 20 km/h
v′ (velocidad de arrastre de la corriente) = 5 km/h

4.29. *Expone George Gamow (1904-1968) en su libro «Biography of Physics» (Biografía de la Física) el siguiente problema:*

«Un hombre en un bote navega corriente arriba por un río y lleva una botella medio vacía de whisky sobre la popa del bote. Mientras el bote pasa bajo un puente, una ola reflejada en los pilares del puente choca contra la embarcación y la botella cae al agua, sin que el tripulante se dé cuenta. Durante 20 minutos el bote continúa aguas arriba, mientras que la botella flota aguas abajo. Al cabo de los 20 minutos el hombre ve que la botella ha desaparecido, vuelve el bote (prescindamos del tiempo empleado en la maniobra) y se mueve aguas abajo con la misma velocidad que antes respecto al agua. Coge la botella una milla más abajo del puente. La pregunta es: ¿cuál es la velocidad del río?»

Solución: La resolución del problema es sencilla si se toma como referencia el agua del río, con respecto a la cual la botella permanece en reposo.

El tiempo que invierte el hombre en recuperar la botella es 40 minutos (20 minutos aguas arriba y otros 20 hacia abajo), durante los cuales el puente y las orillas se han desplazado 1 milla respecto al agua. Por tanto, la velocidad del río es:

$$v = \frac{1 \text{ milla}}{40 \text{ minutos}} \cdot \frac{60 \text{ minutos}}{1 \text{ hora}} = \boxed{\textbf{1,5 millas/hora}}$$

4.30. ***Por una carretera horizontal circula un camión a la velocidad de 72 km/h. Detrás y a la misma velocidad va un automóvil cuyo conductor no se decide a adelantar al camión, porque observa una piedra encajada entre dos de las ruedas traseras de éste y teme que si la piedra se desprende alcance su vehículo. ¿A qué distancia mínima del camión ha de ir el automóvil para tener la completa seguridad de que la piedra no lo alcanzará?***

Solución: Este problema se puede resolver de una manera muy simple utilizando un sistema de referencia ligado a los dos móviles. Como el movimiento de ambos es rectilíneo y uniforme, se trata de un sistema de referencia inercial, en el que el automóvil y el camión están en reposo el uno respecto al otro, girando sus ruedas mientras que la carretera se mueve hacia atrás con la velocidad constante v = 72 km/h = 20 m/s. Los puntos de la periferia de las ruedas de ambos vehículos, así como la piedra, tendrán también una velocidad lineal de 20 m/s. El alcance máximo de la piedra tendrá lugar (recuérdese la teoría del lanzamiento oblicuo de proyectiles), si ésta se despren-

de en el mismo momento en que el vector representativo de su velocidad forma un ángulo de 45° por encima de la horizontal. De acuerdo con ello:

$$X = \frac{v_o^2 \cdot \text{sen } 2\alpha}{g} = \frac{(20 \text{ m/s})^2 \cdot 1}{10 \text{ m/s}^2} = 40 \text{ m}$$

Evidentemente, despreciamos el hecho de que la piedra en el momento en que se desprende de la rueda se encuentra a una cierta altura por encima de la carretera.

El automóvil ha de ir, como mínimo, a una distancia de 40 m del camión.

5. ESTÁTICA

FORMULARIO-RESUMEN

Ley de Hooke:

$$F = k \cdot \Delta l \quad \begin{cases} F = \text{fuerza deformadora} \\ k = \text{constante elástica} \\ \Delta l = \text{deformación producida} \end{cases}$$

Resultante de dos fuerzas recurrentes:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1 \cdot F_2 \cos \alpha}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{— Si } \alpha = 90^\circ, & R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \\ \text{— Si } \alpha = 0^\circ, & R = F_1 + F_2 \\ \text{— Si } \alpha = 180^\circ, & R = F_1 - F_2 \end{array}\right\} (\alpha = \text{ángulo que forman } F_1 \text{ y } F_2)$$

Momento, $\vec{M}_o$, de una fuerza, $\vec{F}$, respecto a un punto:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

($\vec{r}$ = vector de posición con respecto a dicho punto del punto de aplicación de la fuerza).

Momento, $\vec{M}$, de un par de fuerzas:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

($\vec{F}$ = una cualquiera de las fuerzas; $\vec{r}$ = vector desplazamiento entre los puntos de aplicación de las dos fuerzas).

Condiciones de equilibrio de un sólido:

$$\Sigma\,\vec{F}_i = 0;\ \Sigma\,\vec{M}_i = 0$$

COORDENADAS DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO				
				$\vec{r}_o = \dfrac{\Sigma\, p_i \cdot \vec{r}_i}{\Sigma\, p_i}$; $x_o = \dfrac{\Sigma\, p_i \cdot x_i}{\Sigma\, p_i}$; $y_o = \dfrac{\Sigma\, p_i \cdot y_i}{\Sigma\, p_i}$; $z_o = \dfrac{\Sigma\, p_i \cdot z_i}{\Sigma\, p_i}$
Si g es constante				$\vec{r}_o = \dfrac{\Sigma\, m_i \cdot \vec{r}_i}{M}$; $x_o = \dfrac{\Sigma\, m_i \cdot x_i}{M}$; $y_o = \dfrac{\Sigma\, m_i \cdot y_i}{M}$; $z_o = \dfrac{\Sigma\, m_i \cdot z_i}{M}$
	Si el cuerpo es continuo			$\vec{r}_o = \dfrac{1}{M}\int \vec{r} \cdot \rho \cdot dV$; $x_o = \dfrac{1}{M}\int x \cdot \rho \cdot dV$; $y_o = \dfrac{1}{M}\int y \cdot \rho \cdot dV$; $z_o = \dfrac{1}{M}\int z \cdot \rho \cdot dV$
		Si es homogéneo	Cúbico	$x_o = \dfrac{1}{V}\int x \cdot dV$; $y_o = \dfrac{1}{V}\int y \cdot dV$; $z_o = \dfrac{1}{V}\int z \cdot dV$
			Laminar	$x_o = \dfrac{1}{S}\int x \cdot dV$; $y_o = \dfrac{1}{S}\int y \cdot dV$; $z_o = \dfrac{1}{S}\int z \cdot dV$
			Lineal	$x_o = \dfrac{1}{L}\int x \cdot dl$; $y_o = \dfrac{1}{L}\int y \cdot dl$; $z_o = \dfrac{1}{L}\int z \cdot dV$

5. ESTÁTICA

5.1. ***Hallar gráfica y numéricamente la resultante de dos fuerzas perpendiculares de 8 y 6 N, respectivamente (fig. 5.1).***

Solución:

$$R = \sqrt{(8\ N)^2 + (6\ N)^2} = \boxed{\mathbf{10\ N}} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{8} = 0{,}75; \ \boxed{\alpha = \mathbf{36{,}87^\circ}}$$

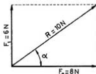


Fig. 5.1

5.2. ***Hallar la resultante de dos fuerzas iguales cuyas direcciones forman un ángulo de 60° (fig. 5.2).***

Solución:

$$R = \sqrt{F^2 + F^2 + 2\ F \cdot F \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{F^2 + F^2 + F^2} = \boxed{\mathbf{F\ \sqrt{3}}}$$

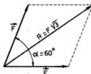


Fig. 5.2

5.3. ***Determinar el módulo y dirección de la fuerza resultante de las tres siguientes:***

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_1 &= 12\ \vec{i} - 3\ \vec{j} + 6\ \vec{k} \\ \vec{F}_2 &= \vec{i} + 7\ \vec{j} + 3\ \vec{k} \\ \vec{F}_3 &= -8\ \vec{i} - 6\ \vec{j} + 5\ \vec{k} \end{aligned}\right\} (SI)$$

Solución: La resultante será:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 5\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 14\,\vec{k}\ \text{(SI)}$$

y su módulo es:

$$R = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 14^2} = 15\ \text{N}$$

valiendo los cosenos directores:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3};\ \cos\beta = -\frac{2}{15};\ \cos\gamma = \frac{14}{15}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\mathbf{R = 15\ N;\ \alpha = 70{,}5°;\ \beta = 97{,}7°;\ \gamma = 21°}}$$

5.4. *Hallar la resultante de las cuatro fuerzas de la figura 5.3, en la que $F_1 = 9\ N$, $F_2 = 8\ N$, $F_3 = 6\ N$ y $F_4 = 5\ N$.*

Solución: Expresemos, todas las fuerzas en forma vectorial:

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_1 &= 9\left[\frac{1}{3}\,\vec{i} + \frac{2}{3}\,\vec{j} + \frac{2}{3}\,\vec{k}\right] = 3\,\vec{i} + 6\,\vec{j} + 6\,\vec{k}; \\ \vec{F}_2 &= 8\,\vec{i}; \\ \vec{F}_3 &= 6\,\vec{k}; \\ \vec{F}_4 &= 5\left[\frac{3}{5}\,\vec{i} + \frac{4}{5}\,\vec{j}\right] = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} \end{aligned}\right\}\ \text{(SI)}$$

La resultante de las cuatro fuerzas valdrá:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \boxed{\mathbf{14\,\vec{i} + 10\,\vec{j} + 12\,\vec{k}\ (SI)}}$$

siendo su módulo:

$$F = \sqrt{14^2 + 10^2 + 12^2} = \sqrt{430} \simeq \boxed{\mathbf{21\ N}}$$

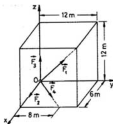


Fig. 5.3

5.5. *¿Es cierta la frase: «La resultante de dos fuerzas paralelas es una fuerza paralela a ambas»?*

Solución: No es totalmente cierta, ya que si ambas fuerzas son paralelas, iguales y de sentidos contrarios (par de fuerzas), la resultante es nula, y el momento del par es perpendicular al plano definido por ellas.

5.6. ***Cuatro fuerzas: $F_1 = 16\ N$, $F_2 = 20\ N$, $F_3 = 8\ N$ y $F_4 = 4\ N$, se encuentran en el plano YZ, como indica la figura 5.4. Hallar la resultante.***

Solución: La resultante valdrá:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 =$$
$$= 16\ N + 20\ N + 8\ N + 4\ N =$$
$$= 48\ N$$

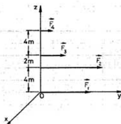


Fig. 5.4

Para hallar la posición de la resultante aplicaremos el teorema de Varignon, tomando momentos respecto al origen de coordenadas:

$$R \cdot d = F_1 \cdot 0\ m + F_2 \cdot 4\ m +$$
$$+ F_3 \cdot 6\ m + F_4 \cdot 10\ m$$

es decir:

$$48\ N \cdot d = 20\ N \cdot 4\ m + 8\ N \cdot 6\ m + 4\ N \cdot 10\ m$$

de donde:

$$d = 3{,}5\ m$$

La resultante vale 48 N y dista 3,5 metros del eje OY.

5.7. ***Demostrar, aplicando el teorema de Varignon, la composición de fuerzas paralelas del mismo sentido y de sentido contrario.***

Solución:

a) Sean dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ paralelas y del mismo sentido, cuyos puntos de aplicación respectivos son A y B (fig. 5.5). Designemos por $\vec{R}$ la resultante, siendo O su punto de aplicación. Tomemos momentos con respecto al punto O y apliquemos el teorema de Varignon:

$$\vec{M}_R = \vec{M}_{F_1} + \vec{M}_{F_2}$$

Como el momento de la resultante es cero, se habrá de cumplir que:

$$|\vec{M}_{F_1} + \vec{M}_{F_2}| = F_1 \cdot \overline{OA} - F_2 \cdot \overline{OB} = 0$$

de donde:

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}}$$

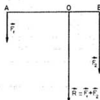


Fig. 5.5

b) Si se trata de fuerzas paralelas y de sentido contrario (fig. 5.6), procediendo de forma análoga al caso anterior, tenemos:

$$\vec{M}_R = \vec{M}_{F_1} + \vec{M}_{F_2}$$

$$F_1 \cdot \overline{OA} - F_2 \cdot \overline{OB} = 0$$

por consiguiente:

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}}$$

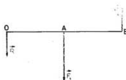


Fig. 5.6

5.8. ***En los extremos de una barra de 1,5 m de longitud se aplican perpendicularmente a ella dos fuerzas paralelas y del mismo sentido, una de doble valor que la otra. Calcular el valor de la resultante y la distancia entre su punto de aplicación y el punto de aplicación de la mayor.***

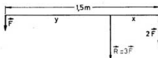


Fig. 5.7

Solución: De acuerdo con el diagrama que vemos en la figura 5.7:

$$R = F + 2\,F = 3\,F$$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1{,}5 \\ F \cdot y = 2\,F \cdot x \end{array}\right\}$$

obtendremos el siguiente resultado:

$$\boxed{\mathbf{x = 0{,}5\ m;\ y = 1\ m}}$$

5.9. ***Dos fuerzas paralelas, F_1 y F_2, de intensidades 5 y 10 N y de sentido contrario, se aplican perpendicularmente a los extremos de una barra de 10 m de longitud. Calcular analíticamente el valor de la resultante y su punto de aplicación.***

Solución:

R = 10 N − 5 N = 5 N

10 N · x = 5 N · (10 m + x)

de donde x = 10 m.

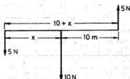


Fig. 5.8

La resultante, de valor 5 N, dirigida verticalmente hacia abajo, según el esquema de la figura 5,8, tiene su punto de aplicación situado a 10 m del punto de aplicación de la fuerza mayor.

5.10. ***En los extremos de una tabla de 6 m de longitud y 30 kg de masa se colocan dos niños de 40 y 50 kg, respectivamente. ¿Dónde debe estar situado el punto de apoyo para conseguir el equilibrio?***

Solución: Tracemos un diagrama de todas las fuerzas que actúan sobre la tabla (véase fig. 5.9).

Las condiciones de equilibrio establecen que:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$$

Aplicadas a este caso particular, conducen al siguiente sistema de ecuaciones:

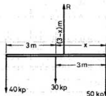


Fig. 5.9

$$R - 40 \text{ kp} - 30 \text{ kp} - 50 \text{ kp} = 0 \qquad [1]$$

$$R \cdot x - 30 \text{ kp} \cdot 3 \text{ m} - 40 \text{ kp} \cdot 6 \text{ m} = 0 \qquad [2]$$

donde en la ecuación [2] hemos tomado momentos respecto al extremo derecho de la tabla (donde está situado el niño de 50 kg).

La resolución del anterior sistema conduce a: x = 2,75 m.

El punto de apoyo ha de estar situado a 2,75 m del niño de mayor peso.

5.11. ***La resultante de dos fuerzas paralelas de sentidos contrarios tiene de valor 27 N y está situada a 1 m de la fuerza mayor. ¿Cuánto vale la fuerza menor si la distancia que separa a ambas fuerzas es de 3 m?***

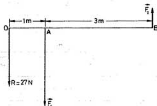


Fig. 5.10

Solución: De acuerdo con el diagrama de fuerzas de la figura 5.10, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} F_1 - F_2 = R = 27 \text{ N} \\ \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{4 \text{ m}}{1 \text{ m}} \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, obtenemos:

$$\boxed{F_2 = 9 \text{ N}}$$

5.12. ***¿Por qué los carreteros para desatascar las ruedas de los carros atan las caballerías a la parte más alta de la rueda?***

Solución: De esta manera, el par de fuerzas aplicado a la rueda se duplica, ya que en este caso el brazo del par es el diámetro de la rueda y no el radio. En consecuencia, el efecto de rotación aumentará.

5.13. ***En la figura 5.11 el módulo de la fuerza $\vec{F}$ tiene de valor 5 N y la arista del cubo es igual a 2 m. Calcular el momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto al origen de coordenadas.***

Solución: Si la arista del cubo vale 2 m, entonces el vector de posición del punto P será:

$$\vec{r} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k} \text{ (SI)}$$

Por otra parte, se ve claramente en la figura que $\alpha = -135°$; $\beta = 90°$, y $\gamma = -135°$. Por lo tanto:

$$F_x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$F_y = 0$$

$$F_z = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

y, en consecuencia:

$$\vec{F} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}\,\vec{i} - \frac{5\sqrt{2}}{2}\,\vec{k} \text{ (SI)}$$

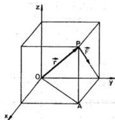


Fig. 5.11

El momento será:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -\frac{5\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{5\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \boxed{-5\sqrt{2}\,\vec{i} + 5\sqrt{2}\,\vec{k} \text{ (SI)}}$$

5.14. ***Refiriéndonos al caso mencionado en el problema anterior (fig. 5.11), hallar el momento de la fuerza $\vec{F}$:***

a) Respecto al eje OX.
b) Respecto a la recta OA.

Solución:

a) Como el momento de la fuerza $\vec{F}$ con respecto al origen de coordenadas es: $\vec{M}_o = -5\sqrt{2}\,\vec{i} + 5\sqrt{2}\,\vec{k}$ (SI), y el vector unitario en el sentido positivo del eje OX es $\vec{i}$, resulta:

$$M_{OX} = \vec{i} \cdot \vec{M}_o = \vec{i} \cdot (-5\sqrt{2}\,\vec{i} + 5\sqrt{2}\,\vec{k}) = \boxed{-5\sqrt{2}\ \text{N} \cdot \text{m}}$$

b) El vector $\overline{OA}$ es: $\overline{OA} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$, valiendo el vector unitario correspondiente:

$$\vec{e} = \frac{\overline{OA}}{OA} = \frac{2\,\vec{i} + 2\,\vec{j}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{i} + \vec{j})$$

Por lo tanto:

$$M_{OA} = \vec{e} \cdot \vec{M}_o = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{i} + \vec{j}) \cdot (-5\sqrt{2}\,\vec{i} + 5\sqrt{2}\,\vec{k}) = \boxed{-5\ \text{N} \cdot \text{m}}$$

5.15. ***Calcular el momento, con respecto al origen de coordenadas, de la fuerza $\vec{F} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + \vec{k}$ (SI), aplicada en el punto A (2, 3, 1), coordenadas expresadas en metros.***

Solución:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{5\,\vec{i} + \vec{j} - 13\,\vec{k}\ \text{(SI)}}$$

5.16. ***Sabiendo que $\vec{F} = \vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$ y $\vec{M} = 2\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + x\,\vec{k}$, determinar x.***

Solución: Los vectores $\vec{F}$ y $\vec{M}$ son perpendiculares. Por tanto, su producto escalar es nulo: $\vec{F} \cdot \vec{m} = 0$.

$$\vec{F} \cdot \vec{M} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot x = 0$$

De la ecuación anterior se deduce que: $\boxed{x = 2}$

5.17. ***La fuerza $\vec{F} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + \vec{k}$ (SI) actúa en el punto $\vec{r} = \vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$ (SI). Hallar su momento respecto al origen y respecto a los ejes coordenados.***

Solución: Hallemos, en primer lugar, el momento respecto al origen de coordenadas:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{4\,\vec{i} + 8\,\vec{j} + 4\,\vec{k}\ \text{(SI)}}$$

Los momentos de la fuerza $\vec{F}$ respecto a los ejes coordenados son:

$$M_x = \vec{i} \cdot \vec{M}_o = \vec{i} \cdot (4\,\vec{i} + 8\,\vec{j} + 4\,\vec{k}) = \boxed{4\ \text{N} \cdot \text{m}}$$
$$M_y = \vec{j} \cdot \vec{M}_o = \vec{j} \cdot (4\,\vec{i} + 8\,\vec{j} + 4\,\vec{k}) = \boxed{8\ \text{N} \cdot \text{m}}$$
$$M_z = \vec{k} \cdot \vec{M}_o = \vec{k} \cdot (4\,\vec{i} + 8\,\vec{j} + 4\,\vec{k}) = \boxed{4\ \text{N} \cdot \text{m}}$$

5.18. ***Hallar el momento de la fuerza $\vec{F} = \vec{i} + 2\,\vec{j} - 3\,\vec{k}$ (SI), aplicada en el punto A (1, 1, 2) m, respecto a la recta x = y = z.***

Solución: El vector unitario en la dirección de la recta x = y = z es:

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\vec{k}$$

Por tanto:

$$M_\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{N} \cdot \text{m}}$$

5.19. ***Cita un ejemplo que demuestre que el siguiente enunciado es falso: «Dos fuerzas cualesquiera pueden componerse dando una resultante que produzca el mismo efecto que ellas.»***

Solución: Si se trata de un sistema formado por dos fuerzas paralelas, iguales y de sentido contrario (par de fuerzas) que producen un movimiento de rotación, su composición da origen a una resultante nula y que, por tanto, no producirá efecto alguno.

5.20. ***Razonar si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: «El momento total de un conjunto de fuerzas que actúa sobre un sólido es igual al momento de la resultante de las fuerzas con respecto al centro de gravedad del cuerpo.»***

Solución: Esta frase no tiene significado, ya que la resultante es un vector libre, que, por consiguiente, carece de momento.

5.21. ***¿Sabrías poner un ejemplo de sistema de fuerzas que en un punto tenga solamente resultante general? ¿Y que tenga sólo momento resultante?***

Solución: Un sistema de fuerzas concurrentes en un punto sólo tiene resultante general, ya que el momento resultante respecto a dicho punto es nulo.

Un par de fuerzas posee un momento resultante; sin embargo, su resultante general es nula.

5.22. ***¿Es cierto que dos fuerzas iguales y de sentido contrario producen equilibrio?***

Solución: Es cierto siempre que la línea de acción de ambas fuerzas sea la misma, pues de no ser así aparecerán pares de fuerzas que destruyen el equilibrio.

5.23. ***Hallar el valor del momento del par de fuerzas $\vec{F}_1 = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{F}_2 = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ (SI), aplicadas en los puntos $r_1 = 2\vec{j} - 5\vec{k}$ y $r_2 = -i + 2\vec{j}$ (SI).***

Solución: Ya que:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{i} - 5\vec{k}, \text{ y } \vec{F}_1 = -3\vec{i} + 2\vec{j}$$

resulta:

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -5 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{10\,\vec{i} + 15\,\vec{j} + 2\,\vec{k}\ (SI)}}$$

5.24. ***En la figura 5.12 tenemos dos pares de fuerzas tales que $F_1 = F_2 = 20$ N y $F_3 = F_4 = 30$ N. Hallar el momento resultante de ambos pares.***

Solución: Hallemos, en primer lugar, el momento del par de fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Como $\vec{F}_1 = 20\,\vec{k}$ y $\vec{r}_1 = 8\,\vec{i}$, resulta:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 = 8\ \vec{i} \wedge 20\ \vec{k} = -160\ \vec{j}$$

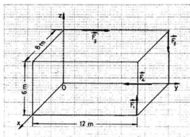


Fig. 5.12

Calculemos, a continuación, el momento del par de fuerzas $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$. Como $\vec{F}_3 = 30\ \vec{j}$ y $\vec{r}_3 = 6\ \vec{k}$, tendremos:

$$\vec{M}' = \vec{r}_3 \wedge \vec{F}_3 = 6\ \vec{k} \wedge 30\ \vec{j} = -180\ \vec{i}$$

Por tanto, el momento resultante de ambos pares valdrá:

$$\boxed{\vec{M} = -180\ \vec{i} - 160\ \vec{j}}$$

5.25. ***Un cuadro está colgado en la pared mediante una cuerda que pasa por un clavo, formando sus dos mitades un ángulo de 90° (véase fig. 5.13). Sabiendo que la máxima fuerza que puede soportar la cuerda es de 100 N, calcular el máximo peso que puede tener el cuadro.***

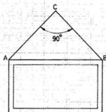


Fig. 5.13

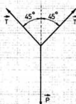


Fig. 5.14

Solución: Sobre el cuadro actúan en total tres fuerzas: el peso, $\vec{P}$. y las tensiones, $\vec{T}$, de la cuerda. Para que haya equilibrio se ha de cumplir que:

$$\Sigma \vec{F}_i = 0$$

Dicha igualdad, en dirección vertical, equivale a:

$$2\ T \cdot \cos 45° - P = 0$$

de donde:

$$P = 2\ T \cdot \cos 45° = 2 \cdot 100\ N \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{141{,}4\ N}$$

5.26. ***Hallar los valores de las fuerzas ejercidas hacia arriba en cada extremo de la mesa de la figura 5.15.***

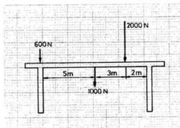


Fig. 5.15

Solución: Designemos por R_1 y R_2 las fuerzas pedidas (fig. 5.16). Para que la mesa se encuentre en equilibrio se ha de cumplir que:

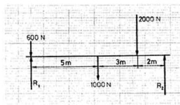


Fig. 5.16

$$\Sigma \vec{F}_1 = 0;\ R_1 + R_2 - 600\ N - 1\ 000\ N - 2\ 000\ N = 0 \qquad [1]$$

$\Sigma \vec{M}_i = 0$; tomemos momentos respecto al extremo de la izquierda:

$$1\ 000\ N \cdot 5\ m + 2\ 000\ N \cdot 8\ m - R_2 \cdot 10\ m = 0 \qquad [2]$$

La resolución del sistema formado por las ecuaciones [1] y [2] conduce a:

$$R_1 = 1\ 500\ N$$
$$R_2 = 2\ 100\ N$$

En el extremo de la izquierda, 1 500 N, y en el de la derecha, 2 100 N

5.27. *Calcular la tensión en cada cuerda de la figura 5.17, sabiendo que el peso del cuerpo suspendido es 1 000 N.*

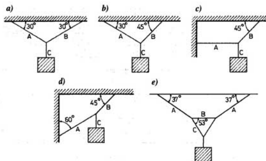


Fig. 5.17

Solución: Consideraremos en cada uno de los casos los puntos de unión de las cuerdas A, B y C, y aplicaremos a dichos puntos, así como al bloque suspendido, las condiciones de equilibrio de traslación, resolviendo a continuación el sistema de ecuaciones correspondiente.

a) $\left.\begin{aligned} &\Sigma F_x = B \cdot \cos 30° - A \cdot \cos 30° = 0 \\ &\Sigma F_y = B \cdot \text{sen } 30° + A \cdot \text{sen } 30° - C = 0 \\ &C - 1\ 000\ N = 0 \end{aligned}\right\}$ **A = B = C = 1 000 N**

b) $\left.\begin{aligned} &\Sigma F_x = B \cdot \cos 45° - A \cdot \cos 30° = 0 \\ &\Sigma F_y = B \cdot \text{sen } 45° + A \cdot \text{sen } 30° - C = 0 \\ &C - 1\ 000\ N = 0 \end{aligned}\right\}$ **A = 732 N**, **B = 896,6 N**, **C = 1 000 N**

c) $\Sigma F_x = B \cdot \cos 45° - A = 0$
$\Sigma F_y = B \cdot \text{sen } 45° - C = 0$
$C - 1\,000 \text{ N} = 0$

A = 1 000 N
B = 1 414 N
C = 1 000 N

d) $\Sigma F_x = B \cdot \cos 45° - A \cdot \text{sen } 60° = 0$
$\Sigma F_y = B \cdot \text{sen } 45° - A \cdot \cos 60° - C = 0$
$C - 1\,000 \text{ N} = 0$

A = 2 732 N
B = 3 346 N
C = 1 000 N

e) $B + C \cdot \cos 53° - A \cdot \cos 37° = 0$
$A \cdot \text{sen } 37° - C \cdot \text{sen } 53° = 0$
$2\,C \cdot \text{sen } 53° - 1\,000 \text{ N} = 0$

A = 833 N
B = 291,7 N
C = 625 N

5.28. *Una escalera uniforme, de 10 m de longitud y de 600 N de peso, con su centro de gravedad en el punto medio, se encuentra en equilibrio con un extremo en A, sobre el suelo áspero, y el otro en B, a 8 m sobre el suelo, y apoyado contra una pared vertical sin rozamiento. Se pide calcular las reacciones de la pared y del suelo, así como sus direcciones respectivas.*

Solución: Ya que no existe rozamiento entre la pared y la escalera, la fuerza $\vec{R}$ ha de ser perpendicular a la pared. Es evidente que para que tres fuerzas no paralelas, $\vec{F}$, $\vec{R}$ y $m\vec{g}$, estén en equilibrio es necesario que sean concurrentes, por lo que la recta de acción de $\vec{F}$ ha de pasar por el punto O (intersección de $\vec{R}$ y $m\vec{g}$) (véase la fig. 5.18). Sin embargo, aplicando las condiciones de equilibrio:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$$

no es necesario conocer el punto de intersección de las fuerzas.

Como $\Sigma F_{ix} = 0$ y $\Sigma F_{iy} = 0$, resulta:

$$\Sigma F_{ix} = F \cos \alpha - R = 0$$
$$\Sigma F_{iy} = F \text{ sen } \alpha - mg = 0$$

Apliquemos ahora la condición de que el momento total ha de ser nulo. Para ello podemos calcular los momentos con respecto a cualquier eje. Sin embargo, en la práctica resulta aconsejable elegir un eje que pase por un punto en el que concurran más de una fuerza (no todas); así, el cálculo numérico se simplifica, pues estas fuerzas, al tener un momento nulo, no intervendrán en la correspondiente ecuación.

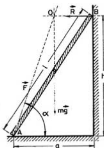


Fig. 5.18

Si tomamos momentos respecto a un eje que pasa por A, resulta:

$$\Sigma M_{iA} = R \cdot h - m \cdot g \cdot \frac{a}{2} = 0$$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, obtenemos de la tercera ecuación:

$$R = \frac{m \cdot g \cdot a}{2h} = \frac{600 \text{ N} \cdot 6 \text{ m}}{2 \cdot 8 \text{ m}} = \boxed{225 \text{ N}}$$

De las dos primeras ecuaciones resulta:

$$F = \sqrt{R^2 + (mg)^2} = \sqrt{(225 \text{ N})^2 + (600 \text{ N})^2} = \boxed{640{,}8 \text{ N}}$$

$$\alpha = \text{arctg } \frac{mg}{R} = \text{arctg } \frac{600 \text{ N}}{225 \text{ N}} = \text{arctg } 2{,}67 = \boxed{69{,}44°}$$

5.29. ***Las bisagras A y B de una puerta de 500 N de peso distan entre sí 2 m y la anchura de la puerta es 1 m (véase fig. 5.19). Sabiendo que todo el peso de la puerta lo soporta la bisagra superior, se desean saber los valores de las fuerzas ejercidas sobre la puerta en sus bisagras.***

Solución: Como la puerta se encuentra en equilibrio, se ha de cumplir que:

$$\Sigma \vec{F}_i = 0 \begin{cases} F_A - F_1 = 0 \\ F_2 - P = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} F_A = F_1 & [1] \\ F_2 = P = 500 \text{ N} & \end{matrix}$$

$\Sigma \vec{M}_i = 0$. Tomando momentos respecto a la bisagra B, tenemos:

$$P \cdot 0{,}5 \text{ m} - F_A \cdot 2 \text{ m} = 0$$

$$500 \text{ N} \cdot 0{,}5 \text{ m} - F_A \cdot 2 \text{ m} = 0 \qquad [2]$$

La resolución del sistema formado por las ecuaciones [1] y [2] conduce a:

$$F_A = F_1 = 125 \text{ N}$$

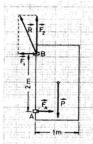


Fig. 5.19

deduciéndose, de acuerdo con la figura, que:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(125 \text{ N})^2 + (500 \text{ N})^2} = 515{,}4 \text{ N}$$

En la bisagra superior, R = 515,4 N, y en la inferior, 125 N

5.30. ***Un bloque de peso P está suspendido de una cuerda de 20 m de longitud, de cuyo punto medio se tira horizontalmente mediante otra cuerda, con una fuerza igual a la cuarta parte del peso del bloque. ¿Cuánto se desviará el bloque lateralmente y cuánto se elevará?***

Solución: Aplicando las condiciones de equilibrio al punto A de la figura 5.20, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x &= T\cos\theta - \frac{P}{4} = 0 \\ \Sigma F_y &= T\,\mathrm{sen}\,\theta - P = 0 \end{aligned}\right\}$$

Por otra parte:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sen}\,\theta &= \frac{y}{10} \\ \cos\theta &= \frac{x}{10} \\ x^2 + y^2 &= 100 \end{aligned}\right\}$$

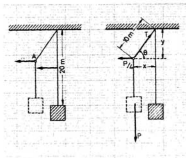


Fig. 5.20

Sustituyendo estos valores en el sistema anterior, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} &T\cdot\frac{x}{10} - \frac{P}{4} = 0 \\ &T\cdot\frac{y}{10} - P = 0 \\ &x^2 + y^2 = 100 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &2\,T\,x - 5\,P = 0 \\ &T\,y - 10\,P = 0 \end{aligned}\right\} \; y = 4\,x \qquad \left.\begin{aligned} x^2 + y^2 = 100 \; : \; x^2 + y^2 = 100 \end{aligned}\right\}$$

Resuelto el sistema, se obtiene: $x = 2{,}425$ m; $y = 9{,}70$ m.

El bloque se desviará lateralmente 2,425 m y se elevará 10 m − 9,70 m = 0,30 m.

5.31. ***Una puerta de 2 m de ancho, 1 m de alto y 500 N de peso, con su centro de gravedad en el mismo centro geométrico, está unida al marco por dos bisagras (véase fig. 5.21). Se dispone el cable CD, cuya tensión va aumentando paulatinamente hasta que la fuerza horizontal sobre la bisagra A sea nula.***

a) *¿Cuál es la tensión del cable CD?*

b) *¿Cuál es el valor de la componente horizontal de la fuerza en la bisagra B?*

c) *¿Cuál es la fuerza vertical ejercida en su conjunto por las bisagras A y B?*

Solución (véase fig. 5.22):

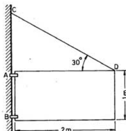


Fig. 5.21

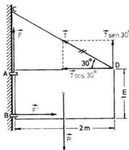


Fig. 5.22

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x = F' - T \cos 30° = 0 \\ \Sigma F_y = F + T \text{ sen } 30° - P = 0 \\ M_D = 1 \text{ m} \cdot F' + 1 \text{ m} \cdot P - 2 \text{ m} \cdot F = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} F' = T \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ F = 500 \text{ N} - \dfrac{T}{2} \\ F' + 500 \text{ N} - 2F = 0 \end{array}\right\}$$

La resolución del anterior sistema conduce a:

$\boxed{T = 268 \text{ N}}$ $\boxed{F' = 232 \text{ N}}$ $\boxed{F = 366 \text{ N}}$

5.32. *Una varilla de vidrio de sección uniforme y longitud 2 l se apoya sobre el fondo y el borde de una cápsula de porcelana de forma semiesférica de radio R (l < 2R) (véase fig. 5.23). Considerando nulos los rozamientos, determinar el ángulo α que formará la varilla con la horizontal en la posición de equilibrio.*

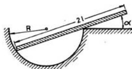


Fig. 5.23

Solución: Consideremos las tres fuerzas que actúan sobre la varilla: su peso, $\vec{P}$, y las reacciones contra ella en los puntos de apoyo, $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$; la reacción $\vec{N}_1$ será normal a la superficie de la cápsula y la $\vec{N}_2$ normal a la varilla (fig. 5.24).

Dado el equilibrio existente en el sistema, si tomamos como ejes de referencia la varilla y la perpendicular a ella, se ha de cumplir que:

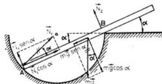


Fig. 5.24

$$\text{mg sen } \alpha - N_1 \cos \alpha = 0 \qquad [1]$$

$$N_1 \text{ sen } \alpha + N_2 - \text{mg} \cos \alpha = 0 \qquad [2]$$

Por otra parte, tomando momentos respecto al punto A, resulta:

$$\text{mg} \cdot l \cos \alpha - N_2 \cdot 2\,R \cos \alpha = 0 \qquad [3]$$

La resolución de este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas conduce a:

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{l + \sqrt{l^2 + 32\,R^2}}{8\,R}}$$

5.33. *Dos esferas, ambas de radio R y 20 N de peso, quedan en equilibrio en la posición que indica la figura 5.25, de manera que la línea que une sus centros forma un ángulo de 30° con la horizontal. Calcular las fuerzas que ejercen las esferas en los apoyos A, B y C.*

Solución: De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas que ejercen las esferas sobre los apoyos A, B y C son iguales, respectivamente, a las que estos apoyos ejercen sobre las esferas, y que se representan en la figura 5.26.

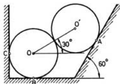


Fig. 5.25

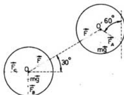


Fig. 5.26

Aplicando a cada una de las esferas las condiciones de equilibrio (1), resulta:

$$\left.\begin{array}{l} F_C - F\cos 30^\circ = 0 \\ F_B - mg - F\,\text{sen}\,30^\circ = 0 \\ F\,\text{sen}\,30^\circ + F_A\cos 60^\circ - mg = 0 \\ F\cos 30^\circ - F_A\,\text{sen}\,60^\circ = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema, se obtiene:

$$\boxed{F_A = 20\ \text{N}} \quad \boxed{F_B = 30\ \text{N}} \quad \boxed{F_C = 10\sqrt{3}\ \text{N}}$$

5.34. ***¿En qué casos el centro de gravedad de un cuerpo no coincide con el centro de masas?***

Solución: Cuando se trata de un cuerpo extenso, en el que los vectores peso correspondientes a sus diferentes partículas no son estrictamente paralelos y el valor de g no es constante en todos los puntos del cuerpo.

5.35. ***Habrás oído el refrán: «Siete vidas tiene un gato». ¿Cómo explicarías el hecho de que los gatos siempre caigan de pie?***

Solución: Los gatos, mientras caen, aunque su centro de gravedad describa la vertical, mediante contracciones musculares consiguen girar su cuerpo respecto a dicho centro de gravedad hasta colocar sus patas hacia el suelo. Debe observarse que los esfuerzos musculares del animal deben ser considerados como fuerzas interiores.

5.36. ***Hallar la posición del centro de gravedad de un sistema integrado por cuatro partículas cuyas masas y posiciones relativas son:***

$$m_1 = 2\ kg;\ \vec{r}_1 = (2, 0, 5)$$
$$m_2 = 1\ kg;\ \vec{r}_2 = (-4, -1, 3)$$
$$m_3 = 3\ kg;\ \vec{r}_3 = (0, 1, 3)$$
$$m_4 = 4\ kg;\ \vec{r}_4 = (-2, 2, 1)$$

estando las componentes de los vectores de posición expresadas en metros.

Solución: Las coordenadas del centro de gravedad del sistema son:

$$x_o = \frac{\Sigma\, m_i \cdot x_i}{M} =$$

$$= \frac{2\ \text{kg} \cdot 2\ \text{m} + 1\ \text{kg} \cdot (-4\ \text{m}) + 3\ \text{kg} \cdot 0\ \text{m} + 4\ \text{kg} \cdot (-2\ \text{m})}{2\ \text{kg} + 1\ \text{kg} + 3\ \text{kg} + 4\ \text{kg}} = -\frac{4}{5}\text{m}$$

(1) El momento de las fuerzas es nulo, ya que todas ellas pasan por el centro de la esfera.

$$y_o = \frac{\Sigma\, m_i \cdot y_i}{M} =$$

$$= \frac{2\text{ kg} \cdot 0\text{ m} + 1\text{ kg} \cdot (-1\text{ m}) + 3\text{ kg} \cdot 1\text{ m} + 4\text{ kg} \cdot 2\text{ m}}{2\text{ kg} + 1\text{ kg} + 3\text{ kg} + 4\text{ kg}} = 1\text{ m}$$

$$z_o = \frac{\Sigma\, m_i \cdot z_i}{M} =$$

$$= \frac{2\text{ kg} \cdot 5\text{ m} + 1\text{ kg} \cdot 3\text{ m} + 3\text{ kg} \cdot 3\text{ m} + 4\text{ kg} \cdot 1\text{ m}}{2\text{ kg} + 1\text{ kg} + 3\text{ kg} + 4\text{ kg}} = \frac{13}{5}\text{ m}$$

Por tanto, el vector posición del centro de gravedad del sistema es:

$$\vec{r}_o = -\frac{4}{5}\,\vec{i} + \vec{j} + \frac{13}{5}\,\vec{k}\ \textbf{(SI)}$$

5.37. ***Determinar la posición del centro de gravedad de la lámina homogénea en forma de T de la figura 5.27.***

Solución: Tracemos unos ejes coordenados como se ve en la figura y descompongamos la lámina en dos rectángulos: ABCD y EFGH. Los centros de gravedad de ambos rectángulos, fácilmente determinables por geometría, son: G_1 (3, 5) y G_2 (3, 2), y sus superficies: $S_1 = 12\text{ cm}^2$ y $S_2 = 8\text{ cm}^2$, siendo la superficie total: $S = 20\text{ cm}^2$.

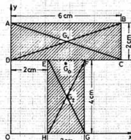


Fig. 5.27

Aplicando las fórmulas:

$$x_o = \frac{\Sigma\, m_i \cdot x_i}{M} = \frac{\Sigma\, \rho \cdot s_i \cdot x_i}{\rho \cdot S} = \frac{\Sigma\, s_i \cdot x_i}{S};\ y_o = \frac{\Sigma\, s_i \cdot y_i}{S}$$

resulta:

$$x_o = \frac{12\text{ cm}^2 \cdot 3\text{ cm} + 8\text{ cm}^2 \cdot 3\text{ cm}}{20\text{ cm}^2} = 3\text{ cm}$$

$$y_o = \frac{12\text{ cm}^2 \cdot 5\text{ cm} + 8\text{ cm}^2 \cdot 2\text{ cm}}{20\text{ cm}^2} = 3{,}8\text{ cm}$$

Las coordenadas del centro de gravedad de la lámina son: (3, 3,8), lo cual significa que dicho punto está situado sobre el eje de simetría, a 3,8 cm de la base.

5.38. *Hallar la posición del centro de gravedad de la lámina homogénea de la figura 5.28.*

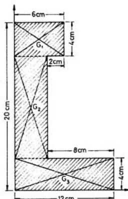


Fig. 5.28

Solución: Descompongamos la lámina en tres rectángulos (véase figura), cuyos centros de gravedad y superficies respectivas son:

G_1 (3, 18); $S_1 = 24 \text{ cm}^2$
G_2 (2, 10); $S_2 = 48 \text{ cm}^2$
G_3 (6, 2); $S_3 = 48 \text{ cm}^2$

siendo la superficie total:

$$S = 120 \text{ cm}^2$$

Las coordenadas del centro de gravedad de la lámina son:

$$x_o = \frac{24 \text{ cm}^2 \cdot 3 \text{ cm} + 48 \text{ cm}^2 \cdot 2 \text{ cm} + 48 \text{ cm}^2 \cdot 6 \text{ cm}}{120 \text{ cm}^2} = 3{,}8 \text{ cm}$$

$$y_o = \frac{24 \text{ cm}^2 \cdot 18 \text{ cm} + 48 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm} + 48 \text{ cm}^2 \cdot 2 \text{ cm}}{120 \text{ cm}^2} = 8{,}4 \text{ cm}$$

Por tanto, el centro de gravedad está situado en el punto:

G (3,8 ; 8,4)

5.39. *Hallar la posicion del centro de gravedad de la lámina homogenea en forma de S de la figura 5.29*

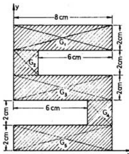


Fig. 5.29

Solución: Podemos descomponer la lámina en cinco rectángulos, conforme indica la figura 5.29. Los centros de gravedad y superficies de cada uno de ellos son:

G_1 (4, 9); $S_1 = 16 \text{ cm}^2$
G_2 (1, 7); $S_2 = 4 \text{ cm}^2$
G_3 (4, 5); $S_3 = 16 \text{ cm}^2$
G_4 (7, 3); $S_4 = 4 \text{ cm}^2$
G_5 (4, 1); $S_5 = 16 \text{ cm}^2$

siendo la superficie total:

$$S = 56 \text{ cm}^2$$

Las coordenadas del centro de gravedad de la lámina son:

$$x_o = \frac{\Sigma s_i \cdot x_i}{S} = \frac{16 \text{ cm}^2 \cdot 4 \text{ cm} + 4 \text{ cm}^2 \cdot 1 \text{ cm} + 16 \text{ cm}^2 \cdot 4 \text{ cm} + 4 \text{ cm}^2 \cdot 7 \text{ cm} + 16 \text{ cm}^2 \cdot 4 \text{ cm}}{56 \text{ cm}^2} = 4 \text{ cm}$$

$$y_o = \frac{\Sigma s_i \cdot y_i}{S} = \frac{16 \text{ cm}^2 \cdot 9 \text{ cm} + 4 \text{ cm}^2 \cdot 7 \text{ cm} + 16 \text{ cm}^2 \cdot 5 \text{ cm} + 4 \text{ cm}^2 \cdot 3 \text{ cm} + 16 \text{ cm}^2 \cdot 1 \text{ cm}}{56 \text{ cm}^2} = 5 \text{ cm}$$

Por tanto, el centro de gravedad estará situado en el punto:

G (4, 5)

5.40. ***Determinar la posición del centro de gravedad de una lámina homogénea en forma de disco de radio R con un orificio en forma de círculo de radio R/2 practicado en ella, como se indica en la figura 5.30.***

Solución: Se ve claramente que, por simetría, $y_o = 0$.

Para el cálculo de la abscisa del centro de gravedad tengamos en cuenta que la superficie de la lámina sin orificio es:

$$S_1 = \pi \cdot R^2$$

y la del orificio:

$$S_2 = \pi \, \frac{R^2}{4}$$

siendo las abscisas de sus centros de gravedad respectivos:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -\frac{R}{2}$$

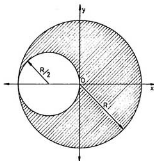


Fig. 5.30

Consideremos, además, que la lámina tiene una densidad ρ y el orificio $-\rho$. Procediendo de esta forma, la abscisa del centro de gravedad de la lámina del problema será:

$$x_o = \frac{\pi R^2 \cdot \rho \cdot 0 + \pi \frac{R^2}{4} (-\rho) \cdot \left(- \frac{R}{2} \right)}{\pi R^2 \rho + \pi \frac{R^2}{4} (-\rho)} = \frac{R}{6}$$

Por tanto, el centro de gravedad estará situado en el punto:

G (R/6, 0)

5.41. ***Doblamos un alambre de sección constante por su punto medio, de manera que ambas mitades formen un ángulo α. Determinar el valor de este ángulo para que, al colgar el alambre por un extremo, cuando alcance el equilibrio, el segmento libre permanezca en posición horizontal.***

Solución: Cuando el alambre alcance el equilibrio, el centro de suspensión y el de gravedad estarán en la misma línea recta vertical. La posición del centro de gravedad del alambre, tomando como origen el punto de suspensión, vendrá dada por:

$$x_o = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$$

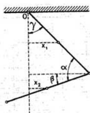


Fig. 5.31

Como $m_1 = m_2$, y ya que la masa de cada parte del alambre se puede considerar concentrada en su centro de gravedad, resulta:

$$x_o = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Por otra parte, de acuerdo con el enunciado del problema, $x_o = 0$. Por tanto:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad [1]$$

Si designamos por 2 l la longitud de la varilla, se ve claramente en la figura que:

$$x_1 = \frac{l}{2} \text{ sen } \gamma$$

$$x_2 = l \text{ sen } \gamma - \frac{l}{2} \cos \beta$$

valores que, sustituidos en la ecuación [1], conducen a:

$$\frac{3\,l}{2} \text{ sen } \gamma - \frac{l}{2} \cos \beta = 0$$

Si el segmento libre permanece en posición horizontal, $\beta = 0$, y α y γ serán complementarios, por lo cual:

$$\text{sen } \gamma = \cos \alpha$$

Se deduce de aquí:

$$\frac{3\,l}{2} \cos \alpha = \frac{l}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}$$

de donde:

$$\alpha = \text{arc cos } \frac{1}{3} = 70{,}53°; \qquad \boxed{\alpha = \mathbf{70{,}53°}}$$

5.42. ***Hallar la posición del centro de gravedad de un triángulo rectángulo cuyos catetos, de 10 y 8 cm, están situados sobre los ejes OX y OY, respectivamente.***

Solución: La ecuación de la recta que define la dirección de la hipotenusa del triángulo viene dada por:

$$4\,x + 5\,y - 40 = 0$$

Aislemos en él una franja elemental paralela al eje de abscisas, como indica la figura 5.32, y de superficie $dS = x \cdot dy$. Como el área de todo el triángulo es 40 cm^2, resulta:

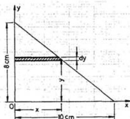


Fig. 5.32

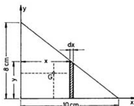
$$y_o = \frac{1}{S} \int y \cdot dS = \frac{1}{S} \int y \cdot x \cdot dy =$$

$$= \frac{1}{S} \int_0^8 \left(10 - \frac{5}{4}\,y\right) y \cdot dy = \frac{1}{S} \int_0^8 \left(10\,y - \frac{5}{4}\,y^2\right) dy =$$

$$= \frac{\left[5\,y^2 - \frac{5\,y^3}{12}\right]_0^8}{40} = 2{,}67 \text{ cm}$$

Aislando ahora otra franja elemental paralela al eje de ordenadas

(fig. 5.33), al ser su superficie $dS = y \cdot dx$, tenemos que:



$$x_o = \frac{1}{S}\int x \cdot dS = \frac{1}{S}\int x \cdot y \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_0^{10} x \cdot \left(8 - \frac{4}{5}\,x\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{S}\int_0^{10}\left(8x - \frac{4}{5}\,x^2\right)\,dx =$$

$$= \frac{\left[4x^2 - \dfrac{4x^3}{15}\right]_0^{10}}{40} = 3{,}33\ \text{cm}$$

Fig. 5.33

El centro de gravedad del triángulo es el punto (3,33, 2,67) cm. Precisamente se trata del baricentro del triángulo.

5.43. ***Hallar la posición del centro de gravedad de un arco semicircular de radio R y grosor despreciable.***

Solución: Escojamos un sistema de ejes coordenados tal que el origen coincida con el centro del arco (fig. 5.34). De esta manera, por simetría, $x_o = 0$, y sólo es preciso calcular y_o.

Para llevar a cabo este cálculo, podemos seguir dos métodos:

a) Ya que el arco es homogéneo:

$$y_o = \frac{1}{L}\int y\ dl$$

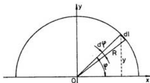


Fig. 5.34

Descompongamos el arco en elementos de longitud dl. Como $y = R \cdot \text{sen}\ \varphi$, $dl = R \cdot d\varphi$, $L = \pi R$, resulta:

$$y_o = \frac{1}{L}\int y\ dl = \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} R\ \text{sen}\ \varphi \cdot R \cdot d\varphi = \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}\ \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{R}{\pi}\ \left[-\cos\ \varphi\right]_0^{\pi} = \frac{2R}{\pi}$$

El centro de gravedad es el punto $\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{2R}}{\pi}\right)$

b) Aplicando el **primer teorema de Guldin** (1577-1643): «el área de la superficie engendrada por una curva plana que gira alrededor de un eje que no la corta es igual al producto de la longitud de la curva por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad»; si designamos por y_o la distancia del centro de gravedad del arco semicircular al centro de la circunferencia a la que pertenece, como dicho arco, de longitud πR, al girar engendra una superficie esférica de área $4\pi R^2$, tenemos:

$$4\pi R^2 = \pi R \cdot 2\pi \cdot y_o$$

de donde:
$$y_o = \frac{2R}{\pi}$$

El centro de gravedad está situado sobre el eje de simetría del arco y dista de su centro $2R/\pi$.

5.44. ***Determinar la posición del centro de gravedad de una lámina plana homogénea en forma de semicírculo de radio R.***

Solución: De acuerdo con el sistema de ejes coordenados de la figura 5.35, por simetría, $x_o = 0$, siendo sólo necesario calcular y_o. Para realizar este cálculo se pueden seguir cuatro métodos:

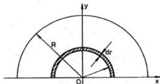


Fig. 5.35

a) Ya que se trata de una superficie homogénea:

$$y_o = \frac{1}{S}\int y \cdot ds$$

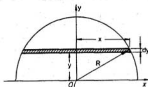
Descomponiendo la superficie semicircular en aros de radio r y grosor dr, como el centro de gravedad de cada uno de estos aros tiene de ordenada $y = \frac{2r}{\pi}$ (véase problema 5.43) y, además, $ds = \pi r dr$, y $S = \frac{\pi R^2}{2}$, resulta:

$$y_o = \frac{1}{S}\int y \cdot ds = \frac{1}{\frac{\pi R^2}{2}}\int_0^R \frac{2r}{\pi}\,\pi r \cdot dr = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr =$$

$$= \frac{4}{\pi R^2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4R}{3\pi}$$

El centro de gravedad de la lámina es el punto: $\left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$

b) Descompongamos, ahora, la superficie semicircular en bandas rectas, cada una de superficie ds = 2x dy (figura 5.36 (siendo dy el grosor de cada banda). Dado *que:*



$$x = \sqrt{R^2 - y^2}$$

Fig. 5.36

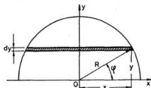
tenemos:

$$y_o = \frac{1}{S}\int y \cdot ds = \frac{1}{S}\int y \cdot (2x \cdot dy) =$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi R^2}{2}}\int_0^R 2y\,\sqrt{R^2 - y^2} \cdot dy = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R y\,\sqrt{R^2 - y^2} \cdot dy =$$

$$= \frac{4}{\pi R^2}\left[\frac{-(R^2 - y^2)^{3/2}}{3}\right]_0^R = \frac{4R^3}{3\pi R^2} = \boxed{\frac{4R}{3\pi}}$$

c) Hagamos también la descomposición en bandas rectas, pero utilicemos coordenadas circulares (fig. 5.37). Tenemos que:



$x = R \cdot \cos\varphi;$

$y = R \cdot \text{sen}\,\varphi;$

$dy = R \cdot \cos\varphi\, d\varphi;$

$ds = 2xdy = 2R^2 \cos^2\varphi\, d\varphi$

Fig. 5.37

En consecuencia:

$$y_o = \frac{1}{S}\int y \cdot ds = \frac{1}{\frac{\pi R^2}{2}}\int_0^{\pi/2} R\,\text{sen}\,\varphi \cdot 2R^2\cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{4R}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,\text{sen}\,\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{4R}{\pi}\left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{4R}{3\pi}}$$

d) Apliquemos el **segundo teorema de Guldin:** «el volumen del sólido engendrado por una superficie plana que gira alrededor de un eje que no la corta es igual al producto del área de dicha superficie por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad». El área del semicírculo es $\frac{\pi R^2}{2}$ y el volumen de la esfera que origina al girar, $\frac{4}{3}\pi R^3$. Por lo tanto:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi y_o$$

de donde resulta:

$$\boxed{y_o = \frac{4R}{3\pi}}$$

El centro de gravedad está situado sobre el eje de simetría de la lámina, distando de su centro $\frac{4R}{3\pi}$.

5.45. *Determinar la posición del centro de gravedad de la lámina plana homogénea de la figura 5.38, expresando el resultado con respecto a los ejes coordenados que se indican. Los puntos A y B son: A (4,4) y B (4,8), y el arco ACD es una semicircunferencia.*

Solución: La superficie del rectángulo es 32 unidades y su centro de gravedad es el punto G_1 (2,4), mientras que la parte semicircular tiene de superficie 2π unidades, estando situado su centro de gravedad en el punto:

$$G_2 \left(\frac{8}{3\pi} + 4,\ 2\right)$$

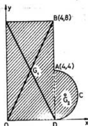


Fig. 5.38

(véase el problema anterior). Por consiguiente:

$$x_o = \frac{s_1 \cdot x_1 + s_2 \cdot x_2}{s_1 + s_2} = \frac{32 \cdot 2 + 2\pi \cdot \left(\frac{8}{3\pi} + 4\right)}{32 + 2\pi} = 2{,}468$$

$$y_o = \frac{s_1 \cdot y_1 + s_2 \cdot y_2}{s_1 + s_2} = \frac{32 \cdot 4 + 2\pi \cdot 2}{32 + 2\pi} = 3{,}672$$

El centro de gravedad de la lámina es el punto (2,468, 3,672).

5.46. ***Determinar la posición del centro de gravedad de la superficie rayada de la figura 5.39.***

Solución: En primer lugar, es evidente que, por simetría, $x_o = 0$.

Para el cálculo de y_o, la ordenada del centro de gravedad, podemos considerar la superficie rayada como resultante de recortar un triángulo de un semicírculo. El semicírculo, de densidad ρ, tiene de masa $m_1 = \frac{\pi R^2}{2} \cdot \rho$, y la ordenada de su centro de gravedad es $y_1 = \frac{4R}{3\pi}$ (véase problema 5.44), mientras que la masa del triángulo, de densidad $-\rho$, es $m_2 = R^2 \cdot (-\rho)$, siendo la ordenada de su centro de gravedad $y_2 = \frac{R}{3}$.

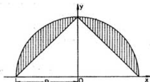


Fig. 5.39

Por consiguiente:

$$y_o = \frac{\frac{\pi R^2}{2} \rho \cdot \frac{4R}{3\pi} + R^2 \cdot (-\rho) \cdot \frac{R}{3}}{\frac{\pi R^2}{2} \rho + R^2 \cdot (-\rho)} = \frac{R}{3\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)} = 0{,}584\ R$$

El centro de gravedad de la superficie rayada es el punto:

G (0, 0,584 R)

5.47. ***Determinar la posición del centro de gravedad de una semiesfera maciza homogénea de radio R.***

Solución: Escojamos un sistema de ejes coordenados tal como indica la figura 5.40.

Así, resulta que, por simetría, las coordenadas x_o e y_o del centro de gravedad son ambas nulas, y sólo tenemos que calcular z_o. Como la semiesfera es homogénea, podemos aplicar la fórmula:

$$z_o = \frac{1}{V} \int z \cdot dV$$

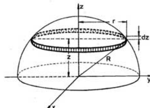


Fig. 5.40

Dividamos la semiesfera en capas o rodajas de espesor infinitesimal dz y área πr^2. El volumen de cada una de estas rodajas es:

$$dV = \pi r^2 \cdot dz$$

Por otra parte, se cumple la relación geométrica:

$$r^2 + z^2 = R^2$$

Por último, tengamos en cuenta que el volumen de la semiesfera es:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3$$

En consecuencia:

$$z_o = \frac{1}{V} \int z \cdot dV = \frac{1}{\frac{2}{3} \pi R^3} \int_0^R z\pi\, r^2 dz = \frac{1}{\frac{2}{3} \pi R^3} \int_0^R z\pi (R^2 - z^2) \cdot dz =$$

$$= \frac{3}{2R^3} \int_0^R (R^2 - z^2)\, z\, dz = \frac{3}{2R^3} \int_0^R (R^2 z - z^3)\, dz =$$

$$= \frac{3}{2R^3} \left[\frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^R = \frac{3}{8} R$$

En el sistema de ejes considerado, el centro de gravedad es el punto:

$$\boxed{\left(0,\ 0,\ \frac{3}{8}\, R\right)}$$

o lo que es lo mismo, está situado sobre el eje de simetría de la semiesfera distando de su vértice $\frac{5}{8}$ R.

.48. *Determinar la posición del centro de gravedad de una pirámide recta, maciza y homogénea, de base cuadrada y de altura h.*

Solución: Si escogemos adecuadamente un sistema de ejes coordenados, tal como hemos hecho en la figura 5.41, vemos que, por simetría, $x_o = 0$, $y_o = 0$, es decir, el centro de gravedad se encuentra sobre la recta que determina la altura de la pirámide, quedándonos sólo por determinar z_o, la distancia del centro de gravedad a la base de dicha pirámide, la cual, como es homogénea, permite la aplicación de la fórmula:

$$z_o = \frac{\int z \cdot dV}{V}$$

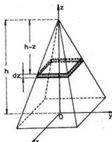


Fig. 5.41

Dividamos la pirámide, mediante cortes paralelos a la base e infinitesimalmente próximos entre sí, en rodajas de superficie a y espesor dz. El volumen de una de estas rodajas, situada a una distancia z de la base de la pirámide, es: dv = a · dz. Entre su superficie y la de la base de la pirámide, A, se cumple la conocida relación geométrica:

$$\frac{a}{A} = \frac{(h - z)^2}{h^2}$$

Tengamos también en cuenta que el volumen de la pirámide es:

$$V = \frac{1}{3} A \cdot h$$

Por tanto:

$$z_o = \frac{\int z \cdot dv}{V} = \frac{\int_0^h z \cdot a \cdot dz}{\frac{1}{3} A \cdot h} = \frac{\int_0^h z \cdot A \frac{(h - z)^2}{h^2} dz}{\frac{1}{3} A \cdot h} =$$

$$= \frac{3}{h^3} \int_0^h z \cdot (h - z)^2 \, dz =$$

$$= \frac{3}{h^3} \int_0^h (h^2 z + z^3 - 2hz^2) \, dz = \frac{3}{h^3} \left[\frac{h^2 y^2}{2} + \frac{h^4}{4} - \frac{2hy^3}{3} \right]_0^h = \frac{h}{4}$$

El centro de gravedad está situado sobre la altura de la pirámide, distando de su base 1/4 de la longitud de la altura.

Nota: Si se tratase de otra pirámide cualquiera, o de un cono de revolución, el resultado sería el mismo.

5.49. *Si la lámina plana y homogénea representada en la figura 5.42 se suspende del punto A, ¿cuál es el ángulo que forma en la posición de equilibrio el lado AB con la vertical?*

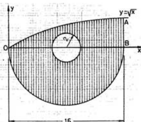


Fig. 5.42

Solución: Hallemos, en primer lugar, la posición del centro de gravedad de la lámina. Para ello, la podemos considerar compuesta de tres partes:

a) **El semicírculo inferior, sin agujero.** Su área es:

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 8^2}{2} = 32\pi$$

La abscisa de su centro de gravedad es: $x_1 = 8$, y la ordenada se puede calcular por el segundo teorema de Guldin:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi y_1$$

de donde:

$$y_1 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{32}{3\pi}$$

Por tanto, y teniendo en cuenta que el semicírculo está situado por debajo del eje de abscisas:

$$\boxed{S_1 = 32\pi;\ x_1 = 8;\ y_1 = -\frac{32}{3\pi}}$$

b) **La parte superior de la lámina, sin agujero.** Su área es:

$$S_2 = \int_0^{16} y \cdot dx = \int_0^{16} \sqrt{x} \cdot dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{16} = \frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^{16} = \frac{128}{3}$$

y las coordenadas de su centro de gravedad (figs. 5.43 y 5.44):

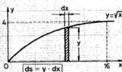


Fig. 5.43

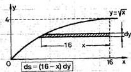


Fig. 5.44

$$x_2 = \frac{\int x \cdot ds}{S} = \frac{\int_0^{16} xy \cdot dx}{\frac{128}{3}} = \frac{3}{128}\int_0^{16} x\sqrt{x} \cdot dx =$$

$$= \frac{3}{128}\int_0^{16} x^{3/2}\,dx = \frac{3}{128}\left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^{16} = \frac{3}{320} \cdot 16^{5/2} = \frac{48}{5}$$

$$y_2 = \frac{\int y \cdot ds}{S} = \frac{\int_0^4 y(16-x)dy}{\frac{128}{3}} = \frac{\int_0^4 (16-y^3)dy}{\frac{128}{3}} = \frac{3}{128} \cdot \left[8y^2 - \frac{y^4}{4}\right] = \frac{3}{2}$$

Por tanto:

$$\boxed{S_2 = \frac{128}{3};\ x_2 = \frac{48}{5} \quad y_2 = \frac{3}{2}}$$

c) **El agujero circular.** Como su radio es de 2 unidades, tenemos:

$$\boxed{S_3 = 4\pi;\ x_3 = 8;\ y_3 = 0}$$

Tras todo ello podemos calcular el centro de gravedad de la lámina:

$$x_o = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2 - x_3 \cdot S_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{8 \cdot 32\pi + \frac{48}{5} \cdot \frac{128}{3} - 8 \cdot 4\pi}{32\pi + \frac{128}{3} - 4\pi} = 8{,}52$$

$$y_o = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2 - y_3 \cdot S_3}{S_1 + S_2 - S_3} =$$

$$= \frac{-\frac{32}{3\pi} \cdot 32\pi + \frac{3}{2} \cdot \frac{128}{3} - 0 \cdot 4\pi}{32\pi + \frac{128}{3} - 4\pi} = -2{,}12$$

El centro de gravedad de la lámina estará situado en el punto (8,52, −2,12).

Al suspender la lámina del punto A la recta que une dicho punto con el centro de gravedad se situará verticalmente (fig. 5.45), y el lado AB formará con la vertical un ángulo α tal que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{16 - 8{,}52}{4 + 2{,}12} = 1{,}222$$

de donde: $\boxed{\alpha = 50{,}7°}$

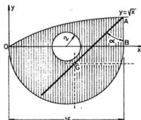


Fig. 5.45

5.50. ***Siéntate en una silla con la espalda recta y coloca las piernas de modo que formen un ángulo recto o ligeramente obtuso. Apoya las manos en las rodillas e intenta levantarte sin doblar la espalda. ¿Qué observas? ¿Cómo explicas este hecho?***

Solución: Al estar sentado en la posición que se indica, el equilibrio es inestable, pues la vertical que pasa por el centro de gravedad no pasa por la base de sustentación. El cuerpo tiende a caer hacia atrás. Para levantarse —y conseguir que el equilibrio sea estable— debe echarse el cuerpo hacia adelante, desplazando así la posición del centro de gravedad.

6. DINÁMICA DEL PUNTO

FORMULARIO-RESUMEN
Ecuación fundamental de la Dinámica: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \left(\frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} \right)$
Fuerzas centrípeta y centrífuga: $F_c = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r$
Tensiones Cuerpo que sube: $T = m\ (g + a)$; Cuerpo que baja: $T = m\ (g - a)$; Máquina de Atwood: $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\ g$; $T = \frac{2m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\ g$ (a = aceleración)
Fuerza de rozamiento: $F_r = \mu \cdot N$ Plano horizontal: $F_r = \mu \cdot m\ g$; Plano inclinado: $F_r = \mu \cdot m\ g \cos \alpha$
Radio de una curva con peralte y rozamiento: $r = \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1 - \mu \operatorname{tg} \theta}{\mu + \operatorname{tg} \theta}$
Impulso mecánico: $\vec{I} = \int_{t_o}^{t} \vec{F} \cdot dt$. Si $\vec{F} = cte$, $\vec{I} = \vec{F} \cdot (t - t_o)$
Momento lineal o cantidad de movimiento: $\vec{p} = m\ \vec{v}$
Teorema del impulso mecánico: $\vec{I} = \Delta\ \vec{p}$

Momento angular o cinético: $\vec{L}_o = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\,\vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$
Teorema del momento angular: $\dfrac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o$

6. DINÁMICA DEL PUNTO

6.1. *Se aplica una fuerza constante de 25 N a un cuerpo de 5 kg, inicialmente en reposo.*

¿Qué velocidad alcanzará y qué espacio habrá recorrido al cabo de 10 segundos?

Solución: Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica, $F = m \cdot a$, tenemos:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{25\ N}{5\ kg} = 5\ m/s^2$$

y recordando las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente variado, resulta:

$$v = v_o + a \cdot t = 0\ m/s + 5\ \frac{m}{s^2} \cdot 10\ s = \boxed{50\ m/s}$$

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2}\ a \cdot t^2 =$$

$$= 0\ m + 0\ \frac{m}{s} \cdot 10\ s + \frac{1}{2}\ 5\ \frac{m}{s^2} \cdot (10\ s)^2 = \boxed{250\ m}$$

El problema también puede resolverse aplicando la ecuación:

$$F \cdot t = m \cdot v - m \cdot v_o$$

$$25\ N \cdot 10\ s = 5\ kg \cdot v - 5\ kg \cdot 0\ m/s$$

de donde:

$$v = \frac{25\ N \cdot 10\ s}{5\ kg} = \boxed{50\ m/s}$$

y como:

$$a = \frac{v - v_o}{t} = \frac{50\ m/s - 0}{10\ s} = 5\ m/s^2$$

Aplicando la ecuación del espacio, en la que $s_o = 0$ y $v_o = 0$:

$$s = \frac{1}{2}\ a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 5\ \frac{m}{s^2} \cdot (10\ s)^2 = \boxed{250\ m}$$

6.2. *¿Qué fuerza han de ejercer los frenos de un coche de masa 600 kg, que marcha con una velocidad de 54 km/h, para detenerlo en 30 m?*

Solución: La velocidad inicial del coche es 54 km/h = 15 m/s. Su aceleración valdrá:

$$a = \frac{v^2 - v_o^2}{2\,s} = \frac{(0\ m/s)^2 - (15\ m/s)^2}{2 \cdot 30\ m} = -3{,}75\ m/s^2$$

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica:

$$F = m \cdot a = 600\ kg \cdot (-3{,}75\ m/s^2) = \boxed{-2\,250\ N}$$

Resulta una fuerza negativa, lo cual es lógico, pues se trata de una fuerza que se opone al movimiento.

El problema también puede resolverse aplicando las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente variado:

$$v = v_o + a \cdot t$$

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2}\ a \cdot t^2$$

en las que: $v = 0$ m/s, $s = 30$ m y $s_o = 0$ m.

Una vez resuelto el sistema:

$$0 = 15\ m/s + at$$

$$30\ m = 15\ \frac{m}{s} \cdot t + \frac{1}{2}\ a \cdot t^2$$

y obtenido el valor de la aceleración ($a = -3{,}75$ m/s²), se aplica, como en el caso anterior, la ecuación fundamental de la Dinámica.

6.3. *(*) Con una fuerza de 200 N se eleva un cuerpo 20 metros en 20 segundos. Calcúlese el peso de dicho cuerpo.*

Solución: La aceleración real a la que está sometido el cuerpo se calcula a partir de la ecuación:

$$s = v_o \cdot t + \frac{1}{2}\ a \cdot t^2$$

suponiendo que el cuerpo inicialmente estaba en reposo:

$$20\ m = \frac{1}{2}\ a\ (20\ s)^2$$

de donde:

$$a = 0{,}1\ m/s^2$$

Sobre el cuerpo actúan dos fuerzas: la aplicada (F), vertical hacia arriba, y el peso ($P = m \cdot g$), vertical hacia abajo (fig. 6.1).

Cumpliéndose que:

$$F - P = m \cdot a = \frac{P}{g} \cdot a$$

$$200 \text{ N} - \text{P} = \frac{\text{P}}{9{,}8 \text{ m/s}^2} \cdot 0{,}1 \text{ m/s}^2$$

de donde:

$$\boxed{\text{P} = 198 \text{ N}}$$

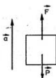


Fig. 6.1

6.4. ***Analizar el movimiento de una bola situada sobre el suelo perfectamente pulimentado de un autobús, cuando éste arranca con una aceleración $\vec{a}_a$:***

a) Considerando un sistema de referencia inercial ligado a Tierra.
b) Considerando un sistema de referencia no inercial solidario al autobús.

Solución:

a) Antes de arrancar el autobús, un observador situado sobre la Tierra, fuera del propio vehículo, comprueba que la bola está en reposo bajo la acción de sólo dos fuerzas: su propio peso, $m \cdot \vec{g}$, y la reacción del suelo, $\vec{N}$, iguales y de sentido contrario. Después de arrancar el autobús la bola permanece en la misma posición que antes respecto a la Tierra, deslizándose el suelo del vehículo sin lograr arrastrarla. Es lógica la observación efectuada, ya que las fuerzas que actúan ahora son las mismas que antes y la bola cumple con todo rigor el principio de inercia.

b) En este caso, antes de arrancar el autobús, la situación es la misma que en el apartado anterior: la resultante de las fuerzas que actúan sobre la bola es nula.

En el momento en que el autobús inicia su movimiento con una aceleración $\vec{a}_a$ el observador situado en el propio autobús se da cuenta de que la bola se mueve con la misma aceleración $\vec{a}_a$ hacia la parte trasera del vehículo. Como las fuerzas actuantes son las mismas, dicho observador, al ver que no se cumple el principio de inercia, intentará explicarlo admitiendo la existencia de una fuerza en sentido contrario al movimiento del autobús y cuyo valor será $(-m \cdot \vec{a}_a)$, siendo m la masa de la bola, la cual podemos decir que se encuentra en equilibrio dinámico.

6.5. ***Del techo de un autobús, que circula por una carretera totalmente horizontal, cuelga un péndulo simple, de masa m, el cual, cuando el autobús adquiere una aceleración $\vec{a}$, se desvía formando un ángulo φ con la vertical.***

Determinar la aceleración del autobús conociendo el ángulo φ y tomando como sistema de referencia:

a) *La Tierra.*
b) *El autobús.*

Razonar si será posible que en algún caso el péndulo alcance la posición horizontal.

Solución:

a) Para un observador situado en la Tierra (sistema de referencia inercial) las fuerzas que actúan sobre la masa del péndulo son su propio peso $(m \cdot \vec{g})$ y la tensión del hilo $(\vec{T})$. Dicho observador nota que la masa del péndulo experimenta una aceleración, $\vec{a}$, de la misma dirección y sentido que la del autobús, e interpreta dicha aceleración como causada (fig. 6.2) por una fuerza no equilibrada, que es la componente horizontal de la tensión del hilo.

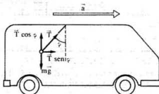


Fig. 6.2

En consecuencia, tenemos:

$$T \cdot \text{sen}\,\varphi = m \cdot a$$
$$T \cdot \cos\varphi = m \cdot g$$

Dividiendo miembro a miembro ambas expresiones:

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{a}{g}$$

de donde:

$$\boxed{a = g \cdot \text{tg}\,\varphi}$$

b) Para un observador ligado al autobús el péndulo está en reposo, sin aceleración. Para poder explicar esto, dicho observador se ve en la necesidad de introducir una fuerza ficticia, una fuerza que no existe para los observadores ligados a la Tierra: la fuerza de inercia, cuyo valor es $(-m \cdot \vec{a})$ y que actúa en sentido contrario al del movimiento del autobús. El observador transforma así el problema de Dinámica en uno de Estática, y llega, al final, al mismo resultado obtenido anteriormente.

El péndulo nunca puede alcanzar la posición horizontal, ya que al ser $m \neq 0$ tiene que cumplirse que:

$$T \cdot \cos\varphi \neq 0$$

y ello exige que:

$$\varphi < \frac{\pi}{2}$$

Por otra parte, carece de sentido considerar el caso límite $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ya que ni el motor del autobús es capaz de desarrollar potencias infinitas que le hagan adquirir una aceleración infinita, ni tampoco el hilo del péndulo puede soportar tensiones demasiado elevadas que tiendan a valores infinitos.

6.6. ***Un cuerpo está situado sobre la superficie perfectamente lisa de un plano inclinado de α grados de inclinación.***
¿Qué aceleración horizontal debemos comunicar al plano para que el cuerpo no deslice hacia abajo?

Solución: Mientras el plano permanezca en reposo, la componente $m \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha$ del peso del cuerpo hará que éste deslice hacia abajo con una aceleración $a = g \cdot \text{sen}\ \alpha$.

Si se desea que el cuerpo no deslice, debemos comunicar al plano una aceleración de arrastre (a_a) tal que la componente $F_i \cdot \cos \alpha$ de la fuerza de inercia equilibre a la componente $m \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha$ del peso del cuerpo.

En el diagrama de fuerzas representado en la figura 6.3 se habrá de cumplir que, según lo expuesto:

$$m \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha = F_i \cdot \cos \alpha = m \cdot a_i \cdot \cos \alpha$$

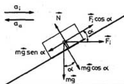


Fig. 6.3

de donde:

$$a_i = g \cdot \text{tg}\ \alpha$$

La aceleración de arrastre ha de tener sentido contrario a la de inercia, siendo iguales sus valores:

$$\boxed{\mathbf{a_a = g \cdot tg\ \alpha}}$$

6.7. ***Analizar el movimiento de una bola sobre el suelo perfectamente pulimentado de un autobús, cuando éste comienza a describir una curva con celeridad constante:***

a) ***Considerando un sistema de referencia inercial ligado a Tierra.***
b) ***Considerando un sistema de referencia no inercial ligado al autobús.***

Solución:

a) Un observador situado sobre la Tierra, fuera del autobús, comprueba que antes de que éste comience a tomar la curva, la bola se encuentra en equilibrio, con movimiento rectilíneo y uniforme, sometido a la acción de solamente dos fuerzas: su peso (m · g) y la reacción del suelo (N), iguales y de sentido contrario; se cumple, por consiguiente, el principio de inercia.

Cuando el autobús comienza a girar (la causa de ello es el rozamiento entre las ruedas y el suelo) la bola sigue en equilibrio, moviéndose en línea recta y con velocidad constante; lo cual es lógico, pues las fuerzas que actúan sobre la bola son las mismas que antes: su resultante es nula y, de acuerdo con el principio de inercia, la bola ha de continuar con su movimiento rectilíneo y uniforme.

Para el observador inercial el autobús se desvía a causa de la fuerza centrípeta (que no es otra que la de rozamiento), sin que pueda arrastrar consigo a la bola, ya que el suelo del autobús está perfectamente pulimentado.

b) Para un observador situado dentro del propio autobús, antes de tomar la curva, la bola se encuentra en reposo en el punto P (fig. 6.4), pues las fuerzas son las mismas que hemos descrito en el caso anterior y se cumple el principio de inercia.

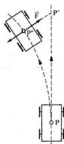


Fig. 6.4

Sin embargo, cuando el autobús comienza a girar se observa que la bola «parece» que adquiere una aceleración radial dirigida hacia el exterior de la curva y que, precisamente, es igual y de sentido contrario a la aceleración del autobús.

Como las fuerzas son las mismas que antes, para explicar dicha aceleración y evitar que no se cumplan el primero y segundo principios de la

Dinámica, es necesario suponer la existencia de una fuerza aparente, la fuerza centrífuga, dirigida de P″ a P′, y que no existe en absoluto para el observador situado en la Tierra, aunque la han de admitir los ocupantes del autobús para explicar los dos primeros principios de Newton, aunque así se viole el de acción y reacción.

6.8. *En el interior de la cabina de un ascensor, de 2,8 m de altura, se encuentra una persona de 75 kg.*

a) Calcular la fuerza que soporta el suelo del ascensor cuando sube con una aceleración constante de 1,4 m/s².
b) Calcular igualmente dicha fuerza cuando el ascensor desciende con la misma aceleración.
c) Ídem, en el caso de que el ascensor suba o baje con velocidad constante.
d) Cuando el ascensor está a 18 m del suelo se desprende una de las lámparas del techo.
Calcular, en el caso de que el ascensor esté subiendo con la aceleración indicada en a), el tiempo tardará la lámpara en chocar contra el suelo.

Solución:

a) Tomemos como sistema de referencia el propio ascensor (sistema no inercial).
El suelo del ascensor ha de soportar el peso de la persona (m · g) más la fuerza de inercia que actúa hacia abajo:

$$F = m \cdot g + F_i = m \cdot g + m \cdot a = m\,(g + a)$$

$$F = 75 \text{ kg } (9{,}8 + 1{,}4) \ \frac{m}{s^2} = \boxed{\mathbf{840\ N}}$$

También podemos considerar a la Tierra como sistema inercial de referencia.
Siguiendo este criterio, para calcular la fuerza que ejerce la persona sobre el suelo del ascensor, vamos a hallar, primero, la fuerza de reacción y aplicaremos, seguidamente, el tercer principio de la Dinámica. Es decir, determinamos, en primer lugar, la fuerza con que el suelo del ascensor empuja hacia arriba a la persona; la fuerza pedida es la de reacción a ésta. El diagrama de la figura 6.5 representa las fuerzas actuantes:

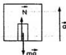


Fig. 6.5

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica:

$$N - m \cdot g = m \cdot a$$

de donde:

$$N = m \cdot g + m \cdot a = m\,(g + a) = 75\ \text{kg}\ (9{,}8 + 1{,}4)\ \frac{m}{s^2} = \boxed{840\ \text{N}}$$

La persona ejerce una fuerza igual y opuesta, dirigida hacia abajo, contra el suelo del ascensor.

b) Tomando como sistema de referencia el ascensor, el suelo de éste ha de soportar el peso de la persona (vertical hacia abajo), menos la fuerza de inercia (vertical hacia arriba):

$$F = m \cdot g - F_i = m \cdot g - m \cdot a = m\,(g - a)$$

$$F = 75\ \text{kg}\ (9{,}8 - 1{,}4)\ \frac{m}{s^2} = \boxed{630\ \text{N}}$$

Considerando a la Tierra como sistema de referencia inercial, teniendo en cuenta el diagrama de fuerzas representado en la figura 6.6, habrá de cumplirse que:

$$m \cdot g - N = m \cdot a$$

de donde:

$$N = m\,(g - a) = 75\ \text{kg}\ (9{,}8 - 1{,}4)\ \frac{m}{s^2} = \boxed{630\ \text{N}}$$

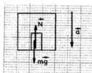


Fig. 6.6

La fuerza que ejerce la persona sobre el suelo del ascensor ha de ser igual y opuesta a la calculada.

c) En este caso el suelo del ascensor únicamente soporta el peso de la persona, ya que al no existir aceleración la fuerza de inercia es nula.
En consecuencia:

$$F = m \cdot g = 75\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{m}{s^2} = \boxed{735\ \text{N}}$$

d) En el instante en que se desprende la lámpara del techo el ascensor posee una velocidad vertical hacia arriba v. La lámpara ha de recorrer un espacio hacia abajo:

$$h - \left(v \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \right)$$

donde h es la altura de la cabina del ascensor y $\left(v \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \right)$ lo que asciende el suelo de éste mientras dura la caída de la lámpara. Fijémonos en que ésta, en el momento de desprenderse, posee la misma velocidad hacia arriba, v, que entonces tenía el ascensor.

Considerando positivas las magnitudes hacia abajo y negativas las ascendentes (si adoptáramos el criterio opuesto, el resultado final sería el mismo), tenemos:

$$h - \left(v \cdot t + \frac{1}{2} at^2 \right) = -v \cdot t + \frac{1}{2} gt^2$$

de donde:

$$t = \sqrt{\frac{2\,h}{g + a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}8 \text{ m}}{(9{,}8 + 1{,}4) \text{ m/s}^2}} = 0{,}707 \text{ s} \simeq \boxed{0{,}7 \text{ s}}$$

Otro criterio que puede seguirse para resolver este caso sería el siguiente:

En el instante en que se suelta la lámpara, como posee la misma velocidad v que el ascensor, ambos cuerpos (lámpara y ascensor) están en reposo relativo. Por tanto:

a') La lámpara cae una altura s en caída libre sin velocidad inicial:

$$s = \frac{1}{2} gt^2$$

b') El suelo del ascensor sube una altura s' con movimiento uniformemente acelerado, de aceleración a, sin velocidad inicial:

$$s' = \frac{1}{2} at^2$$

cumpliéndose que:

$$s + s' = \text{altura de la cabina}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{2} gt^2 + \frac{1}{2} at^2 = h$$

de donde:

$$t = \sqrt{\frac{2\,h}{g + a}}$$

y al sustituir datos:

$$\boxed{t = 0{,}7 \text{ s}}$$

6.9. *En los extremos de una cuerda que pasa por una polea sin rozamientos se colocan dos cuerpos de 8 y 12 kg, respectivamente.*

a) Dibujar un diagrama de las fuerzas que actúan.
b) Calcular la aceleración del sistema dejado en libertad.
c) ¿Qué tensión soporta la cuerda?
d) Calcular el tiempo que tardarán ambos cuerpos en desnivelarse 6 m, suponiendo que en el instante inicial estaban a la misma altura.

Solución:

a) El diagrama de fuerzas pedido viene representado en la figura 6.7, teniendo en cuenta que las tensiones T_1 y T_2 son iguales.

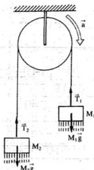


Fig. 6.7

b) Considerando las fuerzas que favorecen e impiden el movimiento del sistema, y aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica, se tiene:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g = \frac{(12 - 8) \text{ kg}}{(12 + 8) \text{ kg}} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = \boxed{1{,}96 \text{ m/s}^2}$$

c) Si consideramos el cuerpo de la derecha (que baja con una aceleración a), tenemos:

$$T = m_1 (g - a) = 12 \text{ kg } (9{,}8 - 1{,}96) \text{ m/s}^2 = \boxed{94{,}1 \text{ N}}$$

mientras que si nos fijamos en el cuerpo que sube con la misma aceleración (el de la izquierda):

$$T = m_2 (g + a) = 8 \text{ kg} (9{,}8 + 1{,}96) \text{ m/s}^2 = \boxed{94{,}1 \text{ N}}$$

d) Para que el desnivel entre ambos cuerpos sea de 6 m, cada uno de ellos ha de recorrer verticalmente 3 m. Como:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \text{ m}}{1{,}96 \text{ m/s}^2}} = \boxed{1{,}75 \text{ s}}$$

6.10. ***Atados a los dos extremos de una cuerda, de masa despreciable, que pasa por una polea pequeña sin rozamiento, cuya masa también se puede despreciar, cuelgan dos bloques idénticos, de 10 kg de masa cada uno, según se indica en la figura 6.8. Si queremos que uno de los dos bloques recorra en sentido descendente una distancia de 2,40 m en 2 segundos, partiendo del reposo, ¿qué sobrecarga, expresada en kilogramos, se le habrá de añadir?***

Solución: Hemos de calcular, en primer lugar, la aceleración del sistema. Al tratarse de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado sin velocidad inicial, tenemos:

$$s = \frac{1}{2} at^2$$

de donde:

$$a = \frac{2 \cdot s}{t^2} = \frac{2 \cdot 2{,}40 \text{ m}}{(2 \text{ s})^2} = 1{,}20 \text{ m/s}^2$$

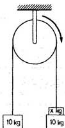


Fig. 6.8

Llamando m a la masa, expresada en kg, que ha de añadirse a uno de los bloques para conseguir esta aceleración, antes calculada, habrá de cumplirse que:

$$m \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = (20 + m) \text{ kg} \cdot 1{,}20 \text{ m/s}^2$$

de donde:

$$\boxed{m = 2{,}79 \text{ kg}}$$

6.11. *(*) **Dos pesas, una de 7 kg y otra de 8 kg, suspendidas verticalmente, están unidas por una cuerda ligera e inextensible que pasa por una polea fija cuya garganta es perfectamente lisa. Si se deja la polea en libertad, y suponiendo que inicialmente las pesas estaban a la misma altura, ¿a qué distancia vertical se encontrarán una de otra al cabo de 3 segundos? ¿Cuál será la tensión de la cuerda?***

Solución: Del diagrama de fuerzas representado en la figura 6.9 podemos deducir la aceleración con que se mueve el sistema una vez libre:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \cdot g = \frac{1 \text{ kg}}{15 \text{ kg}} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 =$$
$$= 0{,}653 \text{ m/s}^2$$

Supuesto el sistema inicialmente en reposo, el espacio que recorre cada cuerpo al cabo de 3 segundos (uno subiendo y otro bajando), será:

$$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}653 \text{ m/s}^2 \cdot (3 \text{ s})^2 = 2{,}94 \text{ m}$$

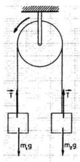


Fig. 6.9

Por tanto, la distancia que separa a dichos cuerpos en ese instante será:

$$d = 2 \cdot 2{,}94 \text{ m} = \boxed{\textbf{5,88 m}}$$

La tensión que soporta la cuerda puede calcularse a partir del cuerpo que sube o a partir del que baja.

a) Cuerpo que sube:

$$T = m_2 (g + a) = 7 \text{ kg} (9{,}8 + 0{,}653) \text{ m/s}^2 = \boxed{\textbf{73,2 N}}$$

b) Cuerpo que baja:

$$T = m_1 (g - a) = 8 \text{ kg} (9{,}8 - 0{,}653) \text{ m/s}^2 = \boxed{\textbf{73,2 N}}$$

6.12. ***En los extremos de una cuerda ligera y flexible que pasa por una pequeña polea sin rozamiento, de masas despreciables, están suspendidos dos bloques, A y B, de 200 g de masa cada uno. Sobre el bloque A se coloca una sobrecarga de 80 g, que se quita al cabo de 3 segundos.***

a) Hallar el espacio recorrido por cada bloque durante el primer segundo, después de haber quitado la sobrecarga.
b) Calcular la tensión de la cuerda antes y después de quitar la sobrecarga.

Solución:

a) La fuerza real que origina el movimiento es el peso de la sobrecarga:

$$F = m \cdot g = 0{,}08 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 0{,}784 \text{ N}$$

Como la masa que se mueve es la suma de las masas enlazadas:

$$M = 0{,}2 \text{ kg} + 0{,}2 \text{ kg} + 0{,}08 \text{ kg} = 0{,}48 \text{ kg}$$

aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica deducimos el valor de la aceleración del sistema:

$$a = \frac{F}{M} = \frac{0{,}784\ N}{0{,}48\ kg} = 1{,}633\ m/s^2$$

La velocidad de cada uno de los cuerpos, al cabo de 3 segundos, será:

$$v = v_o + at = 0 + 1{,}633\ m/s^2 \cdot 3\ s = 4{,}9\ m/s$$

Después de quitada la sobrecarga el sistema continúa moviéndose con velocidad constante (F = 0) de 4,9 m/s. Cada bloque recorrerá un espacio dado por:

$$s = v \cdot t = 4{,}9\ \frac{m}{s} \cdot 1\ s = \boxed{4{,}9\ m}$$

b) Si la cuerda y la polea son de masas despreciables, la tensión es la misma a ambos lados.

1) Antes de quitar la sobrecarga y atendiendo al cuerpo que baja:

$$T = m\ (g - a) = 0{,}28\ kg\ (9{,}8 - 1{,}633)\ m/s^2 = \boxed{2{,}3\ N}$$

2) Después de quitar la sobrecarga el sistema no tiene aceleración (F = 0) y la velocidad es constante. Por tanto:

$$T = m \cdot g = 0{,}2\ kg \cdot 9{,}8\ ms^2 = \boxed{1{,}96\ N}$$

6.13. ***Vamos a considerar ahora una máquina de Atwood en la que no podemos despreciar la masa de la cuerda, cuya densidad lineal es 0,1 kg/m. De los extremos de dicha cuerda, que tiene 6 m de longitud y que pasa por la garganta perfectamente lisa de una polea de masa despreciable, cuelgan dos bloques, A y B, de 10 kg de masa cada uno, que están inicialmente a la misma altura.***
Sobre el bloque A se coloca una sobrecarga de 2 kg.
Calcular:

a) La aceleración del sistema, dejado en libertad, en función de la distancia recorrida por uno de los bloques.
b) La aceleración inicial.
c) La aceleración cuando el desnivel entre los dos bloques es de 3 m.

Solución:

a) Consideremos el momento en que el bloque A ha descendido X metros y el bloque B ascendido otra distancia igual (fig. 6.10).
La fuerza causante del movimiento es la suma del peso de la sobrecarga y el de la cuerda correspondiente al desnivel 2X existente entre los dos bloques:

$$F = (2\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2) + \left(2X\ m \cdot \frac{0{,}1\ kg}{m} \cdot 9{,}8\ m/s^2\right) =$$
$$= (19{,}6 + 1{,}96\ X)\ N$$

La masa del sistema móvil es la suma de las masas de los bloques A y B (20 kg), la de la sobrecarga (2 kg) y la de la cuerda (0,6 kg).

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica:

$$a = \frac{F}{M} = \frac{(19{,}6 + 1{,}96\ X)\ N}{22{,}6\ kg} = \boxed{\mathbf{(0{,}867 + 0{,}0867 \cdot X)\ m/s^2}}$$

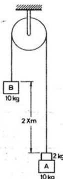


Fig. 6.10

b) Como en el instante inicial los dos bloques están a la misma altura, X = 0. En consecuencia:

$$\boxed{\mathbf{a_o = 0{,}867\ m/s^2}}$$

c) Si el desnivel es de 3 m, cada uno de los bloques recorrió 1,5 m. Por tanto, aplicando la expresión deducida en a):

$$a = (0{,}867 + 0{,}0867 \cdot 1{,}5)\ m/s^2 = 0{,}997\ m/s^2 \simeq \boxed{\mathbf{1\ m/s^2}}$$

6.14. ***Sobre una superficie horizontal sin rozamiento tenemos dos bloques, A y B, de 2 kg de masa cada uno, unidos por una cuerda. Si se tira del bloque A con una fuerza de 10 N, calcular la tensión de la cuerda de unión en cada uno de sus extremos:***

a) Si su masa es despreciable.
b) Si tiene una masa de 200 g.

Solución:

a) Al actuar sobre el sistema la fuerza de 10 N, la aceleración que éste adquiere es:

$$a = \frac{F}{m_A + m_B} = \frac{10\ N}{4\ kg} = 2{,}5\ m/s^2$$

Designemos por T_A y T_B las tensiones de la cuerda en sus puntos de unión con los bloques A y B, respectivamente, y aislemos el bloque A sobre el que actúan las fuerzas que vemos representadas en el diagrama de la figura 6.11.

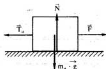


Fig. 6.11

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica, tenemos:

$$F - T_A = m_A \cdot a$$

de donde:

$$T_A = F - m_A \cdot a = 10\ N - 2\ kg \cdot 2{,}5\ m/s^2 = \boxed{5\ N}$$

Sobre el bloque B la única fuerza horizontal que actúa es T_B, que le comunica la aceleración a.
Por tanto:

$$T_B = m_B \cdot a = 2\ kg \cdot 2{,}5\ m/s^2 = \boxed{5\ N}$$

Vemos, pues, que **si la masa de la cuerda es despreciable, la tensión es constante a lo largo de toda ella.**

b) Calculemos, en primer lugar, la aceleración del sistema, designando por m_C la masa de la cuerda:

$$a' = \frac{10\ N}{2\ kg + 2\ kg + 0{,}2\ kg} = 2{,}38\ m/s^2$$

Aplicando al bloque A, sobre el que ahora actúan las fuerzas horizontales F y T_A, la ecuación fundamental de la Dinámica:

$$F - T_A = m_A \cdot a'$$

de donde:

$$T_A = F - m_A \cdot a' = 10\ N - 2\ kg \cdot 2{,}38\ m/s^2 = \boxed{5{,}24\ N}$$

La única fuerza horizontal que actúa sobre el bloque B es T_B, cuyo valor viene dado por:

$$T_B = m_B \cdot a' = 2 \text{ kg} \cdot 2{,}38 \text{ m/s}^2 = \boxed{\mathbf{4{,}76\ N}}$$

Se llega a la conclusión de que T_A es mayor que T_B, debiéndose la diferencia a la fuerza necesaria para comunicar a la masa m_C de la cuerda la aceleración a'.

Este resultado es completamente general: **si una cuerda tiene masa no despreciable, la tensión va disminuyendo conforme aumenta la distancia a la fuerza aplicada.**

6.15. ***Sobre la superficie completamente lisa del cono de revolución representado en la figura 6.12, que gira alrededor de su eje vertical OO' con una velocidad angular de 15 r.p.m. está situado el cuerpo A, de 2 kg de masa, sujeto al vértice del cono por un hilo inextensible y sin masa, de 4 m de longitud.***

Calcular:

a) La velocidad lineal del cuerpo A tomando como sistema de referencia la Tierra.
b) La reacción de la superficie del cono sobre el cuerpo.
c) La tensión del hilo.
d) La velocidad angular a que debe girar el cono para anular su fuerza de reacción sobre el cuerpo.

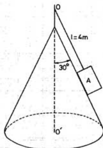


Fig. 6.12

Solución:

a) La velocidad angular del cono, en unidades internacionales, es:

$$\omega = 15 \ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \pi/2 \text{ rad/s}$$

Por otra parte:

$$r = l \cdot \text{sen } 30 = 4 \text{ m} \cdot 0{,}5 = 2 \text{ m}$$

En consecuencia:

$$v = \omega \cdot r = \frac{\pi}{2} \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 2 \text{ m} = \boxed{\pi \ \mathbf{m/s}}$$

b) Para resolver este apartado y los siguientes es cómodo tomar como sistema de referencia el propio cono de revolución. Las fuerzas reales que ac-

túan sobre el cono, representadas en el diagrama de la figura 6.13, son: su peso, m · g; la tensión del hilo, T, y la reacción de la superficie del cono, N, sobre el cuerpo.

La resultante de estas tres fuerzas le comunica al cuerpo A una aceleración dirigida hacia el centro de su trayectoria circular (aceleración centrípeta).

Para un observador en un sistema de referencia ligado al cono, el cuerpo A está en reposo, y para poder explicar esta circunstancia se ve obligado a introducir una fuerza ficticia, que no responde a ninguna interacción real, que sería la fuerza centrífuga, de valor:

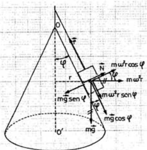


Fig. 6.13

$$F'_c = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

Proyectando todas las fuerzas en dos direcciones: la de la generatriz del cono y la de su perpendicular, tenemos:

$$N + m\omega^2 r \cos \varphi = mg \operatorname{sen} \varphi \qquad [1]$$

$$T = m\omega^2 r \operatorname{sen} \varphi + mg \cos \varphi \qquad [2]$$

De la ecuación [1] resulta:

$$N = m (g \operatorname{sen} \varphi - \omega^2 r \cos \varphi) =$$

$$= 2 \text{ kg} \left(9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0{,}5 - \frac{\pi^2}{4} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ m} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \boxed{\mathbf{1{,}25\ N}}$$

c) De la ecuación [2] se deduce que:

$$T = m (\omega^2 r \operatorname{sen} \varphi + g \cos \varphi) =$$

$$= 2 \text{ kg} \left(\frac{\pi^2}{4} \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot 2 \text{ m} \cdot 0{,}5 + 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \boxed{\mathbf{21{,}9\ N}}$$

d) Si en la ecuación [1] hacemos N = 0, resulta:

$$m\omega^2 r \cos \varphi = mg \operatorname{sen} \varphi$$

Despejando ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \operatorname{tg} \varphi}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0{,}577}{2 \text{ m}}} = \boxed{\mathbf{1{,}68\ \frac{rad}{s}}}$$

6.16. *(*) Un ciclista corre sobre una pista circular peraltada 30° respecto a la horizontal, describiendo su centro de gravedad una circunferencia de 65 m de radio.*

Calcular la velocidad angular que debe llevar el ciclista si desea mantener el plano de la bicicleta completamente perpendicular respecto al suelo de la pista, sin que vuelque.

Solución: Considerando al ciclista como sistema de referencia (véase fig. 6.14) no inercial, las fuerzas que actúan sobre él son: el peso, m · g; la fuerza centrífuga, F_c, y la reacción normal del suelo, N. Para que el plano de la bicicleta se mantenga perpendicular al suelo de la pista la resultante de las dos primeras fuerzas ha de ser perpendicular al plano, cumpliéndose que:

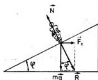


Fig. 6.14

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_c}{mg} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{mg} = \frac{\omega^2 \cdot r}{g}$$

de donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \operatorname{tg} \varphi}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0{,}577}{65 \text{ m}}} = \boxed{\mathbf{0{,}295\ rad/s}}$$

6.17. *¿Por qué podemos girar rápidamente en un plano vertical un cubo lleno de agua sin que ésta se derrame?*

Solución: Si la velocidad es lo suficientemente elevada, la fuerza centrífuga es superior al peso, por lo que el agua en todo momento se encuentra sometida a una resultante dirigida contra el fondo del cubo.

6.18. *Una partícula puntual de masa m, sujeta al extremo de una cuerda de longitud L, gira describiendo circunferencias verticales alrededor de un punto fijo O, que es el otro extremo de la cuerda.*

a) Demostrar que la velocidad de la partícula en el punto superior de la trayectoria es menor que en el inferior.
b) Calcular la tensión de la cuerda en ambos puntos.

Solución:

a) De acuerdo con el principio general de conservación de la energía, es evidente que:

$$\frac{1}{2}\ mv_1^2 + 2mgL = \frac{1}{2}\ mv_2^2$$

donde v_1 representa la velocidad de la partícula en el punto más alto de su trayectoria; v_2, la velocidad en el punto más bajo, y 2L, la máxima altura que alcanza, tal como se representa en la figura 6.15. Operando:

$$v_1^2 + 4\ gL = v_2^2$$

lo que demuestra que **necesariamente v_1 ha de ser menor que v_2.**

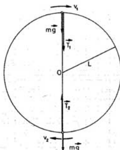


Fig. 6.15

b) Las fuerzas que actúan sobre la partícula en la máxima altura de su trayectoria son: su peso, mg, y la tensión T_1 de la cuerda, ambas de dirección vertical y sentido hacia abajo. En consecuencia:

$$T_1 + mg = \frac{m \cdot v_1^2}{L}$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{T_1 = m \left(\frac{v_1^2}{L} - g \right)}}$$

Análogamente, en el punto más bajo de la trayectoria (fig. 6.15):

$$T_2 - mg = \frac{mv_2^2}{L}$$

o también:

$$\boxed{\mathbf{T_2 = m \left(\frac{v_2^2}{L} + g \right)}}$$

6.19. ***Una partícula puntual de masa m, sujeta al extremo de una cuerda de longitud L, gira describiendo circunferencias horizontales de radio R, siendo v su celeridad (fig. 6.16). Al mismo tiempo, el hilo describe la superficie de un cono (péndulo cónico).***

Determinar el ángulo φ que forma la cuerda con la vertical, así como la tensión que experimenta.

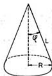


Fig. 6.16

Solución: Las fuerzas que experimenta la partícula cuando se encuentra en la posición representada en la figura 6.17 son: su peso, m · g, y la tensión T de la cuerda.

Descompongamos T en una componente horizontal, $T \cdot \text{sen}\ \varphi$, y en otra vertical, $T \cdot \cos \varphi$.

La partícula no tiene aceleración en sentido vertical, cumpliéndose que:

$$T \cos \varphi = mg \qquad [1]$$

La componente horizontal, no equilibrada, de la tensión origina la aceleración centrípeta de la partícula:

$$T \cdot \text{sen}\ \varphi = m \frac{v^2}{R} \qquad [2]$$

Dividiendo entre sí las ecuaciones [1] y [2], se tiene:

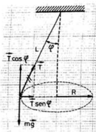


Fig. 6.17

$$\boxed{\mathbf{tg}\ \varphi = \frac{\mathbf{v^2}}{\mathbf{Rg}}}$$

Elevando al cuadrado las expresiones [1] y [2] y sumándolas, resulta:

$$T^2 = m^2 \left(\frac{v^4}{R^2} + g^2 \right)$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{T = m \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + g^2}}}$$

6.20. ***¿Para qué sirven los dibujos antideslizantes que llevan las cubiertas de los coches?***

Solución: Las irregularidades de los dibujos aumentan el valor de la fuerza de rozamiento, y así se logra que las ruedas no deslicen (patinen).

6.21. ***¿Por qué hay que poner «cadenas» a los coches si la carretera tiene nieve o está helada?***

Solución: Análoga a la de la cuestión anterior.

6.22. ***¿Por qué se dice que no hay mejor cuña que la de la misma madera?***

Solución: Al ser ambas superficies de la misma naturaleza, sus irregularidades encajan mejor, aumentando el valor de la fuerza de rozamiento.

6.23. ***Una plataforma circular, colocada horizontalmente, gira con una frecuencia de dos vueltas por segundo alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Sobre ella colocamos un objeto de madera, tal que el coeficiente estático de roza-***

miento entre el cuerpo y la plataforma es 0,4. Hallar la distancia máxima al eje de giro a la que debemos colocar el cuerpo para que éste gire con la plataforma sin ser lanzado al exterior.

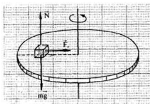


Fig. 6.18

Solución: Vamos a resolver primero el problema considerando como sistema de referencia la Tierra (fig. 6.18).

Para un observador situado en este sistema el objeto se mueve describiendo una circunferencia con velocidad angular ω y está sometido a la aceleración centrípeta $\omega^2 \cdot r$, originada por la fuerza no equilibrada, que es la fuerza de rozamiento, F_r.

Por tanto, tenemos:

$$N = mg$$
$$F_r = m \cdot \omega^2 \cdot r$$
$$F_r = \mu_e \cdot N = \mu_e \cdot mg$$

de donde:

$$r = \frac{\mu_e \cdot g}{\omega^2} = \frac{0{,}4 \cdot 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{(4\pi \text{ rad/s})^2} = 0{,}025 \text{ m} = \boxed{\mathbf{2{,}5 \text{ cm}}}$$

El problema también puede resolverse considerando como sistema de referencia la propia plataforma (sistema no inercial).

Para un observador situado en este sistema el objeto está en reposo y, por tanto, no tiene aceleración. Para explicar esto ha de introducir una fuerza ficticia de inercia que contrarreste el rozamiento: la fuerza centrífuga (fig. 6.19).

En este caso tenemos:

$$N = mg$$
$$F_r = F_c = m\omega^2 r$$

y como $F_r = \mu_e \cdot N = \mu_e \cdot mg$, resulta:

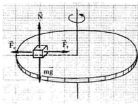


Fig. 6.19

$$\mu_e \cdot mg = F_c = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

Despejando r y sustituyendo valores se obtiene el mismo resultado que en el procedimiento anterior.

En resumen: considerando como sistema de referencia la Tierra (sistema inercial), se trata de un problema de Dinámica; mientras que si el sistema de referencia es la propia plataforma (sistema no inercial), el problema queda reducido a uno de Estática.

6.24. ***Calcular el valor mínimo del radio que puede tener una curva de la carretera, de ángulo de peralte θ, para que un automóvil que la recorre a la velocidad v no se deslice hacia el exterior, siendo μ el coeficiente de rozamiento dinámico.***

Solución: Para resolver el problema consideremos como sistema de referencia el propio automóvil, que se encuentra en reposo, sometido a las fuerzas cuyo diagrama vemos representado en la figura 6.20.

De él se deduce que:

$$N \cos\theta = mg + F_r \operatorname{sen}\theta$$

$$F_r \cos\theta + N \operatorname{sen}\theta = F_c$$

Como $F_r = \mu \cdot N$, resulta:

$$N \cos\theta = mg + \mu N \operatorname{sen}\theta$$

$$\mu \cdot N \cos\theta + N \operatorname{sen}\theta = F_c$$

Estas dos ecuaciones equivalen a:

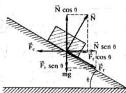


Fig. 6.20

$$mg = N(\cos\theta - \mu \operatorname{sen}\theta)$$

$$F_c = N(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta)$$

Dividiendo miembro a miembro ambas expresiones:

$$\frac{mg}{F_c} = \frac{\cos\theta - \mu \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta} = \frac{1 - \mu \operatorname{tg}\theta}{\mu + \operatorname{tg}\theta}$$

Como F_c, la fuerza centrífuga, tiene de valor $\frac{mv^2}{r}$, sustituyendo en la anterior expresión, tenemos:

$$\frac{mg}{\frac{mv^2}{r}} = \frac{rg}{v^2} = \frac{1 - \mu \operatorname{tg}\theta}{\mu + \operatorname{tg}\theta}$$

y, por último:

$$\boxed{r = \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1 - \mu \operatorname{tg}\theta}{\mu + \operatorname{tg}\theta}}$$

Podemos distinguir dos casos particulares:

a) Si no hay peralte: $\text{tg}\ \theta = 0$:

$$r = \frac{v^2}{\mu \cdot g}$$

b) Si no hay rozamiento: $\mu = 0$:

$$\text{tg}\ \theta = \frac{v^2}{rg}$$

6.25. ***En los parques de atracciones de muchas ciudades puede verse con frecuencia a los motoristas que trabajan en el «tubo de la muerte». Uno de estos tubos tiene un diámetro de 8 m.***

Calcular la velocidad mínima que ha de llevar el motorista para no caerse, sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre las ruedas de la motocicleta y la pared es 0,4.

Solución: Considerando a la Tierra como sistema de referencia (inercial), tenemos según se indica en la figura 6.21:

$$F_r = mg$$

$$N = m\ \frac{v^2}{r}$$

Como $F_r = \mu \cdot N$:

$$F_r = mg = \mu \cdot N = \mu \cdot m\ \frac{v^2}{r}$$

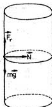


Fig. 6.21

de donde:

$$v = \sqrt{\frac{rg}{\mu}} = \sqrt{\frac{4\ \text{m} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{0{,}4}} = \boxed{\mathbf{10\ m/s}}$$

Si el sistema de referencia es la propia motocicleta (sistema no inercial) (fig. 6.22):

$$F_r = mg$$

$$N = F_c \text{ (fuerza centrífuga)}$$

Como $F_r = \mu \cdot N$:

$$F_r = mg = \mu \cdot N = \mu \cdot F_c = \mu \cdot m\ \frac{v^2}{r}$$

Despejando v y sustituyendo datos se obtiene el mismo resultado que en el procedimiento anterior:

$$\boxed{\mathbf{v = 10\ m/s}}$$

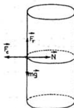


Fig. 6.22

6.26. *(*) Se ejerce una fuerza de 12 N en dirección horizontal contra un bloque A, de 4 kg, el cual empuja, a su vez, a otro bloque B, de 2 kg, conforme se indica en la figura 6.23.*

Calcular la aceleración del sistema y la fuerza que ejerce cada bloque sobre el otro:

a) Si ambos bloques se encuentran sobre una superficie lisa.

b) Si los coeficientes de rozamiento dinámico entre los bloques A y B y la superficie son, respectivamente, 0,1 y 0,2.



Fig. 6.23

Solución:

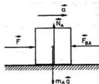
a) La fuerza que produce el movimiento del sistema es la horizontal de 12 N, y la masa total del sistema móvil es 4 kg + 2 kg = 6 kg. La aceleración del sistema valdrá:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{12\ \text{N}}{6\ \text{kg}} = \boxed{2\ \text{m/s}^2}$$

Consideremos ahora un bloque aislado; por ejemplo, el A. El diagrama de las fuerzas que actúan sobre él es el representado en la figura 6.24.

En ella representamos por F_{BA} la fuerza que el bloque B ejerce sobre el A (la que A ejerce sobre B tendrá el mismo módulo y dirección, pero su sentido será contrario al anterior).

De acuerdo con el diagrama, tenemos:



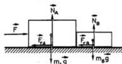
$$F - F_{BA} = m_A \cdot a_A$$

Fig. 6.24

de donde:

$$F_{BA} = F - m_A \cdot a_A = 12\ \text{N} - 4\ \text{kg} \cdot 2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \boxed{4\ \text{N}}$$

b) En la figura 6.25 se representa el diagrama de las fuerzas que actúan en este caso sobre el sistema formado por los dos bloques, considerados en su conjunto, cumpliéndose que:



$$F - F_{rA} - F_{rB} = (m_A + m_B) \cdot a$$

y como:

Fig. 6.25

$$F_{rA} = \mu_A \cdot N_A = \mu_A \cdot m_A \cdot g$$
$$F_{rB} = \mu_B \cdot N_B = \mu_B \cdot m_B \cdot g$$

sustituyendo, resulta:

$$F - (\mu_A \cdot m_A + \mu_B \cdot m_B) \cdot g = (m_A + m_B) \cdot a$$

Despejando a y sustituyendo datos:

$$a = \frac{12\ N - (0{,}1 \cdot 4\ kg + 0{,}2 \cdot 2\ kg) \cdot 9{,}8\ m/s^2}{6\ kg} = \boxed{0{,}69\ m/s^2}$$

Consideremos, ahora, aisladamente el bloque A sobre el que actúan las fuerzas esquematizadas en la figura 6.26. En este caso se cumple que:

$$F - F_{BA} - F_{rA} = m_A \cdot a$$

de donde:

$$F_{BA} = F - F_{rA} - m_A \cdot a$$

Teniendo en cuenta que:

$$F_{rA} = \mu_A \cdot m_A \cdot g$$

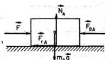


Fig. 6.26

sustituyendo datos, resulta:

$$F_{BA} = 12\ N - 0{,}1 \cdot 4\ kg \cdot 9{,}8\ m \cdot s^{-2} - 4\ kg \cdot 0{,}69\ m \cdot s^{-2} = \boxed{5{,}3\ N}$$

6.27. *Un bloque de masa m_1, que se encuentra sobre una superficie horizontal sin rozamiento, se une mediante una cuerda ligera, que pasa por una polea sin rozamiento y de masa despreciable, a un segundo bloque, suspendido, de masa m_2.*

a) ¿Cuál es la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda?
b) ¿Cómo se modifican estos resultados si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es μ?

Solución:

a) Según vemos en el diagrama de fuerzas actuantes (fig. 6.27), se tiene:

En el bloque suspendido:

$$m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a \qquad [1]$$

En el bloque apoyado:

$$T = m_1 \cdot a \qquad [2]$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones [1] y [2]:

$$\boxed{a = \frac{m_2 \cdot g}{m_1 + m_2}}$$

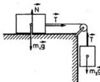


Fig. 6.27

sustituyendo este valor en la ecuación [2]: $\boxed{T = \dfrac{m_1 \cdot m_2 \cdot g}{m_1 + m_2}}$

b) En el caso de haber rozamiento, el diagrama de fuerzas sería el de la figura 6.28.

Cumpliéndose:

- En el bloque suspendido:

$m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a$ [1]

- En el bloque apoyado:

$N = m_1 \cdot g$

$F_r = \mu \cdot N = \mu \cdot m_1 \cdot g$

$T - F_r = m_1 \cdot a$

Fig. 6.28

de donde:

$$T - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \qquad [2]$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones [1] y [2], se obtiene:

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{\mathbf{m_2 - \mu m_1}}{\mathbf{m_1 + m_2}} \cdot \mathbf{g}}$$

que, al sustituir en [1]:

$$\boxed{\mathbf{T} = \frac{\mathbf{m_1 \cdot m_2 (1 + \mu)}}{\mathbf{m_1 + m_2}} \cdot \mathbf{g}}$$

Fácilmente se comprueba que si en estas dos últimas expresiones suponemos que $\mu = 0$ (no hay rozamiento), obtenemos las correspondientes al apartado anterior.

6.28. ***La figura 6.29 a) representa un bloque de 100 g que descansa sobre otro de 900 g, siendo arrastrado el conjunto con velocidad constante sobre una superficie horizontal, merced a la acción de un cuerpo de 100 g que cuelga suspendido de un hilo, tal como indica la misma figura.***

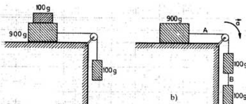


Fig. 6.29

a) *Si el primer bloque de 100 g lo separamos del de 900 g y lo unimos al bloque suspendido (fig. 6.29 b), el sistema adquiere una cierta aceleración en el sentido indicado por la flecha. Calcular el valor de esta aceleración.*
b) *¿Cuál es la tensión de las dos cuerdas en la figura 6.29 b)?*

Solución: Calcularemos, en principio, el coeficiente dinámico de rozamiento entre el bloque de 900 g y la superficie horizontal de deslizamiento. Para ello hemos de considerar el diagrama de fuerzas correspondiente al apartado a) del problema (fig. 6.30).

En el bloque suspendido se cumple que:

$$m_2 g - T = m_2 \cdot a = 0$$

de donde:

$$T = m_2 \cdot g \qquad [1]$$

En los bloques apoyados se cumple que:

$$T - F_r = (m_1 + m_2) \cdot a = 0; \; T = F_r \qquad [2]$$

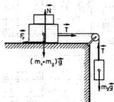


Fig. 6.30

y como:

$$F_r = \mu \cdot N = \mu\,(m_1 + m_2) \cdot g = T$$

Igualando las expresiones [1] y [2]:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}1 \text{ kg}}{1 \text{ kg}} = 0{,}1$$

a) Una vez calculado el coeficiente dinámico de rozamiento nos fijaremos en la nueva disposición adquirida por los bloques, contemplada en el diagrama de la figura 6.31, que, a su vez, esquematiza la acción de las fuerzas actuantes.

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica al conjunto de los bloques suspendidos, se tiene:

$$2\, m_2 \cdot g - T_A = 2 \cdot m_2 \cdot a \qquad [3]$$

mientras que si la aplicamos al bloque apoyado, resulta:

$$T_A - F_r = m_1 \cdot a$$

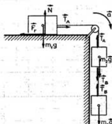


Fig. 6.31

pero como:

$$F_r = \mu \cdot N = \mu \cdot m_1 \cdot g$$

al sustituir en la ecuación anterior, se obtiene:

$$T_A - \mu \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \qquad [4]$$

Sumando las ecuaciones [3] y [4], tenemos:

$$2\, m_2 \cdot g - \mu \cdot m_1 \cdot g = (m_1 + 2\, m_2) \cdot a$$

de donde:

$$a = \frac{(2\, m_2 - \mu m_1)\, g}{m_1 + 2\, m_2} = \frac{2 \cdot 0{,}1 \text{ kg} - 0{,}1 \cdot 0{,}9 \text{ kg}}{1{,}1 \text{ kg}} \cdot$$

$$\cdot\, 9{,}8 \text{ m/s}^2 = \boxed{0{,}98 \text{ m/s}^2}$$

b) Determinemos, por último, las tensiones en las dos cuerdas. Despejando T_A en la ecuación [3], resulta $T_A = 2\, m_2\, (g - a)$, y al sustituir datos nos da el valor de **1,764 N.**

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica al bloque colgante inferior, se cumple que $m_2 \cdot g - T_B = m_2 \cdot a$.
Despejando T_B y sustituyendo datos:

$$T_B = m_2\, (g - a) = 0{,}1 \text{ kg } (9{,}8 - 0{,}98) \text{ m/s}^2 = \boxed{0{,}882 \text{ N}}$$

6.29. ***Sabiendo que en el sistema de la figura 6.32 el coeficiente dinámico de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,25, calcular:***

a) La aceleración del movimiento.
b) La tensión de cada cuerda.

Solución: El diagrama de las fuerzas que actúan sobre los tres bloques viene representado en la figura 6.33.

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica a cada uno de los tres bloques, se tiene:

$$m_3 \cdot g - T_B = m_3 \cdot a \qquad [1]$$

$$T_B - T_A - F_r = m_2 \cdot a \qquad [2]$$

$$T_A - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a \qquad [3]$$

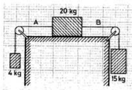
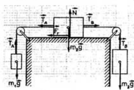


Fig. 6.32


Fig. 6.33

Sabemos que la fuerza de rozamiento F_r viene dada por la expresión:

$$F_r = \mu \cdot N = \mu \cdot m_2 \cdot g$$

Sustituyendo en [2], nos resulta el sistema:

$$m_3 \cdot g - T_B = m_3 \cdot a$$
$$T_B - T_A - \mu m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$
$$T_A - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$$

en el que a, T_A y T_B son las incógnitas. Sumando miembro a miembro estas tres ecuaciones se obtiene el valor de a, una vez sustituidos los datos:

$$\boxed{a = 1{,}51 \text{ m/s}^2}$$

que, llevado a las ecuaciones [1] y [3] nos permite deducir T_B y T_A:

$$\boxed{T_B = 125 \text{ N}} \qquad \boxed{T_A = 45 \text{ N}}$$

6.30. ***En el sistema de la figura 6.34, en el cual el coeficiente de rozamiento dinámico entre los bloques de 15 kg y 20 kg y la superficie de la mesa es 0,25, se pide calcular:***

a) La aceleración del movimiento.
b) La tensión de las tres cuerdas.

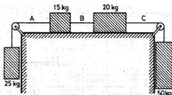


Fig. 6.34

Solución:

a) Es evidente que el sistema, en el caso de moverse, lo hará en el sentido indicado en la flecha, según se señala en el diagrama de la figura 6.35.

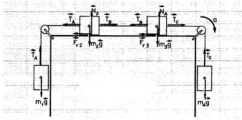


Fig. 6.35

De su estudio podemos deducir que:

$$a = \frac{m_4 \cdot g - m_1 \cdot g - (F_{r,2} + F_{r,3})}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} =$$

$$= \frac{m_4 - m_1 - \mu\,(m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \cdot g =$$

$$= \frac{50\text{ kg} - 25\text{ kg} - 0{,}25\,(15\text{ kg} + 20\text{ kg})}{110\text{ kg}} \cdot 9{,}8\text{ m/s}^2 = \boxed{\mathbf{1{,}45\ m/s^2}}$$

b) Aplicando ahora la ecuación fundamental de la Dinámica al bloque m_4, resulta:

$$m_4 \cdot g - T_C = m_4 \cdot a$$

de donde:

$$T_C = m_4\,(g - a) = 50\text{ kg}\,(9{,}8 - 1{,}45)\text{ m/s}^2 = \boxed{\mathbf{417{,}6\ N}}$$

Aplicándola al bloque m_3:

$$T_C - T_B - \mu \cdot m_3 \cdot g = m_3 \cdot a$$

Despejando T_B y sustituyendo datos:

$$\boxed{\mathbf{T_B = 339{,}6\ N}}$$

Repitiendo el mismo criterio para el bloque m_1:

$$T_A - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$$

podemos calcular T_A:

$$\boxed{\mathbf{T_A = 281{,}2\ N}}$$

6.31. *Sobre un plano inclinado 30° con respecto a la horizontal, se encuentra un cuerpo de 30 kg de masa, unido por una cuerda, que pasa por una pequeña polea sin rozamiento, a un segundo bloque de 25 kg de masa, pendiente, de la cuerda, según se indica en la figura 6.36.*

Calcular la aceleración con que se mueve el sistema y la tensión de la cuerda:

a) Si no existe rozamiento.
b) Si el coeficiente dinámico de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,2.

Nota: *Tómese g = 10 m/s²; sen 30° = = 0,5; cos 30° = 0,866.*

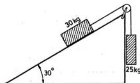


Fig. 6.36

Solución:

a) Supongamos que el sentido del movimiento del sistema sea el especificado en la figura 6.37. En el caso de que la aceleración salga negativa implicará, dado que no existe rozamiento, que el movimiento del sistema es en sentido opuesto al elegido, con una aceleración igual en valor absoluto a la acabada de obtener.

Si fuese nula dicha aceleración, el sistema estaría en reposo o se movería en cualquiera de los dos sentidos con velocidad constante.

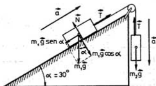


Fig. 6.37

En el bloque que cuelga de la cuerda se cumplirá que:

$$m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a$$

y en el bloque apoyado:

$$T - m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\ \alpha = m_1 \cdot a$$

Sumando ambas expresiones y despejando a:

$$a = \frac{m_2 - m_1 \text{ sen } \alpha}{m_1 + m_2} \cdot g = \frac{25 \text{ kg} - 30 \text{ kg} \cdot 0{,}5}{55 \text{ kg}} \cdot$$

$$\cdot\ 10 \text{ m/s}^2 = \boxed{\mathbf{1{,}8 \text{ m/s}^2}}$$

El valor de T se deduce de cualquiera de las dos ecuaciones citadas:

$$T = m_2 (g - a) = 25 \text{ kg } (10 - 1{,}8) \text{ m/s}^2 = \boxed{\mathbf{205 \text{ N}}}$$

b) Supongamos, al igual que en el caso anterior, que el movimiento del sistema sea hacia la derecha. No obstante, al existir rozamiento, hemos de tener en cuenta que si la aceleración es negativa, se precisa dibujar un nuevo diagrama de fuerzas y repetir los cálculos, dado que las fuerzas de rozamiento siempre actúan en sentido contrario al de movimiento.

La figura 6.38 explicita las fuerzas actuantes según el criterio expuesto.

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica al bloque que cuelga, se tiene:

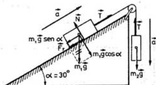


Fig. 6.38

$$m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a \qquad [1]$$

y aplicada al bloque apoyado:

$$T - m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha - F_r = m_1 \cdot a \qquad [2]$$

Como $F_r = \mu \cdot N = \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$:

$$T - m_1 \cdot g\,\text{sen}\,\alpha - \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha = m_1 \cdot a \qquad [3]$$

Sumando las ecuaciones [1] y [3], despejando a y sustituyendo datos:

$$a = \frac{m_2 - (\text{sen}\,\alpha + \mu\cos\alpha)\cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot g =$$

$$= \frac{25\text{ kg} - (0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}866)\cdot 30\text{ kg}}{55\text{ kg}} \cdot 10\text{ m/s}^2 = \boxed{0{,}87\text{ m/s}^2}$$

Sustituyendo el valor de a en la ecuación [1]:

$$T = m_2\,(g - a) = 25\text{ kg}\,(10 - 0{,}87)\text{ m/s}^2 = \boxed{228\text{ N}}$$

Nota: Obsérvese que en la expresión de la aceleración obtenida si hacemos $\mu = 0$, resulta la deducida en el apartado a).

6.32. *Dos bloques, de 8 kg y 4 kg, respectivamente, que están unidos por una cuerda (fig. 6.39), deslizan hacia abajo sobre un plano de 30° de inclinación. Los coeficientes dinámicos de rozamiento entre ambos bloques y el plano son, respectivamente, 0,25 y 0,40.*

Calcular:

a) La aceleración de cada bloque.

b) La tensión de la cuerda.

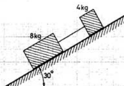


Fig. 6.39

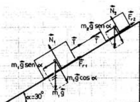


Fig. 6.40

Solución:

a) El diagrama de las fuerzas que actúan sobre los dos bloques es el representado en la figura 6.40.

Interesa estudiar las componentes paralelas al plano:

$$m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha - T - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha = m_1 \cdot a \qquad [1]$$

$$T + m_2 \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos\alpha = m_2 \cdot a \qquad [2]$$

Sumando ambas ecuaciones y despejando a:

$$a = \frac{(m_1 + m_2) \text{ sen } \alpha - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) \cos \alpha}{m_1 + m_2} \cdot g =$$

$$= \frac{(8 + 4) \text{ kg} \cdot 0{,}5 - (0{,}25 \cdot 8 + 0{,}40 \cdot 4) \text{ kg} \cdot 0{,}866}{12 \text{ kg}} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 =$$

$$= \boxed{2{,}35 \text{ m/s}^2}$$

b) Despejando T en la ecuación [1] y sustituyendo el valor calculado de a:

$$T = m_1 [g (\text{sen } \alpha - \mu_1 \cos \alpha) - a] =$$

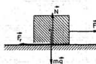
$$= 8 \text{ kg } [9{,}8 \text{ m/s}^2 (0{,}5 - 0{,}25 \cdot 0{,}866) - 2{,}35 \text{ m/s}^2] = \boxed{3{,}4 \text{ N}}$$

6.33. ***Tenemos un bloque de 10 kg de masa que se puede mover con velocidad constante sobre una superficie horizontal bajo la acción de una fuerza, también horizontal, de 19,6 N.***

Si inclinamos dicha superficie de manera que forme un ángulo de 45° sobre la horizontal, ¿qué fuerza paralela al plano necesitamos aplicar para que el bloque deslice hacia arriba con una aceleración de 2 m/s²?

Solución: Consideremos el diagrama de fuerzas representado en la figura 6.41, donde se indican las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando éste se encuentra sobre la superficie horizontal.

Basándonos en él y recordando que si posee velocidad constante, la aceleración es nula:



$$F = F_r = \mu \cdot mg = 19{,}6 \text{ N}$$

Fig. 6.41

de donde:

$$\mu = \frac{19{,}6 \text{ N}}{9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ kg}} = 0{,}20$$

Al inclinar la superficie las fuerzas actuantes son las representadas en el diagrama de la figura 6.42.

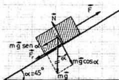


Fig. 6.42

$$F - mg \text{ sen } \alpha - F_r = m \cdot a$$

O también:

$$F - mg \text{ sen } \alpha - \mu mg \cos \alpha = m \cdot a$$

Despejando F y sustituyendo los datos del problema y los calculados, obtenemos para F el valor de

$$\boxed{F = 103 \text{ N}}$$

6.34. *(*) Un cuerpo de 100 kg se mueve sobre una superficie horizontal bajo la acción de una fuerza de 100 kp que forma un ángulo de −37° por debajo de la horizontal. El coeficiente de rozamiento dinámico entre el cuerpo y la superficie es 0,25.*
Calcular la aceleración con que se mueve el cuerpo.
Datos: g = 10 m/s²; sen 37° = 0,6; cos 37° = 0,8.

Solución: El diagrama de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es el representado en la figura 6.43. De él se deduce que:

$$N = mg + F \operatorname{sen} \alpha$$
$$F \cdot \cos \alpha - F_r = m \cdot a$$

Como la fuerza de rozamiento es: $F_r = \mu \cdot N$:

$$F_r = \mu \, (mg + F \operatorname{sen} \alpha)$$

y, por tanto:

$$F \cos \alpha - \mu \, (mg + F \operatorname{sen} \alpha) = m \cdot a$$

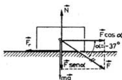


Fig. 6.43

De donde:

$$a = \frac{F \cos \alpha - \mu \, (mg + F \operatorname{sen} \alpha)}{m} =$$

$$= \frac{1\,000 \text{ N} \cdot 0{,}8 - 0{,}25\,(100 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 + 1\,000 \text{ N} \cdot 0{,}6)}{100 \text{ kg}} = \boxed{4 \text{ m/s}^2}$$

Nota: Obsérvese que la fuerza de 100 kp ha de expresarse en newtons:

$$100 \text{ kp} = 100 \text{ kp} \cdot \frac{10 \text{ N}}{1 \text{ kp}} = 1\,000 \text{ N}$$

o más exactamente:

$$100 \text{ kp} = 100 \text{ kp} \cdot \frac{9{,}81 \text{ N}}{1 \text{ kp}} = 981 \text{ N}$$

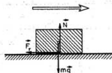
6.35. *(*) Un automóvil de 1 400 kg mantiene una velocidad de 90 km/h. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos y la carretera es 0,25 y tomando como valor de g 10 m/s², calcular:*

a) La fuerza máxima de frenado cuando las ruedas se bloquean y la distancia que recorrerá durante el frenado.
b) La velocidad máxima a que puede tomar una curva no peraltada de 360 m de radio sin que el coche derrape.

Solución:

a) Al bloquearse las ruedas, las fuerzas que actúan sobre el vehículo son las representadas en el diagrama de la figura 6.44, a partir del cual deducimos que:

$$N = mg$$
$$-F_r = m \cdot a$$



puesto que la fuerza de rozamiento es de sentido contrario al del movimiento (fuerza de frenado).

Como el valor de F_r viene dado por:

$F_r = \mu \cdot N = \mu \cdot mg = 0{,}25 \cdot$
$\cdot 1\,400 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = \boxed{3\,500 \text{ N}}$

Fig. 6.44

El valor de la aceleración (negativa) del móvil será:

$$a = \frac{-F_r}{m} = \frac{-3\,500 \text{ N}}{1\,400 \text{ kg}} = -2{,}5 \text{ m/s}^2$$

El espacio recorrido lo deduciremos a partir de las dos ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente retardado ($v_o = 25$ m/s; $v = 0$) o, más directamente, a partir de la expresión, ya conocida:

$$s = \frac{v^2 - v_o^2}{2 \cdot a} = \frac{0 - 25^2 \text{ (m/s)}^2}{2 \cdot (-2{,}5) \text{ m/s}^2} = \boxed{125 \text{ m}}$$

b) Cuando el coche toma la curva no peraltada la fuerza centrípeta que actúa sobre él es, precisamente, la fuerza de rozamiento. Por tanto:

$$F_r = \mu \cdot N = \mu mg = m \frac{v^2}{r}$$

de donde:

$$v = \sqrt{\mu \cdot r \cdot g} = \sqrt{0{,}25 \cdot 360 \text{ m} \cdot 10 \text{ m/s}^2} = \boxed{30 \text{ m/s}}$$

6.36. ***Un cuerpo desliza hacia abajo con velocidad constante sobre un plano de $\alpha°$ de inclinación. Si aumentamos la pendiente del plano hasta un ángulo φ, tal que $\varphi > \alpha$, ¿con qué aceleración deslizará hacia abajo ese mismo cuerpo?***

Solución: Cuando un cuerpo desliza hacia abajo con velocidad constante por un plano inclinado $\alpha°$ sobre la horizontal (movimiento uniforme) la tangente de dicho ángulo α coincide numéricamente con el coeficiente de rozamiento dinámico del cuerpo contra el plano. Por tanto:

$$\mu = \text{tg } \alpha$$

Si el cuerpo desliza por un plano inclinado $\varphi°$ sobre la horizontal, la aceleración de caída viene dada por:

$$a = g (\text{sen } \varphi - \mu \cos \varphi)$$

En consecuencia:

$$\boxed{\mathbf{a = g (sen\ \varphi - tg\ \alpha \cdot cos\ \varphi)}}$$

6.37. ***Un bloque desliza hacia abajo con velocidad constante sobre un plano de α° de inclinación. Después se lanza hacia arriba sobre el mismo plano con una velocidad inicial v_o.***

a) ¿Qué distancia recorrerá sobre el plano antes de detenerse?
b) ¿Qué le sucederá en ese momento: resbalará hacia abajo de nuevo o, por el contrario, permanecerá indefinidamente en reposo?

Solución:

a) Cuando el bloque desliza hacia abajo con velocidad constante, su coeficiente de rozamiento contra el plano coincide con la tangente del ángulo de inclinación:

$$\mu = \text{tg } \alpha$$

La aceleración (negativa) a la que está sometido un cuerpo cuando desliza ascendiendo por un plano inclinado α° sobre la horizontal viene dada por:

$$a = -g (\text{sen } \alpha + \mu \cos \alpha)$$

Por tanto, en este caso:

$$a = -g (\text{sen } \alpha + \text{tg } \alpha \cos \alpha) = -g \left(\text{sen } \alpha + \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos \alpha \right) =$$

$$= -2 \text{ g sen } \alpha$$

Sustituyendo en la expresión, ya conocida, $v^2 = v_o^2 + 2$ as y considerando que en el punto de máxima altura $v = 0$, se tiene:

$$0 = v_o^2 - 2 (2g \cdot \text{sen } \alpha) \cdot s$$

de donde:

$$\boxed{s = \frac{v_o^2}{4 \text{ g sen } \alpha}}$$

b) Una vez que se detenga, **permanecerá en reposo indefinidamente,** ya que, en este caso, la fuerza de rozamiento anula a la componente del peso del cuerpo en la dirección del plano. Recuérdese que el problema exigía una velocidad constante (a = 0) y, en consecuencia, no hay fuerza efectiva actuando sobre el cuerpo.

6.38. *(*) Dos bloques de 300 kg y 40 kg descansan sobre dos planos inclinados, tal como se indica en la figura 6.45. Están unidos por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea sin rozamiento.*
Calcular:

a) La aceleración con que se mueve el sistema.
b) La tensión de la cuerda.

El coeficiente de rozamiento entre los bloques y el plano es 0,3.

Datos:

g = 10 m/s²;
sen 53° = 0,8;
sen 37° = 0,6.

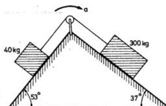


Fig. 6.45

Solución:

a) El diagrama de las fuerzas que actúan sobre los bloques es el representado en la figura 6.46.

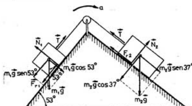


Fig. 6.46

Si consideramos como positivo el movimiento hacia la derecha, tenemos que:

- En el bloque de la derecha:

$$m_2 \cdot g \cdot \text{sen } 37° - T - F_{r(2)} = m_2 \cdot a$$

y como $F_{r(2)} = \mu N_2 = \mu \cdot m_2 \cdot g \cos 37°$, resulta:

$$m_2 \cdot g \cdot \text{sen } 37° - T - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos 37° = m_2 \cdot a \qquad [1]$$

- En el bloque de la izquierda:

$$T - m_1 \cdot g \cdot \text{sen } 53° - \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos 53° = m_1 \cdot a \qquad [2]$$

Sumando miembro a miembro las expresiones [1] y [2] y despejando a, resulta:

$$a = \frac{m_2 \cdot \text{sen } 37° - m_1 \cdot \text{sen } 53° - \mu\,(m_2 \cdot \cos 37° + m_1 \cdot \cos 53°)}{m_1 + m_2} \cdot g$$

Sustituyendo los datos del problema y considerando que sen 37° = = cos 53° = 0,6 y cos 37° = sen 53° = 0,8, tenemos:

$$a = \frac{300\ kg \cdot 0{,}6 - 40\ kg \cdot 0{,}8 - 0{,}3\ (300\ kg \cdot 0{,}8 + 40\ kg \cdot 0{,}6)}{340\ kg} \cdot$$

$$\cdot\ 10\ m/s^2 \simeq \boxed{2\ m/s^2}$$

b) Para calcular la tensión de la cuerda sustituiremos el valor de a en la ecuación [1]:

$$T = m_2\ (g\ sen\ 37° - \mu \cdot g\ cos\ 37° - a) =$$
$$= 300\ kg\ (10\ m/s^2 \cdot 0{,}6 - 0{,}3 \cdot 10\ m/s^2 \cdot 0{,}8 - 2\ m/s^2) \simeq \boxed{480\ N}$$

6.39. ***¿Por qué cuando se descarga un camión con tierra, ésta toma la forma cónica? ¿De qué depende el ángulo en el vértice?***

Solución: Se trata de un fenómeno derivado del rozamiento. Si designamos por μ el coeficiente de rozamiento de la tierra consigo misma, ésta deslizará hacia abajo siempre que tg φ sea mayor que μ; permaneciendo en equilibrio, sin deslizar, en caso contrario.

6.40. ***Con los 192 m³ de tierra extraída al excavar los cimientos de un edificio se quiere hacer un montón de forma cónica de manera que ocupe sobre el suelo la mínima superficie posible.***

Determinar la altura de dicho montón sabiendo que el coeficiente de rozamiento de la tierra cuando resbala sobre ella misma es: $\mu = \sqrt{\pi}/3$.

Solución: Si el montón de tierra ha de tener mínima superficie en su base, su altura ha de ser la máxima compatible con el rozamiento. Consideremos un cono cualquiera (fig. 6.47), de semiángulo en el vértice φ, y aislemos una partícula de tierra, de masa m, situada sobre su generatriz.

En el diagrama de la figura 6.47 se representan las fuerzas que actúan sobre dicha partícula, teniendo que cumplirse, para que no resbale hacia abajo, que:

$$\mu \cdot m \cdot g \cdot sen\ \varphi \geq m \cdot g \cdot cos\ \varphi$$

Es decir:

$$tg\ \varphi \geq \frac{1}{\mu} \geq \frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

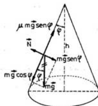


Fig. 6.47

El cono de altura máxima será aquel de valor mínimo de φ, habiendo de cumplirse que:

$$tg\ \varphi = \frac{r}{h} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \qquad [1]$$

Por otra parte, el volumen del cono es:

$$V = \frac{1}{3}\,\pi \cdot r^2 \cdot h \qquad [2]$$

A partir de dichas ecuaciones [1] y [2] se deduce que:

$$h = \sqrt[3]{\frac{V}{3}} = \sqrt[3]{\frac{192\ m^3}{3}} = \boxed{4\ m}$$

6.41. ***Dos planos inclinados, de ángulos $\alpha = 60°$ y $\beta = 30°$, están unidos por su arista superior, según se indica en la figura 6.48.***

Sobre ellos se encuentran dos bloques, de masas m_1 y m_2, unidos por una cuerda que pasa por una polea situada en la arista común.

El coeficiente de rozamiento dinámico entre los bloques y los planos es 0,2. Inicialmente el bloque m_1 está $h = 1,92$ m más alto que el m_2, y al cabo de 1 segundo están a la misma altura.

Hallar la relación m_1/m_2.

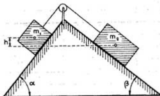


Fig. 6.48

Solución: El diagrama de la figura 6.49 representa las fuerzas que actúan sobre los dos bloques. El movimiento se realiza en el sentido indicado por la flecha.

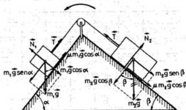


Fig. 6.49

Se ve claramente que cuando los dos bloques están a la misma altura el espacio recorrido por ambos es:

$$s = \frac{h}{\text{sen}\ \alpha + \text{sen}\ \beta}$$

Teniendo en cuenta que, según las ecuaciones de la Cinemática, cuando la

velocidad inicial es nula, $s = \frac{1}{2} at^2$, la aceleración a que se encuentran sometidos los dos bloques es:

$$a = \frac{2 \cdot s}{t^2} = \frac{2 \cdot h}{(\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta)\, t^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1{,}92 \text{ m}}{(0{,}866 + 0{,}5) \cdot 1 \text{ s}^2} = 2{,}81 \text{ m/s}^2$$

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica:

$$(m_1 + m_2) \cdot a = m_1 \cdot g \cdot \text{sen } \alpha - m_2 \cdot g \cdot \text{sen } \beta - \mu\, m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha - \mu\, m_2 \cdot g \cdot \cos \beta$$

y sustituyendo los valores correspondientes, se deduce que:

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = 2}$$

6.42. ***Una misma fuerza ¿producirá el mismo efecto al actuar durante 1 segundo sobre un cuerpo de 4 kg que si actúa durante 4 segundos sobre un cuerpo de 1 kg?***

Solución: No. En el primer caso la variación de velocidad que experimenta el móvil es $\Delta v = F/4$, mientras que en el segundo es 16 veces mayor: $\Delta v = 4F$.

6.43. ***Una pelota de hockey de 50 g rueda hacia un jugador con una velocidad de 6 m/s. A causa del golpe del stick la pelota sale rechazada en la misma dirección con velocidad de 10 m/s. Suponiendo que el tiempo de contacto entre la pelota y el stick sea de 0,05 segundos, calcular la fuerza media que actuó sobre la pelota.***

Solución: De acuerdo con el teorema del impulso mecánico:

$$F = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = \frac{0{,}05 \text{ kg } [10 \text{ m/s} - (-6 \text{ m/s})]}{0{,}05 \text{ s}} = \boxed{16 \text{ N}}$$

6.44. ***Una máquina arrastra un tren, partiendo del reposo, hasta alcanzar una velocidad de 90 km/h. Calcúlese el tiempo que tarda el tren en conseguir dicha velocidad si la fuerza de la máquina es 0,02 veces el peso del tren.***

Solución: Si designamos por m la masa del tren, su peso será $m \cdot g$, y la fuerza que efectúa la máquina $F = 0{,}02\ m \cdot g$.
Aplicando el teorema del impulso mecánico: $F \cdot t = m \cdot \Delta v$, tenemos:

$$t = \frac{m \cdot \Delta v}{F} = \frac{m \cdot 25 \text{ m/s}}{0{,}02 \cdot m \cdot 10 \text{ m/s}^2} = \boxed{125 \text{ s}}$$

6.45. ***Sobre una partícula puntual de 2 kg de masa actúa la fuerza:***

$$\vec{F} = (10 - 2t^2)\,\vec{i} + 4t\,\vec{j} \quad (SI)$$

Si en el instante inicial:

$$\vec{v}_o = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} \quad (SI); \quad y \quad \vec{r}_o = \frac{1}{4}\,\vec{i} + \vec{j} \quad (SI)$$

calcular la velocidad y la posición de la partícula al cabo de 3 segundos.

Solución: El vector aceleración del punto es:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{(10 - 2t^2)\,\vec{i} + 4t\,\vec{j}\ (N)}{2\ kg} = (5 - t^2)\,\vec{i} + 2t\,\vec{j}\ (m/s^2)$$

y, por consiguiente:

$$\vec{v} = \int \vec{a} \cdot dt = \int [(5 - t^2)\,\vec{i} + 2t\,\vec{j}]\,dt = \left(5t - \frac{t^3}{3}\right)\vec{i} + t^2\,\vec{j} + \vec{v}_o$$

Sustituyendo $\vec{v}_o$ por su valor, dado en el enunciado del problema:

$$\vec{v} = \left(3 + 5t - \frac{t^3}{3}\right)\vec{i} + (2 + t^2)\,\vec{j}$$

Al cabo de 3 segundos ($t = 3$ s):

$$\boxed{\vec{v}_3 = 9\,\vec{i} + 11\,\vec{j}\ (m/s)}$$

El vector posición de la partícula se calcula mediante:

$$\vec{r} = \int \vec{v} \cdot dt = \int \left[\left(3 + 5t - \frac{t^3}{3}\right)\vec{i} + (2 + t^2)\,\vec{j}\right] dt =$$

$$= \left[3t + \frac{5t^2}{2} - \frac{t^4}{12}\right]\vec{i} + \left(2t + \frac{t^3}{3}\right)\vec{j} + \vec{r}_o$$

Sustituyendo $\vec{r}_o$ por su valor, obtendremos para $\vec{r}$, al cabo de 3 segundos:

$$\boxed{\vec{r}_3 = 25\,\vec{i} + 16\,\vec{j}\ (m)}$$

6.46. ***Sobre un cuerpo de 5 kg de masa actúa una fuerza que varía con el tiempo de acuerdo con la relación $F = 5 + t$ (SI).***

a) ***Determinar el impulso de la fuerza en los cuatro primeros segundos en que actúa.***

b) ***¿Durante cuánto tiempo ha de actuar la fuerza para que el impulso sea igual a $100\ N \cdot s$?***

c) *¿Qué velocidad adquiere el cuerpo al cabo de ese tiempo, sabiendo que su velocidad inicial era de 30 m/s?*

Solución:

a) $$I = \int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt = \int_0^4 (5 + t)\, dt = \left[5t + \frac{t^2}{2}\right]_0^4 = \boxed{28\ N \cdot s}$$

b) Tenemos que: $\left[5t + \frac{t^2}{2}\right]_0^t = 100\ N \cdot s$, de donde resulta una ecuación de segundo grado:

$$t^2 + 10\,t - 200 = 0$$

con dos soluciones, de las que sólo tiene significado físico la que corresponde a:

$$\boxed{t = 10\ s}$$

c) De acuerdo con el teorema del impulso mecánico: $I = m\,(v - v_o)$, sustituyendo los datos del problema:

$$100\ N \cdot s = 5\ kg\ (v - 30\ m/s)$$

de donde:

$$\boxed{v = 50\ m/s}$$

6.47. *Las novelas y las películas del Far West no suelen detenerse a relatar detalles científicos; sin embargo, algunos pistoleros de aquella época actuaban científicamente. Uno de ellos, cuyo nombre se ha perdido para la posteridad, utilizaba un fusil que disparaba proyectiles de 1 g de masa con una velocidad de 300 m/s. La fuerza que actuaba en el interior del fusil sobre cada proyectil venía dada por la expresión:*

$$F = 200 - \frac{2}{3} \cdot 10^5\, t \quad (SI)$$

Calcular con estos datos el tiempo que necesitaba el proyectil para recorrer la longitud del cañón del fusil.

Solución: Aplicando el teorema del impulso mecánico, tenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt = m\,(v - v_o)$$

$$\int_0^t \left(200 - \frac{2}{3} \cdot 10^5\, t\right) dt = 10^{-3}\ kg\ (300\ m/s - 0\ m/s)$$

de donde:

$$200\,t - \frac{1}{3} \cdot 10^5\, t^2 = 0{,}3 \quad (SI)$$

La resolución de esta ecuación de segundo grado conduce a:

$$\boxed{t = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{s}}$$

6.48. *Varios niños comienzan a empujar un vagón de masa M sobre una vía horizontal, aplicando sobre él una fuerza constante, $\vec{F}$.*

Si tenemos en cuenta que está lloviendo copiosamente, de forma que caen sobre el vagón λ litros de agua por segundo, calcular la velocidad del vagón al cabo de un tiempo t después de haber comenzado el movimiento.

Solución: Teniendo en cuenta que al cabo de un tiempo t la masa total del vagón es la suya propia (M) más la de agua (λ · t) recogida en él, al aplicar el teorema del impulso mecánico tenemos:

$$F \cdot dt = (M + \lambda \cdot t)\, dv$$

de donde:

$$dv = \frac{F}{M + \lambda t}\, dt$$

Integrando esta expresión:

$$v = F \int \frac{dt}{M + \lambda t}\, dt = \frac{F}{\lambda} \ln (M + \lambda t) + C$$

Para conocer el significado físico de C (y su valor) hemos de suponer que t = 0 y v = 0:

$$C = -\frac{F}{\lambda} \ln M$$

Por tanto:

$$v = \frac{F}{\lambda} \ln (M + \lambda t) - \frac{F}{\lambda} \ln M =$$

$$= \frac{F}{\lambda} [\ln (M + \lambda t) - \ln M] = \frac{F}{\lambda} \ln \frac{M + \lambda t}{M}$$

$$\boxed{v = \frac{F}{\lambda} \cdot \ln \frac{M + \lambda t}{M}}$$

6.49. *Sabiendo que la masa de la Tierra es $6 \cdot 10^{24}$ kg y el radio medio de su órbita alrededor del Sol es $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, calcular el momento angular de la Tierra.*

Solución:

$$L = m \cdot v \cdot r = m \frac{2\pi r}{T} \cdot r = m \frac{2\pi r^2}{T}$$

El período, T, que tarda la Tierra en recorrer la órbita es 1 año:

$$T = 365 \text{ días} \cdot \frac{86\,400 \text{ s}}{\text{día}} = 31\,536\,000 \text{ segundos}$$

Sustituyendo valores:

$$L = \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 2\pi\,(1{,}5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2}{31\,536\,000 \text{ s}} = \boxed{2{,}7 \cdot 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}$$

6.50. ***Bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ un cuerpo de 5 kg de masa se mueve en el plano XZ, de manera que su vector de posición, en función del tiempo, es:***

$$\vec{r} = 2t\,\vec{i} + 5t^2\,\vec{k} \quad (SI)$$

Calcular el momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto al origen de coordenadas.

Solución: Vamos a resolver el problema de dos formas diferentes, aunque completamente equiparables:

a) Calcularemos, primero, la aceleración del cuerpo y después la fuerza que la produce:

Si $\vec{r} = 2t\,\vec{i} + 5t^2\,\vec{k}$ (SI):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\,\vec{i} + 10t\,\vec{k} \quad (SI)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 10\,\vec{k} \quad (SI)$$

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = 5 \cdot 10\,\vec{k} = 50\,\vec{k} \quad (SI)$$

El momento respecto al origen de coordenadas vendrá dado por:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & 0 & 5t^2 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} = \boxed{-100\,t\,\vec{j}\,(SI)}$$

El momento tiene la dirección del eje OY y varía con el tiempo.

b) El momento angular del cuerpo será:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = 5 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2t & 0 & 5t^2 \\ 2 & 0 & 10t \end{vmatrix} = -50t^2\,\vec{j} \quad (SI)$$

Aplicando el teorema del momento angular:

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}}{dt} = \boxed{-100\,t\,\vec{j}\,(SI)}$$

7. DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS

FORMULARIO-RESUMEN

Ecuación fundamental de la Dinámica para un sistema de partículas:

$$\Sigma \vec{F}_i^E = \Sigma m_i \cdot \vec{a}_i = \Sigma m_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$$

Sistemas cerrados de dos partículas: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{cte.}$

Masa reducida de un sistema de dos partículas:

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{Si } m_1 \ll m_2,\ \mu \simeq m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)$$

CENTRO DE MASAS			
$\vec{r}_o = \frac{1}{M}\Sigma m_i \cdot \vec{r}_i;\ x_o = \frac{1}{M}\Sigma m_i \cdot x_i;\ y_o = \frac{1}{M}\Sigma m_i \cdot y_i;\ z_o = \frac{1}{M}\Sigma m_i \cdot z_i$			
Si el sólido es continuo	$\vec{r}_o = \frac{1}{M}\int \vec{r} \cdot dm;\ x_o = \frac{1}{M}\int x \cdot dm;\ y_o = \frac{1}{M}\int y \cdot dm;\ z_o = \frac{1}{M}\int z \cdot dm$		
	Si es homogéneo	Cúbico	$x_o = \frac{1}{V}\int x \cdot dV;\ y_o = \frac{1}{V}\int y \cdot dV;\ z_o = \frac{1}{V}\int z \cdot dV$
		Laminar	$x_o = \frac{1}{S}\int x \cdot dS;\ y_o = \frac{1}{S}\int y \cdot dS;\ z_o = \frac{1}{S}\int z \cdot dS$
		Lineal	$x_o = \frac{1}{L}\int x \cdot dl;\ y_o = \frac{1}{L}\int y \cdot dl;\ z_o = \frac{1}{L}\int z \cdot dl$

Movimiento del centro de masas: $\begin{cases} \vec{P} = \vec{P}_{CM} = \Sigma\, \vec{p}_i \\ \Sigma\, \vec{F}_i^E = M \cdot \vec{A}_{CM} \end{cases}$

Impulso y momento lineal de un sistema:

$$\vec{I} = \Delta\vec{P}.\ \text{Si}\ \Sigma\, \vec{F}_i^E = 0,\ \vec{P} = \text{cte}$$

Momento angular total de un sistema:

$$\vec{L} = \Sigma\, \vec{L}_i = \Sigma\, (\vec{r}_i \wedge m_i\vec{v}_i)$$

$$\text{Si es un sólido rígido: } \vec{L} = \int (\vec{r} \wedge \vec{v})\, dm$$

Teorema del momento angular para un sistema:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$$

Primer teorema de König:

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \Sigma\, \vec{r}_i' \wedge m_i\vec{v}_i'$$

Teorema de conservación del momento angular de un sistema:

$$\text{Si}\ \vec{M}^E = 0,\ \vec{L} = \text{cte}$$

7. DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS

7.1. *Sobre una gran balsa de madera, de masa M = 460 kg, que flota en las aguas tranquilas de un lago, se encuentra un niño, de masa m = 40 kg, que dista de la orilla D = 20 m. El niño comienza a caminar sobre la balsa, dirigiéndose perpendicularmente hacia la orilla del lago, con una velocidad constante v = 3 m/s (fig. 7.1). ¿A qué distancia de la orilla se encontrará el niño al cabo de 5 segundos?*

Solución: Aplicando el principio de conservación del momento lineal al sistema formado por la balsa y el niño, tenemos:

$$m \cdot \vec{v} + (M + m)\,\vec{V} = 0$$

siendo $\vec{V}$ la velocidad con que retrocede el sistema balsa-niño respecto a la orilla.

Como el problema es monodimensional, podemos transformar la ecuación vectorial anterior en una escalar:

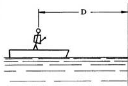


Fig. 7.1

$$m \cdot v + (M + m)\,V = 0$$

de donde:

$$V = \frac{-m \cdot v}{M + m} = -\frac{40\ \text{kg} \cdot 3\ \text{m/s}}{500\ \text{kg}} = -0{,}24\ \text{m/s}$$

De acuerdo con ello, la velocidad respecto a tierra con la que el niño avanza hacia la orilla es:

$$v' = v + V = 3\ \text{m/s} + (-0{,}24\ \text{m/s}) = 2{,}76\ \text{m/s}$$

Al cabo de 5 segundos habrá avanzado hacia la orilla una distancia:

$$s = v' \cdot t = 2{,}76\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 5\ \text{s} = 13{,}8\ \text{m}$$

Por tanto, la distancia a la que en ese instante el niño se encuentra de la orilla, es:

$$d = D - s = 20\ \text{m} - 13{,}8\ \text{m} = \boxed{6{,}2\ \text{m}}$$

7.2. ***¿Con qué velocidad retrocede un fusil de masa 5 kg, que dispara un proyectil de 10 g con una velocidad de 200 m/s?***

Solución: Aplicando el principio de conservación del momento lineal:

$$0 = m \cdot v + M \cdot V$$

de donde:

$$V = -\frac{m \cdot v}{M} = \frac{10^{-2}\ kg \cdot 200\ m/s}{5\ kg} = \boxed{-0{,}4\ m/s}$$

7.3. *(*) Una persona se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal sin rozamiento y lanza una piedra de 2 kg hacia arriba, formando un ángulo de 60° con la horizontal, con una velocidad de 100 m/s. ¿Con qué velocidad se moverá la persona si su peso es de 80 kp?*

Solución: Como se tiene que conservar el momento lineal en dirección horizontal, designando por M la masa de la persona, por V su velocidad y por m y v la masa y velocidad de la piedra, tenemos:

$$0 = M \cdot V + m \cdot v \cdot \cos \alpha$$

de donde:

$$V = -\frac{m \cdot v \cdot \cos \alpha}{M} = -\frac{2\ kg \cdot 110\ m/s \cdot 0{,}5}{80\ kg} = \boxed{-1{,}375\ m/s}$$

7.4. *(*) Un cañón montado sobre ruedas pesa 100 toneladas y dispara proyectiles de 10 kg a 300 m/s.*

Determinar el impulso que se ejerce sobre el cañón y su cantidad de movimiento (momento lineal).

Solución: El momento lineal del proyectil y el del cañón tienen el mismo módulo y dirección, pero sentido contrario. Su valor es: $p = m \cdot v$; donde m es la masa del proyectil y v su velocidad.

De acuerdo con el teorema del impulso:

$$I = p - p_o = m \cdot v - 0 = 10\ kg \cdot 300\ m/s = \boxed{3 \cdot 10^3\ kg \cdot m/s} =$$

$$= \boxed{3 \cdot 10^3\ N \cdot s}$$

7.5. *Un cañón que pesa 4 000 kg lanza un proyectil de 20 kg con una velocidad de 1 000 m/s. ¿Cuál es la velocidad de retroceso del cañón?*

Solución: Aplicando el principio de conservación del momento lineal, tenemos:

$$0 = M \cdot V + m \cdot v$$

siendo m la masa del proyectil, v su velocidad, M la masa del cañón y V la velocidad de retroceso.

En consecuencia:

$$V = -\frac{m \cdot v}{M} = -\frac{20\ kg \cdot 1\ 000\ m/s}{4\ 000\ kg} = \boxed{-5\ m/s}$$

7.6. ***Un cañón de 600 kg lanza un proyectil de 10 kg con una velocidad de 700 m/s con una inclinación de 30° por encima de la horizontal. Calcular la velocidad de retroceso horizontal del cañón.***

Solución: Al conservarse el momento lineal en la dirección horizontal:

$$V = -\frac{m \cdot v \cdot \cos \alpha}{M} = -\frac{10 \text{ kg} \cdot 700 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 0{,}866}{600 \text{ kg}} = \boxed{\mathbf{-10{,}1 \text{ m/s}}}$$

7.7. ***Se lanza un cohete partiendo del reposo.***

a) ¿Puede sobrepasar su velocidad final a la de expulsión de los gases?
b) Si se aumenta la cantidad de gases expulsados por unidad de tiempo, ¿variará la velocidad final del cohete?
c) Si se mantiene constante dicha cantidad de gases expulsados por unidad de tiempo, ¿variará la aceleración?

Solución:

a) Sí. Todo depende de la relación que exista entre la masa total inicial del cohete y su masa en el momento considerado.
b) La velocidad final del cohete no variará, pues no depende más que de la relación de masas citadas anteriormente y de la velocidad de expulsión de los gases.
c) La aceleración va aumentando, ya que disminuye la masa del cohete.

7.8. ***Se dispara horizontalmente un proyectil de 8 g y penetra en un bloque de madera de 9 kg que puede moverse libremente. La velocidad del sistema formado por el bloque y el proyectil después del impacto es de 30 cm/s.***
Deducir la velocidad inicial del proyectil.

Solución: El momento lineal inicial del proyectil es:

$$p_o = m \cdot v_o = 8 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot v_o = 8 \cdot 10^{-3} \cdot v_o \text{ (kg} \cdot \text{m/s)}$$

y el momento lineal final del sistema formado por el bloque y el proyectil:

$$p = (M + m)\, V = 9{,}008 \text{ kg} \cdot 0{,}30 \text{ m/s} = 2{,}7024 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Aplicando el principio de conservación:

$$8 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot v_o = 2{,}7024 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

de donde:

$$v_o = \frac{2{,}7024 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{0{,}008 \text{ kg}} = \boxed{\mathbf{337{,}8 \text{ m/s} \simeq 338 \text{ m/s}}}$$

7.9. ***Dos masas de 16 g y 4 g se mueven en sentido contrario con velocidades respectivas de 3 cm/s y 5 cm/s. Tras chocar entre sí, continúan moviéndose unidas. Calcular la velocidad del conjunto.***

Solución: Aplicando el principio de conservación del momento lineal:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2)\, v'$$

Despejando v' y sustituyendo datos (sistema CGS):

$$v' = \frac{16\ g \cdot 3\ cm/s + 4\ g\ (-5\ cm/s)}{16\ g + 4\ g} = \boxed{\mathbf{1{,}4\ cm/s}}$$

7.10. ***Se dispara horizontalmente un proyectil de 15 g y queda incrustado en un bloque de madera de 3 kg suspendido de una larga cuerda (péndulo balístico).***
Calcular la velocidad del proyectil si el impacto obliga al bloque a oscilar 10 cm por encima de su nivel inicial.

Solución: En el caso del péndulo balístico se cumple que:

$$v = \frac{M + m}{m} \cdot \sqrt{2gh}$$

Sustituyendo datos (sistema SI):

$$v = \frac{(3 + 0{,}015)\ kg}{0{,}015\ kg} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}8\ m \cdot s^{-2} \cdot 0{,}1\ m} = \boxed{\mathbf{281\ m/s}}$$

7.11. ***Un hombre que pesa 80 kg está patinando a la velocidad de 6 m/s y choca con un niño de 40 kg que está patinando en sentido contrario con una velocidad de 9 m/s.***
¿Cuál es la velocidad resultante de los dos juntos?

Solución: Aplicando el principio de conservación del momento lineal:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v'$$

Despejando v' y sustituyendo datos:

$$v' = \frac{80\ kg \cdot 6\ m/s + 40\ kg\ (-9\ m/s)}{120\ kg} = \boxed{\mathbf{1\ m/s}}$$

7.12. ***Un átomo de uranio se desintegra en dos partes cuyas masas valen $2{,}5 \cdot 10^{-25}$ kg y $1{,}5 \cdot 10^{-25}$ kg. Sin tener en cuenta otras partículas de masa despreciable, determinar en qué relación están las velocidades de ambos fragmentos.***

Solución: El momento lineal de los fragmentos ha de ser el mismo:

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$$

Por lo tanto:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-25}\ kg}{2{,}5 \cdot 10^{-25}\ kg} = \frac{3}{5} = \boxed{\mathbf{0{,}6}}$$

7.13. ***Se lanza un cohete de masa inicial m_o, de forma que la velocidad del chorro gaseoso expulsado sea constante y de valor v con respecto al cohete (fig. 7.2). Considerando la Tierra como sistema de referencia inercial, suponiendo que la trayectoria del cohete sea vertical con un valor de la aceleración debida a la gravedad constante, y despreciando la resistencia del aire, calcular la velocidad V del cohete respecto a la Tierra al cabo de un tiempo t.***

Supóngase que la cantidad de gases expulsados por unidad de tiempo es constante.

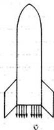


Fig. 7.2

Solución: Designemos por m la masa del cohete y por V su velocidad en el instante t. Al cabo de un tiempo dt la masa y la velocidad del cohete habrán variado y, por consiguiente, su momento lineal, siendo tal variación, d (m · V), hacia arriba.

El momento lineal de los gases expulsados habrá variado en dm (v − V). Aplicando, en consecuencia, el principio de conservación del momento lineal, tenemos:

$$d\,(mV) + dm\,(v - V) = 0$$

Desarrollando esta expresión y simplificando:

$$m \cdot dV + v \cdot dm = 0$$

de donde:

$$dV = -v\,\frac{dm}{m}$$

Integrando esta ecuación entre el instante inicial (t = 0; V = 0; m = m_o) y el que corresponde a un tiempo t, tenemos:

$$V = \int_{t_o}^{t} -v\,\frac{dm}{m} = -v\left[\ln m\right]_{m_o}^{m} = \boxed{\mathbf{v \cdot \ln \frac{m_o}{m}}}$$

7.14. ***Calcular la masa reducida (μ) del sistema electrón-protón en un átomo de hidrógeno.***

Las masas del electrón y del protón son las siguientes, respectivamente: $9{,}1086 \cdot 10^{-31}$ kg y $1{,}6724 \cdot 10^{-27}$ kg.

Solución: Como la masa del electrón es mucho menor que la del protón, resulta:

$$\mu = m_e\left(1 - \frac{m_e}{m_p}\right) = 9{,}1086 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\left(1 - \frac{9{,}1086 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{1{,}6724 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}\right) =$$

$$= \boxed{\mathbf{9{,}1036 \cdot 10^{-31}\ kg}}$$

La diferencia entre la masa reducida y la del electrón es, aproximadamente, del 0,06 %.

7.15. ***Un núcleo, inicialmente en reposo, se descompone radiactivamente emitiendo un electrón con un momento lineal de 9,22 · 10^{-16} g · cm/s y, perpendicularmente a la dirección del electrón, un neutrino con un momento lineal de 5,33 · 10^{-16} g · cm/s.***

a) ¿En qué dirección retrocederá el núcleo residual?
b) ¿Cuál será su momento lineal?

Solución:

a) Designemos por $M \cdot \vec{V}$ el momento lineal del núcleo residual; por $m \cdot \vec{v}$ el del electrón, y por $m' \cdot \vec{v}'$ el del neutrino, siendo α el ángulo que forma la dirección del núcleo residual con la del electrón, tal como se indica en la figura 7.3.

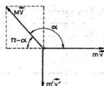


Fig. 7.3

Descomponiendo el momento lineal del núcleo residual en sus componentes y aplicando el principio de conservación, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} M \cdot V \cdot \text{sen}\,(\pi - \alpha) - m' \cdot v' = 0 \\ m \cdot v - M \cdot V \cdot \cos\,(\pi - \alpha) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} M \cdot V\,\text{sen}\,\alpha = m' \cdot v' & [1] \\ M \cdot V \cdot \cos\alpha = -m \cdot v & [2] \end{array}$$

Dividiendo las ecuaciones [1] y [2]:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{5{,}33 \cdot 10^{-16}\ \text{g} \cdot \text{cm/s}}{-9{,}22 \cdot 10^{-16}\ \text{g} \cdot \text{cm/s}} = -0{,}578$$

que corresponde a un **ángulo de 150°.**

b) Elevando al cuadrado las ecuaciones [1] y [2] y sumando:

$$M^2 \cdot V^2\,(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha) = M^2V^2 = (m' \cdot v')^2 + (m \cdot v)^2$$

de donde:

$$M \cdot V = p = \sqrt{(5{,}33 \cdot 10^{-16}\ \text{g} \cdot \text{cm/s})^2 + (9{,}22 \cdot 10^{-16}\ \text{g} \cdot \text{cm/s})^2} =$$

$$= \boxed{1{,}06 \cdot 10^{-15}\ \text{g} \cdot \text{cm/s}}$$

7.16. ***Una bola de billar que se mueve con una velocidad de 4 m/s pega de refilón a otra bola idéntica en reposo, reduciéndose su velocidad a 2 m/s, en una dirección de 60° con la del movimiento original. Calcular la velocidad y la dirección del movimiento de la segunda bola después del choque.***

Solución: Aplicando el principio de conservación del momento lineal en dos direcciones (la del choque y la perpendicular a ella), tal como se indica en la figura 7.4, tenemos:

$$m \cdot v_1 = m \cdot v_1' \cos 60° + m \cdot v_2' \cos\alpha$$
$$m \cdot v_1' \cdot \text{sen}\ 60° = m \cdot v_2'\ \text{sen}\,\alpha$$

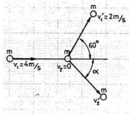


Fig. 7.4

Simplificando y sustituyendo los datos del problema, se tiene:

$$4 \text{ m/s} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}5 + v_2' \cos\alpha \qquad v_2' \cos\alpha = 3 \qquad [1]$$

$$2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}866 = v_2' \operatorname{sen}\alpha \qquad v_2' \cdot \operatorname{sen}\alpha = 1{,}7320 \qquad [2]$$

La resolución del sistema formado por las ecuaciones [1] y [2] conduce a:

$$\boxed{\begin{aligned} v_2' &= 3{,}464 \text{ m/s} \\ \alpha &= 30° \end{aligned}}$$

7.17. ***Un vagón de masa M se desliza sin rozamiento sobre una vía horizontal. En el momento en que su velocidad es v_o, un hombre de masa m comienza a caminar sobre el vagón, de delante hacia atrás, siendo su velocidad respecto al vagón en el momento en que lo abandona, V. ¿Cuál será la velocidad del vagón en ese momento?***

Solución: Aplicando el principio de conservación del momento lineal al sistema formado por el hombre y el vagón, tenemos:

$$m \cdot V = (M + m)\,\Delta v$$

siendo:

$$\Delta v = \frac{m \cdot V}{M + m}$$

el incremento de velocidad que experimenta el vagón.

Por lo tanto, la velocidad de éste en el momento en que el hombre lo abandona, será:

$$v' = v_o + \Delta v = \boxed{v_o + \frac{m}{M + m} \cdot V}$$

7.18. ***Se dispara una granada con una velocidad inicial de 600 m/s y con un ángulo de elevación de 45°. Al llegar al punto más alto de su trayectoria la granada explosiona en dos fragmentos de igual masa, uno de los cuales cae verticalmente al suelo con velocidad inicial nula.***

¿A qué distancia del punto de lanzamiento caerá el otro fragmento? Tómese $g = 10$ m/s².

Solución: La altura máxima y el alcance del proyectil son, respectivamente:

$$Y_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\,\alpha}{2\,g} = \frac{(600\ \text{m/s})^2 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10\ \text{m/s}^2} = 9\ 000\ \text{m}$$

$$X = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\ 2\alpha}{g} = \frac{(600\ \text{m/s})^2 \cdot 1}{10\ \text{m/s}^2} = 36\ 000\ \text{m}$$

La componente horizontal de la velocidad, que permanece constante hasta el momento de la explosión, vale:

$$v_x = 600\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 45° = 300\ \sqrt{2}\ \text{m/s}$$

En el momento de la explosión no actúan fuerzas exteriores al sistema, salvo el peso, cuyo impulso es despreciable frente al de las fuerzas internas de la explosión. Podemos, por consiguiente, considerar el sistema como cerrado y suponer que el momento lineal total permanece constante.

Designando por m la masa de cada fragmento, 2m la masa de la granada y v'_x la componente horizontal de la velocidad del segundo fragmento, tenemos:

$$2m \cdot v_x = m \cdot v'_x$$

de donde:

$$v'_x = 2 \cdot v_x = 2 \cdot 300\ \sqrt{2}\ \text{m/s} = 600\ \sqrt{2}\ \text{m/s}$$

Por lo tanto, este segundo fragmento se comporta como un cuerpo lanzado horizontalmente con una velocidad v'_x desde una altura de 9 000 m:

$$9\ 000\ \text{m} = \frac{1}{2}\ 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$$

$$s = 600\ \sqrt{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$$

La resolución de este sistema conduce a:

$$s = 36\ 000\ \text{m}$$

En consecuencia, la distancia entre el punto de lanzamiento de la granada y el de la caída del segundo fragmento es (fig. 7.5):

$$d = s + \frac{x}{2} = 36\,000 \text{ m} + \frac{36\,000 \text{ m}}{2} = \boxed{54\,000 \text{ m}}$$

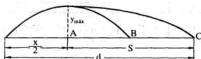


Fig. 7.5

También se puede enfocar la resolución del problema considerando que, tras la explosión, el centro de masas del sistema continúa moviéndose lo mismo que antes. Ambos fragmentos llegarán al suelo simultáneamente, siendo en todo momento simétricas sus posiciones con respecto al centro de masas. Por lo tanto, según se desprende de la figura 7.5:

$$AB = BC = \frac{x}{2};\ d = x + BC = x + 0{,}5\ x = 1{,}5\ x =$$

$$= 1{,}5 \cdot 36\,000 \text{ m} = \boxed{54\,000 \text{ m}}$$

7.19. ***En un cruce de calles ha tenido lugar un choque (sin víctimas) entre dos vehículos: un automóvil de 1 000 kg de masa que se dirigía hacia el norte a la velocidad de 54 km/h, con un camión de 4 toneladas que avanzaba hacia el este a la velocidad de 25,2 km/h. A consecuencia del choque el automóvil queda incrustado en el camión, desplazándose a continuación los dos juntos.***

a) ¿Cuál es la velocidad del conjunto formado por los dos vehículos inmediatamente después del choque?

b) ¿Cuál es la dirección de su movimiento?

Solución:

a) En el choque se conservan las componentes del momento lineal del sistema respecto a los ejes EO y NS. Si designamos por m_1 y m_2 las masas respectivas del camión y del automóvil, por v_1 y v_2 sus correspondientes velocidades antes del choque, y por V la velocidad del conjunto después de chocar (fig. 7.6), la aplicación del principio de conservación del momento lineal conduce a:

$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2)\ V \cdot \cos \alpha \quad [1]$$

$$m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2)\ V \text{ sen } \alpha \quad [2]$$

De donde se deduce que:

$$V \cos \alpha = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \quad [3]$$

$$V \text{ sen } \alpha = \frac{m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad [4]$$

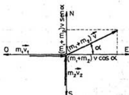


Fig. 7.6

Elevando al cuadrado las expresiones [3] y [4] y sumando:

$$V^2 = \frac{(m_1 \cdot v_1)^2 + (m_2 \cdot v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

Despejando V y sustituyendo datos, se obtiene el valor:

$$\boxed{V = 6{,}35 \text{ m/s}}$$

b) Para calcular la dirección del movimiento de ambos vehículos después del choque, basta dividir entre sí las ecuaciones [1] y [2]:

$$\text{tg } \alpha = \frac{m_2 \cdot v_2}{m_1 \cdot v_1} = \frac{1\,000 \text{ kg} \cdot 15 \text{ m/s}}{4\,000 \text{ kg} \cdot 7 \text{ m/s}} = \frac{15}{28}$$

$$\alpha = \boxed{28° \ 10' \text{ al NE .}}$$

7.20. *Las velocidades de dos partículas, de masas m_1 y m_2, son, respectivamente, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, respecto a un sistema de referencia determinado.*
Calcular la velocidad del centro de masas respecto a ese mismo sistema y la velocidad de cada una de las partículas respecto al centro de masas.

Solución: Ya que se trata de dos partículas, el vector posición de su centro de masas será:

$$\vec{r}_o = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

y su velocidad:

$$\boxed{\vec{V}_{CM} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}}$$

La velocidad de la primera partícula respecto al centro de masas valdrá:

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{V}_{CM} = \vec{v}_1 - \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} =$$

$$= \boxed{\frac{m_2 \cdot \vec{v}_{12}}{m_1 + m_2}}$$

y la de la segunda:

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{V}_{CM} = \boxed{-\frac{m_1 \cdot \vec{v}_{12}}{m_1 + m_2}}$$

siendo $\vec{v}_{12}$ la velocidad relativa de las dos partículas. Obsérvese que ambas se mueven en sentido contrario respecto al centro de masas. Calculemos ahora

los momentos lineales correspondientes, también con respecto al sistema de referencia del centro de masas:

$$\vec{P}'_1 = m_1\vec{v}'_1 = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\ \vec{v}_{12} = \mu \cdot \vec{v}_{12}$$

$$\vec{P}'_2 = m_2\vec{v}'_2 = -\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\ \vec{v}_{12} = -\mu \cdot \vec{v}_{12}$$

Vemos, pues, que son **iguales** y **opuestos**.

-.21. ***Tenemos sobre una mesa perfectamente pulimentada dos esferillas de masas respectivas $m_1 = 3$ g y $m_2 = 2$ g, situadas ambas perpendicularmente al borde de la mesa, la primera en el mismo borde y la otra a 60 cm de él. Las dos esferillas están unidas por un hilo inextensible, de masa despreciable, de 1 m de longitud. Si se deja que la primera esfera caiga verticalmente, ¿al cabo de cuánto tiempo y con qué velocidad inicial se moverá la segunda?***

Solución: El movimiento de la primera esferita será el de caída libre hasta el mismo momento en que el hilo que une a ambas esferas se ponga tenso, lo cual sucederá cuando la primera esfera haya descendido 40 cm. Su velocidad será, en ese momento:

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0{,}4\ \text{m}} = 2{,}8\ \text{m/s}$$

El tiempo invertido en alcanzar esa velocidad será:

$$t = \frac{v - v_o}{g} = \frac{2{,}8\ \text{m/s} - 0}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = \boxed{0{,}29\ \text{s}}$$

que es, precisamente, el tiempo que tarda la segunda esferilla en ponerse en movimiento.

En ese mismo momento en que se pone en movimiento la segunda esferilla, la velocidad común del sistema vendrá dada por:

$$V = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}003\ \text{kg} \cdot 2{,}8\ \text{m/s}}{0{,}005\ \text{kg}} = \boxed{1{,}68\ \text{m/s}}$$

-.22. ***Un cañón de masa M, situado sobre el suelo horizontal, dispara horizontalmente un proyectil de masa m con la velocidad relativa v. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento dinámico entre el cañón y el suelo es μ, determinar el retroceso, X, del cañón.***

Solución: Designemos por v_1 la velocidad inicial de retroceso del cañón. Aplicando el principio de conservación del momento lineal al sistema formado por el cañón y el proyectil, tenemos:

$$M \cdot v_1 = m\ (v - v_1)$$

de donde:

$$v_1 = \frac{m \cdot v}{M + m}$$

El problema, ahora, puede enfocarse desde un punto de vista dinámico o desde un punto de vista energético.

a) Si pretendemos seguir un método dinámico, hemos de calcular la aceleración a la que se encuentra sometido el cañón después de su disparo. Para ello tracemos el diagrama de las fuerzas que actúan (fig. 7.7).

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica, se tiene:

$$-F_r = M \cdot a = -\mu \cdot M \cdot g$$

de donde:

$$a = -\mu \cdot g$$

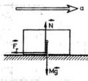


Fig. 7.7

El retroceso del cañón vendría dado por:

$$X = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a} = \frac{-\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2}{-2\mu g} = \boxed{\frac{1}{2\mu g}\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2}$$

b) Para resolver el problema desde un aspecto energético hemos de considerar que en el momento del disparo el cañón adquiere una energía cinética ($E_c = \frac{1}{2} M \cdot v_i^2$), que invierte en realizar un trabajo contra la fuerza de rozamiento a lo largo del recorrido X:

$$W_r = F_r \cdot X = \mu \cdot M \cdot g \cdot X$$

Igualando ambas expresiones ($E_c = W_r$), se llega al mismo resultado para X.

7.23. ***Un sistema está formado por cuatro partículas de masas 2, 3, 5 y 6 kg, situadas respectivamente en los puntos (−2, 3, 6), (5, −2, −1), (1, 0, 1) y (4, 2, 3). Calcular la posición del centro de masas del sistema.***

Solución: Las coordenadas del centro de masas del sistema son:

$$x_o = \frac{\Sigma m_i x_i}{M} = \frac{2\text{ kg}(-2) + 3\text{ kg}\cdot 5 + 5\text{ kg}\cdot 1 + 6\text{ kg}\cdot 4}{(2+3+5+6)\text{ kg}} = 2{,}5$$

$$y_o = \frac{\Sigma m_i y_i}{M} = \frac{2\text{ kg}\cdot 3 + 3\text{ kg}\cdot(-2) + 5\text{ kg}\cdot 0 + 6\text{ kg}\cdot 2}{16\text{ kg}} = 0{,}75$$

$$z_o = \frac{\Sigma m_i z_i}{M} = \frac{2\text{ kg}\cdot 6 + 3\text{ kg}(-1) + 5\text{ kg}\cdot 1 + 6\text{ kg}\cdot 3}{16\text{ kg}} = 2$$

El vector posición del centro de masas del sistema es:

$$\boxed{\vec{r}_o = 2{,}5\,\vec{i} + 0{,}75\,\vec{j} + 2\,\vec{k}}$$

7.24. ***La masa de la Luna es aproximadamente 0,013 veces la masa de la Tierra, y la distancia entre los centros de masas de la Luna y la Tierra es aproximadamente 60 veces el radio de la Tierra ($R_T = 6\,400$ km).***

¿A qué distancia del centro de la Tierra está el centro de masas del sistema Tierra-Luna?

Solución: Designemos por X la distancia pedida.

Si consideramos al centro de la Tierra como origen de coordenadas, los valores x_T, y_T y z_T son nulos.

Como:

$$X = \frac{\Sigma\, m_i x_i}{M}$$

resulta:

$$X = \frac{M_T \cdot 0 + M_L \cdot 60 \cdot 6\,400 \text{ km}}{M_T + M_L} =$$

$$= \frac{0{,}013\, M_T \cdot 60 \cdot 6\,400 \text{ km}}{M_T + 0{,}013\, M_T} = \frac{0{,}013 \cdot 60 \cdot 6\,400 \text{ km}}{1{,}013} = \boxed{\mathbf{4\,928\ km}}$$

7.25. ***Un sistema está integrado por tres partículas materiales cuyas masas y posiciones respectivas son:***

$$m_1 = 2 \text{ kg};\ \vec{r}_1\,(3t,\ 0,\ 4)\quad (SI)$$

$$m_2 = 12 \text{ kg};\ \vec{r}_2\,(6 + 2t,\ 2t^2,\ 2)\quad (SI)$$

$$m_3 = 6 \text{ kg};\ \vec{r}_3\,(0,\ t^2 + t,\ 3t)\quad (SI)$$

a) ***Calcular, en función del tiempo, la posición y la velocidad del centro de masas del sistema.***

b) ***Particularizar los resultados anteriores al caso en que $t = 3$ s.***

Solución:

a) Las coordenadas del centro de masas del sistema son:

$$x_o = \frac{\Sigma\, m_i x_i}{M} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 3t + 12 \text{ kg}\,(6 + 2t) + 6 \text{ kg} \cdot 0}{20 \text{ kg}} = \frac{15t + 36}{10}$$

$$y_o = \frac{\Sigma\, m_i y_i}{M} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 0 + 12 \text{ kg} \cdot 2t^2 + 6 \text{ kg}\,(t^2 + t)}{20 \text{ kg}} = \frac{15t^2 + 3t}{10}$$

$$z_o = \frac{\Sigma\, m_i z_i}{M} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 4 + 12 \text{ kg} \cdot 2 + 6 \text{ kg} \cdot 3t}{20 \text{ kg}} = \frac{9t + 16}{10}$$

La posición del centro de masas del sistema viene dada por el vector:

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}}_o = \frac{1}{10}\left[(15t + 36)\,\vec{i} + (15t^2 + 3t)\,\vec{j} + (9t + 16)\,\vec{k}\right]}$$

y su velocidad:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} = \frac{1}{10}\left[15\,\vec{i} + (30t + 3)\,\vec{j} + 9\,\vec{k}\right]$$

b) Sustituyendo t = 3 s:

$$\vec{r} = 8{,}1\,\vec{i} + 14{,}4\,\vec{j} + 4{,}3\,\vec{k}$$
$$\vec{V}_{CM} = 1{,}5\,\vec{i} + 9{,}3\,\vec{j} + 0{,}9\,\vec{k}$$

7.26. ***Al dinamitar una roca, ésta sale despedida en tres fragmentos. Dos de ellos, de masas 10 y 20 kg, salen en ángulo recto con velocidades de 15 m/s y 10 m/s, respectivamente.***

Deducir la masa del tercer fragmento, cuya velocidad es 5 m/s.

Solución: Imaginemos que el primer fragmento sale despedido en el sentido positivo del eje OX y el segundo en el sentido positivo del eje OY, como se indica en la figura 7.8.

Aplicando el principio de conservación del momento lineal:

$$\Sigma\, p_x = m_1 \cdot v_1 - m_3 \cdot v_3 \cdot \cos\alpha = 0$$
$$\Sigma\, p_y = m_2 \cdot v_2 - m_3 \cdot v_3 \cdot \text{sen}\,\alpha = 0$$

Sustituyendo datos y efectuando operaciones, se tiene:

$$m_3 \cos\alpha = 30 \text{ kg} \qquad [1]$$

$$m_3 \cdot \text{sen}\,\alpha = 40 \text{ kg} \qquad [2]$$

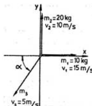


Fig. 7.8

Elevando al cuadrado las expresiones [1] y [2] y sumando:

$$m_3^2\,(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha) = (30^2 + 40^2)\text{ kg}^2$$

de donde:

$$m_3 = 50 \text{ kg}$$

7.27. ***En el sistema de la figura 7.9. las masas m_1 y m_2 están unidas por una barra rígida de masa despreciable.***

El sistema está inicialmente en reposo y al actuar las fuerzas que se indican se pondrá en movimiento. Calcular la posición del centro de masas y el momento lineal del sistema al cabo de 10 segundos.

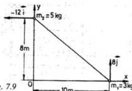


Fig. 7.9

Solución: Las coordenadas del centro de masas son:

$$x_o = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{3\text{ kg} \cdot 10\text{ m} + 5\text{ kg} \cdot 0}{8\text{ kg}} = \frac{15}{4}\text{ m}$$

$$y_o = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} = \frac{3\text{ kg} \cdot 0 + 5\text{ kg} \cdot 8\text{ m}}{8\text{ kg}} = 5\text{ m}$$

El vector posición del centro de masas será:

$$\vec{r}_o = \frac{15}{4}\,\vec{i} + 5\,\vec{j} \quad \text{(SI)}$$

Como la fuerza actuante (véase figura) es:

$$\vec{F} = -12\,\vec{i} + 8\,\vec{j} \quad \text{(SI)}$$

la aceleración del centro de masas será:

$$\vec{A}_{CM} = \frac{\vec{F}}{M} = \frac{-12\,\vec{i} + 8\,\vec{j}}{8\text{ kg}} = -\frac{3}{2}\,\vec{i} + \vec{j} \quad \text{(SI)}$$

y la velocidad:

$$\vec{V}_{CM} = \int \vec{A}_{CM}dt = \int \left(-\frac{3}{2}\,\vec{i} + \vec{j}\right) dt = -\frac{3}{2}\,t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + \vec{V}_o$$

Al estar el sistema inicialmente en reposo, $\vec{V}_o = 0$.

Por tanto:

$$\vec{V}_{CM} = -\frac{3}{2}\,t\,\vec{i} + t\,\vec{j} \quad \text{(SI)}$$

El momento lineal del sistema es:

$$\vec{p} = M \cdot \vec{V}_{CM} = 8\left(-\frac{3}{2}\,t\,\vec{i} + t\,\vec{j}\right) = -12t\,\vec{i} + 8t\,\vec{j} \quad \text{(SI)}$$

y para t = 10 s:

$$\boxed{\vec{\mathbf{p}} = -120\,\vec{\mathbf{i}} + 80\,\vec{\mathbf{j}} \quad \textbf{(SI)}}$$

Por otra parte:

$$\vec{r} = \int \vec{V}_{CM}dt = \int \left(-\frac{3}{2}\,t\,\vec{i} + t\,\vec{j}\right) dt = -\frac{3t^2}{4}\,\vec{i} + \frac{t^2}{2}\,\vec{j} + \vec{r}_o$$

y como:

$$\vec{r}_o = \frac{15}{4}\,\vec{i} + 5\,\vec{j} \quad \text{(SI)}$$

$$\vec{r} = \frac{15 - 3t^2}{4}\,\vec{i} + \left(5 + \frac{t^2}{2}\right)\vec{j} \quad \text{(SI)}$$

Para t = 10 s:

$$\boxed{\vec{r} = -\frac{285}{4}\,\vec{i} + 55\,\vec{j} \quad \text{(SI)}}$$

7.28. ***En uno de los remansos que forman los meandros del Guadiana, una rana de 25 g de masa reposa en el extremo de una tabla de madera de 2 m de longitud y 1,475 kg de masa, que flota en la superficie del agua.***

Sobre el extremo opuesto de la tabla se encuentra en reposo un insecto de masa despreciable. La rana intenta capturarlo, iniciando un salto con un ángulo de elevación de 45° sobre la horizontal.

Suponiendo que el insecto no se percate de las intenciones asesinas de la rana, determinar la velocidad inicial de ésta para que pueda conseguir su objetivo.

Solución: Sea m la masa de la rana y v_o su velocidad inicial. Aplicando el principio de conservación del momento lineal al sistema formado por la tabla y la rana, en dirección horizontal, se tiene:

$$m \cdot v_o \cdot \cos\alpha = M \cdot V$$

siendo M la masa de la tabla y V su velocidad de retroceso con respecto a la superficie inmóvil del río.

Para que la rana alcance en su salto el otro extremo de la tabla, que es donde se encuentra el insecto, deberá cumplirse que:

$$s - V \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$$

donde s es la longitud de la tabla y t el tiempo invertido por la rana en su salto, el cual viene dado, según se explicó en el lanzamiento de proyectiles, por:

$$t_{avance} = \frac{2 \cdot v_o \cdot \text{sen}\,\alpha}{g}$$

A partir de estas ecuaciones se obtiene:

$$v_o = \sqrt{\frac{g \cdot s}{\left(\frac{m}{M} + 1\right)\text{sen}\,2\alpha}}$$

Sustituyendo datos y efectuando operaciones:

$$\boxed{v_o = 4{,}39 \text{ m/s}}$$

7.29. ***¿Es posible que un móvil realice un movimiento tal que se conserven los momentos angulares respecto a dos puntos diferentes?***

Solución: Sí, siempre que la fuerza sea central respecto a ambos puntos a lo largo de toda la trayectoria del móvil.

Cabe distinguir dos casos:

a) Que la fuerza sea nula y el móvil se desplace siguiendo una trayectoria rectilínea arbitraria, con lo que su momento angular respecto a cualquier punto permanece constante.
b) Que el móvil y los dos puntos estén siempre alineados. En este caso, sea cual fuere el movimiento del móvil sobre la recta que une ambos puntos, su momento angular con respecto a ellos es siempre nulo.

7.30. *Cuando un cometa describe una trayectoria elíptica en torno al Sol, ocupando éste uno de los focos, su momento angular con respecto al otro foco ¿dónde es mayor: en el afelio o en el perihelio?*

Solución: El momento angular es mayor en el perihelio, ya que en esa posición el radiovector es mayor y, de acuerdo con la ley de las áreas, también es mayor su velocidad lineal.

7.31. *Se ha medido el momento angular de un punto móvil en distintos instantes, resultando siempre un vector de dirección y sentido constantes, cuyo módulo L varía con el tiempo, según se indica en la siguiente tabla de valores:*

t (s)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
L $(kg \cdot m^2 \cdot s^{-1})$	*4,0*	*2,5*	*1,7*	*1,5*	*2,3*	*3,8*

Representar L en función de t.

Observando la gráfica resultante, ¿se puede asegurar que en algún instante no existe momento de la fuerza aplicada?

¿En qué instante ocurre? ¿Por qué?

Solución: La gráfica pedida corresponde a la representada en la figura 7.10. Puede observarse cómo en el instante t = 4 s. el momento angular adquiere un valor mínimo; por consiguiente, en ese instante se cumple que:

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

lo que, como consecuencia de la aplicación del teorema del momento angular, nos indica que también será nulo el momento de la fuerza aplicada en ese instante sobre el punto móvil.

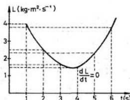


Fig. 7.10

7.32. *Un sistema está constituido por dos partículas, de masas $m_1 = 3$ kg y $m_2 = 5$ kg.*

En un instante determinado sus correspondientes vectores posición y velocidad son:

$\vec{r}_1 = 4\,\vec{i} - 2\,\vec{k}$ (SI) $\vec{v}_1 = 2\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$ (SI)

$\vec{r}_2 = -4\,\vec{i} + 8\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$ (SI) $\vec{v}_2 = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$ (SI)

Calcular el momento angular del sistema en ese mismo instante respecto a su centro de masas.

Solución: Como el vector posición y la velocidad del centro de masas son:

$$\vec{r}_o = \frac{\Sigma\, m_i \cdot \vec{r}_i}{M} = \frac{3\text{ kg}\,(4\,\vec{i} - 2\,\vec{k}) + 5\text{ kg}\,(-4\,\vec{i} + 8\,\vec{j} + 6\,\vec{k})}{8\text{ kg}} =$$

$$= -\vec{i} + 5\,\vec{j} + 3\,\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\Sigma\, m_i \cdot \vec{v}_i}{M} = \frac{3\text{ kg}\,(2\vec{i} - 2\,\vec{j} + 4\,\vec{k}) + 5\text{ kg}\,(2\,\vec{i} + 2\,\vec{j})}{8\text{ kg}} =$$

$$= 2\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j} + \frac{3}{2}\,\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

Los vectores de posición y las velocidades de cada una de las partículas respecto al centro de masas son:

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_o = (4\,\vec{i} - 2\,\vec{k}) - (-\vec{i} + 5\,\vec{j} + 3\,\vec{k}) =$$

$$= 5\,\vec{i} - 5\,\vec{j} - 5\,\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{r}_o = (-4\,\vec{i} + 8\,\vec{j} + 6\,\vec{k}) - (-\vec{i} + 5\,\vec{j} + 3\,\vec{k}) =$$

$$= -3\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 3\,\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{V}_{CM} = -\frac{5}{2}\,\vec{j} + \frac{5}{2}\,\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{V}_{CM} = \frac{3}{2}\,\vec{j} - \frac{3}{2}\,\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

Los momentos angulares de las partículas respecto al centro de masas del sistema serán:

$$\vec{L}_1' = \vec{r}_1' \wedge m_1 \cdot \vec{v}_1' = 3 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -5 & -5 \\ 0 & -5/2 & 5/2 \end{vmatrix} = -75\,\vec{i} - \frac{75}{2}\,\vec{j} - \frac{75}{2}\,\vec{k}$$

$$\vec{L}_2' = \vec{r}_2' \wedge m_2 \cdot \vec{v}_2' = 5 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \end{vmatrix} = -45\,\vec{i} - \frac{45}{2}\,\vec{j} - \frac{45}{2}\,\vec{k}$$

El momento angular total, también con respecto al centro de masas, será:

$$\boxed{\vec{L}' = \vec{L}_1' + \vec{L}_2' = -120\,\vec{i} - 60\,\vec{j} - 60\,\vec{k} \quad \text{(SI)}}$$

7.33. ***Una granada cae verticalmente. Cuando se encuentra a una altura de 1 500 m sobre el suelo, animada de una velocidad hacia abajo de 50 m · s^{-1}, explosiona dividiéndose en dos fragmentos de igual masa, uno de los cuales comienza a moverse verticalmente hacia abajo a la velocidad de 90 m · s^{-1}. Hallar la posición del centro de masas del sistema 10 segundos después de la explosión.***

Solución: Dado que tanto antes como después de la explosión la fuerza que actúa es la misma: la fuerza de gravedad; se puede considerar que el centro de masas continúa moviéndose como si no se hubiese producido ninguna explosión.

Tomando como positivas las magnitudes hacia arriba y negativas las descendentes, tenemos que 10 segundos después de la explosión:

$$h = h_o + v_o t + \frac{1}{2} g t^2 = 1\,500 \text{ m} + (-50 \text{ ms}^{-1}) \cdot 10 \text{ s} + \frac{1}{2} (-9{,}8 \text{ ms}^{-2}) \cdot$$

$$\cdot (10 \text{ s})^2 = 510 \text{ m}$$

El centro de masas del sistema 10 segundos después de la explosión se encuentra a 510 m sobre el suelo.

7.34. ***Un hombre de masa M salta desde una lancha de masa M_1 a la orilla de un río, tomando impulso para conseguir una velocidad c. La lancha retrocede, pero tiene que vencer la resistencia del agua $R = a \cdot v^2$ (siendo a una constante y v la velocidad variable de la lancha). Determinar la velocidad inicial, v_o, de la lancha en el instante del salto y la que tendrá tras haber transcurrido un tiempo t.***

Solución: Aplicando el principio de conservación del momento lineal al sistema formado por el hombre y la lancha, tenemos:

$$M \cdot c = M_1 \cdot v_o$$

siendo v_o la velocidad inicial con que retrocede la lancha. De aquí se deduce:

$$\boxed{v_o = \frac{M \cdot c}{M_1}} \qquad [1]$$

Aplicando a la lancha el teorema del impulso mecánico, resulta:

$$-a \cdot v^2 dt = M_1 dv$$

de donde:

$$-\frac{dv}{v^2} = \frac{a}{M_1}\, dt$$

Integrando la anterior expresión, se obtiene:

$$\frac{1}{v} + \text{cte} = \frac{a}{M_1}\, t$$

Para el cálculo de la constante de integración no hay más que tener en cuenta que para t = 0, $v = v_o$; por lo tanto, sustituyendo, tenemos:

$$\text{cte} = -\frac{1}{v_o}$$

Luego:

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_o} = \frac{a}{M_1}\, t$$

deduciéndose de aquí que:

$$v = \frac{v_o \cdot M_1}{M_1 + v_o \cdot a \cdot t}$$

Si sustituimos el valor de v_o dado por la expresión [1], se llega, por último, a:

$$\boxed{\mathbf{v = \frac{M \cdot M_1 \cdot c}{M_1^2 + M \cdot a \cdot c \cdot t}}}$$

7.35. ***Un barco de recreo remolca un bote, con un hombre en su interior, a la velocidad constante v_o. En el instante $t = 0$ se suelta el cable y el hombre comienza a remar en la misma dirección y sentido del movimiento, ejerciendo una fuerza constante F. Si la masa total del bote y el hombre es M y la resistencia del agua es igual a $k \cdot v$, se pide determinar la velocidad del bote al cabo de un tiempo t.***

Solución: Apliquemos el teorema del impulso mecánico al sistema integrado por el bote y el hombre:

$$(F - k \cdot v) \cdot dt = M \cdot dv$$

Agrupando variables en los dos miembros de la anterior expresión, tenemos:

$$dt = M \cdot \frac{dv}{F - k \cdot v}$$

Integremos ahora, teniendo en cuenta que en el instante inicial la velocidad es v_o:

$$t = \int dt = \int_{v_o}^{v} M \cdot \frac{dv}{F - k \cdot v} = \frac{M}{k} \cdot \ln \frac{F - k \cdot v_o}{F - k \cdot v}$$

Transformemos la ecuación logarítmica en exponencial:

$$e^{\frac{kt}{M}} = \frac{F - k \cdot v_o}{F - k \cdot v}$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{v = \frac{F - (F - k \cdot v_o) \cdot e^{-\frac{kt}{M}}}{k}}}$$

8. TRABAJO, POTENCIA Y ENERGÍA

FORMULARIO-RESUMEN

TRABAJO: $\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \varphi}$

- F = fuerza que actúa sobre el cuerpo
- s = desplazamiento
- φ = ángulo que forman la dirección de la fuerza y la del desplazamiento

Si la fuerza es variable y/o la trayectoria no es rectilínea:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

POTENCIA: $\boxed{P = \frac{W}{t} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$

ENERGÍA

- cinética: $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$
- potencial gravitatoria: $E_p = m \cdot g \cdot h$
- potencial elástica: $E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$

TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS:

$$W = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = \Delta E_c$$

ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA:

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i \cdot v_i^2; \quad \Sigma W_i^E + \Sigma W_i^I = E_{c_2} - E_{c_1} = \Delta E_{c_i}$$

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA:

$$E_m = \text{cte}; \ \Delta E_p = W_r + \Delta E_c$$

CHOQUES

Choque perfectamente elástico

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2'$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2'^2$$

Si el choque es central:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2'^2$$

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2\, m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2\, m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$$

v_1 y v_2 positivas si son del mismo sentido.

v_1 positiva y v_2 negativa, si son de sentidos contrarios.

Choque perfectamente inelástico

$$\vec{v}' = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Si el choque es central:

$$v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

Péndulo balístico: $v = \dfrac{M + m}{m} \sqrt{2gh}$

- M = masa del bloque.
- m = masa del proyectil.
- v = velocidad del proyectil.
- h = altura a la que se eleva el sistema bloque-proyectil después del impacto.

Coeficiente de restitución:

$$k = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

- Si el choque es perfectamente elástico, $k = 1$
- Si es perfectamente inelástico, $k = 0$
- Para los choques, en general: $0 < k < 1$

8. TRABAJO, POTENCIA Y ENERGÍA

8.1. *¿Qué se entiende por trabajo mecánico? ¿Qué trabajo se realiza al mover con velocidad constante un cuerpo sobre un círculo en un plano horizontal?*

Solución: El trabajo mecánico puede definirse como el efecto que realiza una fuerza al desplazar su punto de aplicación en cualquier dirección no perpendicular a la suya. Es una magnitud escalar definida por el producto de la fuerza efectiva que desplaza al cuerpo por el camino recorrido por su punto de aplicación.

Al mover con velocidad constante un cuerpo sobre un círculo en un plano horizontal no se realiza trabajo alguno, pues la fuerza aplicada (fuerza centrípeta) es perpendicular a la trayectoria seguida por el móvil.

8.2. *Una grúa soporta un cargamento de 500 kg de ladrillos y lo desplaza horizontalmente una distancia de 5 m. En el supuesto de que no existan rozamientos, ¿qué trabajo realiza la grúa?*

Solución: Ninguno, ya que, según se explicó en 8.1, los vectores fuerza y desplazamiento son, en este caso, perpendiculares. La dirección de la fuerza es la de la vertical, y la del desplazamiento, la horizontal.

8.3. *Si en las máquinas no puede haber ganancia de energía y, sin embargo, siempre se producen pérdidas energéticas en forma de calor debido a los rozamientos, ¿para qué sirven?*

Solución: Las máquinas se emplean para hacer más cómoda o más fácil la realización de un trabajo. Para ello modifican aquellos factores que influyen en él, con objeto de conseguir el mismo trabajo con un esfuerzo menor.

8.4. *Cuando se dice que un motor tiene una potencia mayor que otro porque realiza un trabajo mayor que él, ¿es correcta la afirmación?*

Solución: No, puesto que para definir la potencia hemos de conocer también el tiempo empleado en realizar el trabajo. Al no conocer el tiempo que emplea cada motor al realizar su trabajo respectivo, no podemos deducir su potencia.

8.5. *¿Qué trabajo realiza una persona que pesa 65 kg cuando sube a una altura de 10 m? ¿Realiza el mismo trabajo si sube por una escalera vertical que si lo hace por una inclinada?*

Solución: El trabajo valdrá:

$$W = P \cdot h = m \cdot g \cdot h = 65 \text{ kg} \cdot 10 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} = \boxed{\mathbf{6\,500 \ J}}$$

El trabajo realizado siempre es el mismo, tanto si sube por una escalera vertical como si lo hace por la inclinada; lo que sucede es que al subir por la inclinada el esfuerzo realizado es menor.

8.6. ***Se arrastra por el suelo con velocidad constante un cajón de 50 kg. Si el coeficiente de rozamiento es 0,2, ¿qué trabajo se realiza al desplazarlo una longitud de 10 m?***

Solución: Al desplazarlo con velocidad constante habrá que aplicarle una fuerza cuyo valor sea igual a la fuerza de rozamiento.
Por tanto:

$$F_{aplicada} = F_r = \mu \cdot m \cdot g = 0{,}2 \cdot 50 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 100 \text{ N}$$

El trabajo realizado valdrá:

$$W = F \cdot s = 100 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} = \boxed{\mathbf{1\,000 \text{ J}}}$$

8.7. ***Una grúa levanta una masa de 1 000 kg a una altura de 15 m en 1/4 de minuto. ¿Cuál es su potencia?***

Solución: Calcularemos, en primer lugar, el trabajo que realiza la grúa:

$$W = F \cdot s = P \cdot h = mgh = 10^3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 15 \text{ m} = 1{,}5 \cdot 10^5 \text{ J}$$

La potencia valdrá:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1{,}5 \cdot 10^5 \text{ J}}{15 \text{ s}} = 10^4 \text{ W} = \boxed{\mathbf{13{,}3 \text{ HP}}}$$

8.8. ***Un coche que marcha por una carretera horizontal a 36 km/h se deja en punto muerto. Si su masa es 600 kg y el coeficiente de rozamiento contra el suelo 0,5, ¿qué espacio recorrerá hasta pararse? ¿Qué trabajo realiza la fuerza de rozamiento?***

Solución: Tengamos en cuenta que 36 km/h = 10 m/s.
La fuerza de rozamiento viene dada por:

$$F_r = \mu mg = 0{,}5 \cdot 600 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 3\,000 \text{ N}$$

La aceleración a que se encuentra sometido el coche bajo la acción de esta fuerza de rozamiento (negativa) es:

$$a = \frac{-F_r}{m} = -\frac{3\,000 \text{ N}}{600 \text{ kg}} = -5 \text{ m/s}^2$$

El espacio recorrido por el vehículo vendrá dado por:

$$s = \frac{v^2 - v_o^2}{2\,a} = \frac{0 - (10 \text{ m/s})^2}{2\,(-5 \text{ m/s}^2)} = \boxed{\mathbf{10 \text{ m}}}$$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento valdrá:

$$W = F_r \cdot s = -3\,000 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} = \boxed{\mathbf{-3 \cdot 10^4 \text{ J}}}$$

El signo (−) indica que se trata de un trabajo resistente.

1.9. *Un motor de un coche, al ejercer sobre él una fuerza de 24 kp, le imprime una velocidad de 90 km/h. ¿Cuál es su potencia?*

Solución: Hemos de expresar previamente los datos en el sistema internacional:

$$24 \text{ kp} = 240 \text{ N}; \quad 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$$

La potencia viene dada por:

$$P = F \cdot v = 240 \text{ N} \cdot 25 \text{ m/s} = \boxed{\mathbf{6\,000\ W = 8\ CV}}$$

1.10. *Una fuerza de 50 kp tira de un bloque, inicialmente en reposo, que pesa 20 kg, situado en un plano inclinado 30° sobre la horizontal. La fuerza actúa hacia arriba y paralelamente al plano, y de esta forma el cuerpo recorre 10 m. Se sabe que el coeficiente de rozamiento es 0,2.*

Calcular: a) el trabajo realizado por la fuerza y su distribución; b) la velocidad adquirida por el cuerpo al final del recorrido; c) la cantidad de hielo a 0 °C que se podría fundir con el calor desprendido en el rozamiento. (Calor de fusión del hielo: 80 cal/g.)

Solución:

a) La fuerza aplicada, medida en unidades SI, vale: F = 490 N. El trabajo que realiza es:

$$W = F \cdot s = 490 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} = \boxed{\mathbf{4\,900\ J}}$$

Este trabajo se emplea: a) en vencer los rozamientos; b) en aumentar la energía cinética del cuerpo, y c) en aumentar su energía potencial.

b) Las fuerzas que influyen en el movimiento del cuerpo son: a) la aplicada (F = 490 N); b) la componente del peso en la dirección del plano ($F' = mg \text{ sen } \alpha = 20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}5 = 98 \text{ N}$), y c) la fuerza de rozamiento ($F_r = \mu mg \cos \alpha = 0{,}2 \cdot 20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}866 = 33{,}95 \text{ N}$).

Teniendo en cuenta que las fuerzas b) y c) se oponen al movimiento del cuerpo:

$$490 \text{ N} - 98 \text{ N} - 33{,}95 \text{ N} = 20 \text{ kg} \cdot a$$

de donde:

$$a = 17{,}9 \text{ m/s}^2$$

La velocidad será:

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 17{,}9 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m}} = \boxed{\mathbf{18{,}9\ m/s}}$$

c) Calcularemos en primer lugar el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento:

$$W_r = F_r \cdot s = 33{,}95 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} = 339{,}5 \text{ J}$$

Como 1 J = 0,24 cal:

$$W_r = 339{,}5 \text{ J} \cdot 0{,}24 \ \frac{\text{cal}}{\text{J}} = 81{,}48 \text{ cal}$$

El hielo que puede fundirse es:

$$m = 81{,}48 \text{ cal}/80 \text{ cal} \cdot g^{-1} = \boxed{1{,}02 \text{ g}}$$

8.11. ***La resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, que se supone aplicada en el centro de masas, viene dada por la expresión:***

$$\vec{F} = 6\, x^2\, \vec{i} + 2\, y\, \vec{j} + 4\, z\, \vec{k}$$

estando la fuerza medida en N.

¿Qué trabajo realiza esa fuerza resultante al trasladar el centro de masas desde el origen de coordenadas (0,0,0) al punto (1,1,1)?

Solución: Este trabajo vendrá dado por la expresión:

$$W = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz) = \int_0^1 6\, x^2\, dx + \int_0^1 2\, y\, dy + \int_0^1 4\, z\, dz =$$

$$\left[\frac{6\, x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2\, y^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{4\, z^2}{2}\right]_0^1 = 2 + 1 + 2 = \boxed{5 \text{ J}}$$

8.12. ***Un cuerpo de masa 2 kg se mueve a lo largo de una trayectoria cuyos puntos vienen determinados por las siguientes ecuaciones paramétricas: $x = 3\, t^2$; $y = 3\, t^3$; $z = -2\, t$, estando x, y, z expresadas en metros.***

Deducir: a) la ecuación de la velocidad y su módulo; b) el momento lineal del cuerpo; c) el trabajo realizado por la fuerza que actúa sobre ese cuerpo entre los instantes t = 1 s y t = 2 s.

Solución:

a) El vector posición $\vec{r}$ del punto móvil viene dado por:

$$\vec{r} = 3\, t^2\, \vec{i} + 3\, t^3\, \vec{j} - 2\, t\, \vec{k} \quad \text{(SI)}$$

El vector velocidad, al ser $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, será:

$$\boxed{\vec{v} = 6\, t\, \vec{i} + 9\, t^2\, \vec{j} - 2\, \vec{k} \quad \text{(SI)}}$$

y su módulo:

$$\boxed{v = \sqrt{36\, t^2 + 81\, t^4 + 4}}$$

b) El momento lineal —o cantidad de movimiento— es el producto $m \cdot \vec{v}$. Por tanto:

$$\boxed{\vec{p} = 2\, (6\, t\, \vec{i} + 9\, t^2\, \vec{j} - 2\, \vec{k}) = 12\, t\, \vec{i} + 18\, t^2\, \vec{j} - 4\, \vec{k} \quad \text{(SI)}}$$

c) La derivada, respecto al tiempo, del momento lineal es la fuerza aplicada al cuerpo:

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt = 12\,\vec{i} + 36\,t\,\vec{j} \quad (SI)$$

El trabajo realizado por esta fuerza $\vec{F}$ en el intervalo de tiempo comprendido entre los instantes t = 1 s y t = 2 s, será:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (12\,\vec{i} + 36\,t\,\vec{j}) \cdot (6t\,\vec{i} + 9\,t^2\,\vec{j} - 2\,\vec{k})\,dt =$$

$$= \int_1^2 (72\,t + 324\,t^3)\,dt = \left[\frac{72\,t^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{324\,t^4}{4}\right]_1^2 = \boxed{1\,323\ J}$$

8.13. ***Para abastecer de agua a una ciudad se consumen diariamente 200 m^3. El líquido es elevado a depósitos situados a 80 m por encima del nivel del agua en los pozos.***
¿Qué trabajo se consume al cabo de un año?

Solución: La masa de agua elevada en un día es: 200 ton = $2 \cdot 10^5$ kg.
El trabajo realizado para elevarla a 80 m valdrá:

$$W = F \cdot s = P \cdot h = mgh = 2 \cdot 10^5\ kg \cdot 10\ m \cdot s^{-2} \cdot 80\ m = 16 \cdot 10^7\ J$$

El trabajo realizado en un año será:

$$W_{año} = 16 \cdot 10^7\ \frac{J}{día} \cdot 365\ días = \boxed{584 \cdot 10^8\ J}$$

8.14. ***Desde una altura de 30 m se lanza verticalmente hacia abajo un proyectil con una velocidad de 100 m/s.***
¿Qué velocidad poseerá cuando se encuentre a 10 m sobre el suelo?

Solución: Aplicando el principio general de conservación de la energía:

Energía total en A = Energía total en B

siendo A el punto de lanzamiento y B el que corresponde a 10 m sobre el suelo.

El proyectil, en A, posee energía potencial gravitatoria y energía cinética (la que corresponde a la velocidad inicial de lanzamiento):

$$mgh_A + \frac{1}{2}\,m \cdot v_A^2$$

El proyectil, en B, también posee ambas energías (gravitatoria y cinética):

$$mgh_B + \frac{1}{2}\,m \cdot v_B^2$$

Igualando ambas expresiones, sustituyendo datos y efectuando operaciones:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2\,g\,(h_A - h_B)} = \sqrt{(100\ m/s)^2 + 2 \cdot 10\ m \cdot s^{-2} \cdot 20\ m} = \boxed{102\ m/s}$$

8.15. *Una fuerza de 50 kp actúa sobre un cuerpo de 10 kg, inicialmente en reposo, durante 5 minutos.*

a) ¿Qué velocidad y qué espacio habrá recorrido en ese tiempo?
b) ¿Cuánto vale el trabajo realizado por la fuerza en ese tiempo?
c) ¿Qué energía cinética tendrá el cuerpo al cabo de 2 segundos?

Solución:

a) La aceleración a que se encuentra sometido el cuerpo es:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{500\ N}{10\ kg} = 50\ m/s^2$$

la velocidad al cabo de 5 minutos (300 segundos):

$$v = v_o + at = 0 + 50\ m \cdot s^{-2} \cdot 300\ s = \boxed{15 \cdot 10^3\ m/s}$$

y el espacio recorrido:

$$s = \frac{1}{2}\ at^2 = \frac{1}{2} \cdot 50\ m \cdot s^{-2} \cdot (300\ s)^2 = \boxed{225 \cdot 10^4\ m}$$

b) El trabajo viene dado por:

$$W = F \cdot s = 500\ N \cdot 225 \cdot 10^4\ m = \boxed{1\,125 \cdot 10^6\ J}$$

c) La velocidad del cuerpo al cabo de 2 segundos es:

$$v = v_o + at = 50\ m \cdot s^{-2} \cdot 2\ s = 100\ m/s$$

y la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}\ mv^2 = \frac{1}{2}\ 10\ kg \cdot (100\ m/s)^2 = \boxed{5 \cdot 10^4\ J}$$

8.16. *Un automóvil de 1 425 kg arranca sobre una pista horizontal en la que se supone una fuerza de rozamiento constante de valor 150 N. Calcular:*

a) La aceleración que precisa el coche para alcanzar la velocidad de 120 km/h en un recorrido de 800 m.
b) El trabajo realizado por el motor desde el momento de la salida hasta el instante de alcanzar los 120 km/h.
c) La potencia media desarrollada por el motor en ese tiempo.

Solución:

a) 120 km/h = 120 000 m/3 600 s = 33,33 m/s.
Sustituyendo los datos de velocidad y espacio en las ecuaciones del movimiento uniformemente variado:

$$\left.\begin{array}{l} 33{,}33 \text{ m/s} = a \cdot t \\ 800 \text{ m} = \frac{1}{2}\, at^2 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, se tiene:

$$t = 48 \text{ s}; \quad \boxed{\mathbf{a = 0{,}694 \text{ m/s}^2}}$$

b) La fuerza ejercida por el motor es la suma de la precisa para comunicar esa aceleración más la necesaria para vencer el rozamiento:

$$F = m \cdot a + F_r = 1\,425 \text{ kg} \cdot 0{,}694 \text{ m/s}^2 + 150 \text{ N} = 1\,139 \text{ N}$$

El trabajo realizado por esa fuerza a lo largo de 800 m:

$$W = F \cdot s = 1\,139 \text{ N} \cdot 800 \text{ m} = \boxed{\mathbf{911\,200 \text{ J}}}$$

c) La potencia desarrollada en ese tiempo:

$$P = 911\,200 \text{ J/48 s} = 18\,983{,}33 \text{ W} = \boxed{\mathbf{25{,}8 \text{ CV}}}$$

8.17. *Un automóvil de masa 1 tonelada lleva una velocidad constante de 108 km/h a lo largo de una carretera que presenta una pendiente del 2 % (entiéndase: 2 m de desnivel por cada 100 m recorridos). ¿Qué potencia desarrolla el motor?*

Solución: El motor del coche, al llevar éste una velocidad constante de 108 km/h = 30 m/s, deberá ejercer una fuerza hacia arriba, paralela a la carretera, igual a la componente del peso del coche en esa misma dirección (fig. 8.1):

$$F = mg \text{ sen } \alpha$$

$$F = 1\,000 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}02 = 200 \text{ N}$$

Al ser paralelas $\vec{F}$ y $\vec{v}$:

$$P = F \cdot v = 200 \text{ N} \cdot 30 \text{ m/s} = \boxed{\mathbf{6\,000 \text{ W}}}$$

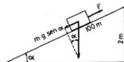


Fig. 8.1

8.18. *Un proyectil de 400 g atraviesa una pared de 0,5 m de grosor. Su velocidad [illegible]*

Solución:

a) Aplicando el teorema de las fuerzas vivas:

$$W = 1/2 \cdot 0{,}4\ kg \cdot 100^2\ (m/s)^2 - 1/2 \cdot 0{,}4\ kg \cdot 400^2\ (m/s)^2 = \boxed{-3 \cdot 10^4\ J}$$

b) Como W = F · s:

$$-3 \cdot 10^4\ J = F \cdot 0{,}5\ m$$

de donde:

$$\boxed{F = -6 \cdot 10^{14}\ N}$$

Obsérvese que el trabajo y la fuerza son negativos. El primero por ser un trabajo pasivo o de rozamiento; la segunda por ser una fuerza opuesta al movimiento.

8.19. ***La fuerza con que los gases, procedentes de la explosión de la carga de combustión, actúan en el interior de un fusil sobre un proyectil de 5 g de masa viene dada por la expresión F = 400 − 800 x (F medida en N y x en m).***

Si el proyectil es disparado con una velocidad de 200 m/s, calcular su energía en el instante de abandonar el arma y la longitud del cañón

Solución:

a) La energía del proyectil vendrá dada por:

$$E_c = 1/2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot 200^2\ (m/s)^2 = \boxed{100\ J}$$

b) Esta energía procede del trabajo realizado por los gases en el interior del cañón. Al ser producido por una fuerza variable que actúa en la misma dirección del desplazamiento:

$$W = \int F \cdot dx = \int (400 - 800\ x)\ dx = 400\ x - \frac{1}{2}\ 800\ x^2$$

Por tanto:

$$100 = 400\ x - 400\ x^2$$

de donde:

$$\boxed{x = 0{,}5\ m}$$

8.20. ***Desde una altura de 200 m se deja caer una piedra de 5 kg.***

a) ¿Con qué velocidad llega al suelo?
b) ¿Cuánto valdrá la energía potencial en el punto más alto?
c) ¿Cuánto valdrá su energía cinética al llegar al suelo?
d) ¿Cuánto valdrá su velocidad en el punto medio de su recorrido?

Nota: ***Empléense únicamente consideraciones energéticas.***

Solución:

a), b) y c) La energía potencial en el punto más alto viene dada por:

$$E_p = mgh = 5\ kg \cdot 10\ m \cdot s^{-2} \cdot 200\ m = \boxed{10^4\ J}$$

Esta energía será igual a la energía cinética del cuerpo al llegar al suelo como consecuencia del principio de conservación. La velocidad en este punto la deducimos de:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

de donde:

$$v = \sqrt{\frac{2 E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4 \text{ J}}{5 \text{ kg}}} = \boxed{63{,}25 \text{ m/s}}$$

d) La velocidad en el punto medio del recorrido se calcula aplicando también el principio de conservación de la energía:

$$E_{total} = E_p + E_c$$

Como en el punto medio del recorrido h = 100 m, se tiene:

$$10^4 \text{ J} = 5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 100 \text{ m} + \frac{1}{2} 5 \text{ kg} \cdot v^2$$

y despejando v:

$$\boxed{v = 44{,}7 \text{ m/s}}$$

8.21. *Un proyectil de 15 g sale por el cañón de un fusil de 75 cm de largo con una velocidad de 100 m/s.*

a) ¿Qué fuerza actuó sobre el proyectil, supuesta constante?
b) ¿Cuánto vale la energía del proyectil a la salida del arma?
c) ¿Con qué velocidad retrocede el arma si su masa es de 5 kg?

Solución:

a) y b) Calcularemos previamente la energía cinética del proyectil a la salida del arma:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10^{-3} \text{ kg } (100 \text{ m/s})^2 = \boxed{75 \text{ J}}$$

Aplicando el teorema de las fuerzas vivas y recordando que W = F · s:

$$W = E_c - E_{c(o)} = F \cdot s$$
$$75 \text{ J} = F \cdot 0{,}75 \text{ m}$$

se deduce el valor de F:

$$F = \frac{75 \text{ J}}{0{,}75 \text{ m}} = \boxed{100 \text{ N}}$$

c) Aplicando el principio de conservación del momento lineal:

$$M \cdot V + m \cdot v = 0$$

donde: m = masa del proyectil; v = velocidad del proyectil; M = masa del arma; V = velocidad de retroceso del arma.

$$V = -\frac{mv}{M} = -\frac{15 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 100\ \text{m/s}}{5\ \text{kg}} = \boxed{-0{,}3\ \text{m/s}}$$

8.22. ***Un cuerpo de 10 kg se sitúa en lo alto de un plano inclinado 30° sobre la horizontal. La longitud del plano es 10 m y el coeficiente de rozamiento 0,2.***

a) ***¿Con qué velocidad llega el cuerpo al final del plano?***
b) ***¿Cuánto valdrá la energía potencial del cuerpo al estar situado en lo alto del plano?***
c) ***¿Cuánto vale el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento?***

Solución:

a) La aceleración de caída del cuerpo por el plano viene dada por:

$$a = g\ (\text{sen}\ \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$a = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}\ (0{,}5 - 0{,}2 \cdot 0{,}866) = 3{,}27\ \text{m/s}^2$$

La velocidad con que llega al final del plano:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\ as} = \sqrt{2 \cdot 3{,}27\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 10\ \text{m}} = \boxed{8{,}1\ \text{m/s}}$$

b) La energía potencial viene dada por $E_p = mgh$; donde h puede calcularse en función de la longitud del plano y del ángulo que éste forma con la horizontal (fig. 8.2):

$$h = 10\ \text{m} \cdot \text{sen}\ 30° = 5\ \text{m}$$

$$E_p = mgh =$$

$$= 10\ \text{kg} \cdot 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 5\ \text{m} = \boxed{500\ \text{J}}$$

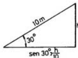


Fig. 8.2

c) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento será la diferencia entre la energía potencial en el punto más alto del plano y la energía cinética al final de éste:

$$W_r = E_p - E_c = 500\ \text{J} - \frac{1}{2}\ 10\ \text{kg} \cdot (8{,}1\ \text{m/s})^2 = \boxed{173{,}2\ \text{J}}$$

También puede calcularse este trabajo teniendo en cuenta que la fuerza de rozamiento ($F_r = \mu mg \cos \alpha = 17{,}32$ N) se desplaza 10 m en su dirección:

$$W_r = F_r \cdot s = 17{,}32\ \text{N} \cdot 10\ \text{m} = \boxed{173{,}2\ \text{J}}$$

8.23. *Una fuerza constante de 15 kp actúa sobre un cuerpo de 30 kg, inicialmente en reposo, durante 5 segundos.* (Nota: *Se supone que no hay rozamiento.*)

a) *¿A qué aceleración está sometido el cuerpo?*
b) *¿Qué velocidad adquiere y qué espacio recorre en ese tiempo?*
c) *¿Qué trabajo realiza la fuerza?*

Solución:

a) La aceleración se obtiene a partir de la aplicación de la ecuación fundamental de la Dinámica:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{150\ N}{30\ kg} = \boxed{5\ m/s^2}$$

b) La velocidad y el espacio recorrido por el cuerpo se calculan a partir de las dos ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado:

$$v = v_o + at = 5\ m \cdot s^{-2} \cdot 5\ s = \boxed{25\ m/s}$$

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2}\ at^2 = \frac{1}{2}\ 5\ m \cdot s^{-2}\ (5\ s)^2 = \boxed{62{,}5\ m}$$

c) El trabajo realizado por la fuerza será:

$$W = F \cdot s = 150\ N \cdot 62{,}5\ m = \boxed{9\ 375\ J}$$

Este trabajo también puede calcularse a partir del teorema de las fuerzas vivas:

$$W = E_c - E_{c(o)} = \frac{1}{2}\ mv^2 - 0 = \frac{1}{2}\ 30\ kg \cdot (25\ m/s)^2 = \boxed{9\ 375\ J}$$

8.24. *Un cuerpo de 5 kg desliza por un plano horizontal con velocidad constante. El coeficiente de rozamiento del cuerpo contra el plano es 0,5. ¿Qué trabajo realiza la fuerza aplicada al cuerpo en un recorrido de 10 m?*

Solución: Si el cuerpo desliza con velocidad constante (a = 0), la fuerza aplicada ha de ser igual a la de rozamiento:

$$F = F_r = \mu mg = 0{,}5 \cdot 5\ kg \cdot 10\ m \cdot s^{-2} = 25\ N$$

Y el trabajo que realiza en un recorrido de 10 m:

$$W = F \cdot s = 25\ N \cdot 10\ m = \boxed{250\ J}$$

8.25. [illegible]

Solución: De acuerdo con la expresión matemática del trabajo:

$$W = F \cdot s \cdot \cos \varphi = 100\ N \cdot 20\ m \cdot \cos 30° = \boxed{1\ 732{,}05\ J}$$

8.26. ***Sobre un plano inclinado 30° sobre la horizontal se sitúa un cuerpo de 2 kg para que deslice libremente. El coeficiente de rozamiento es 0,4. Deducir:***

a) ***La aceleración de caída.***
b) ***La velocidad del cuerpo al cabo de 2 segundos.***
c) ***El espacio recorrido en ese tiempo.***
d) ***La energía cinética del cuerpo al cabo de ese tiempo.***

Solución:

a) La aceleración de caída es:

$$a = g\,(\text{sen}\,\alpha - \mu\cos\alpha) = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\,(0{,}5 - 0{,}4\cdot 0{,}866) \simeq \boxed{\mathbf{1{,}6\ m/s^2}}$$

b) La velocidad se calcula a partir de:

$$v = v_o + at = 1{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 2\ \text{s} = \boxed{\mathbf{3{,}2\ m/s}}$$

c) El espacio viene dado por:

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2}\,at^2 = \frac{1}{2}\,1{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\,(2\ \text{s})^2 = \boxed{\mathbf{3{,}2\ m}}$$

d) La energía cinética del cuerpo al cabo de 2 segundos:

$$E_c = \frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{1}{2}\,2\ \text{kg}\,(3{,}2\ \text{m/s})^2 = \boxed{\mathbf{10{,}24\ J}}$$

8.27. ***En lo alto de un plano inclinado 30° sobre la horizontal, de 16 m de longitud, se coloca un cuerpo de 1 kg de masa.***

a) ***¿Cuánto vale su energía potencial cuando está en lo alto del plano?***
b) ***¿Cuánto vale la energía cinética al llegar al final del plano si no existen rozamientos?***
c) ***¿Cuál es la velocidad del cuerpo al llegar al final del plano?***

Solución:

a) La altura del plano es $h = l\cdot\text{sen}\,30° = 16\ \text{m}\cdot 0{,}5 = 8\ \text{m}$. La energía potencial en ese punto:

$$E_p = mgh = 1\ \text{kg}\cdot 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 8\ \text{m} = \boxed{\mathbf{80\ J}}$$

b) De acuerdo con el principio de conservación de la energía, si no existen rozamientos, la energía gravitatoria en lo alto del plano ha de ser igual a la energía cinética en el punto más bajo:

$$E_c = E_p = \boxed{\mathbf{80\ J}}$$

c) Según la expresión matemática de la energía cinética: $E_c = \frac{1}{2}\,mv^2$, y despejando v:

$$v = \sqrt{\frac{2\,E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 80\ \text{J}}{1\ \text{kg}}} = \boxed{\mathbf{12{,}6\ m/s}}$$

8.28. ***Dos bloques, de masas 100 g y 20 g, que se mueven sobre una superficie horizontal sin rozamientos, con velocidades respectivas de 2 dm/s y 0,1 m/s, en el mismo sentido, chocan frontalmente.***

¿Qué velocidades adquieren ambos cuerpos después del choque?

Solución: Aplicando las expresiones matemáticas de la velocidad final en el choque elástico central:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\, v_1 + 2\, m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_1' = \frac{(0{,}1 - 0{,}02)\ \text{kg} \cdot 0{,}2\ \text{m/s} + 2 \cdot 0{,}02\ \text{kg} \cdot 0{,}1\ \text{m/s}}{0{,}12\ \text{kg}} = \boxed{0{,}17\ \text{m/s}}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)\, v_2 + 2\, m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{(0{,}02 - 0{,}1)\ \text{kg} \cdot 0{,}1\ \text{m/s} + 2 \cdot 0{,}1\ \text{kg} \cdot 0{,}2\ \text{m/s}}{0{,}12\ \text{kg}} = \boxed{0{,}27\ \text{m/s}}$$

8.29. ***Un muelle, sujeto por su extremo superior, soporta un cuerpo de masa 0,01 kg, estando ambos en reposo. Se observa que al aplicar una fuerza de 2 N el resorte se alarga 8 cm y que al soltarlo inicia un movimiento vibratorio armónico. Deducir la energía de este movimiento y el período de vibración.***

Solución: Según la ley de Hooke, la constante elástica k del muelle vendrá dada por: $k = F/x$. Por tanto:

$$k = 2\ \text{N}/0{,}08\ \text{m} = 25\ \text{N/m}$$

La energía se calcula mediante la expresión:

$$E = \frac{1}{2}\, kx^2 = \frac{1}{2}\, 25\ \text{N/m} \cdot (8 \cdot 10^{-2})^2\ \text{m}^2 = \boxed{8 \cdot 10^{-2}\ \text{J}}$$

El período de oscilación se calcula mediante la expresión ya conocida de cursos anteriores (y que veremos de nuevo más adelante):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{10^{-2}\ \text{kg}}{25\ \text{N/m}}} = \boxed{0{,}1256\ \text{s}}$$

8.30. ***Desde un acantilado de 50 m de altura se dispara un proyectil de 100 g con una velocidad de 200 m/s, formando un ángulo de 45° con la horizontal. ¿Qué velocidad posee el proyectil cuando se encuentra a 10 m sobre el mar?***

Solución: La energía mecánica que posee el proyectil en el momento de abandonar el arma ha de ser igual a la que tenga cuando se encuentre a 10 m sobre el mar:

$$mgh_1 + \frac{1}{2}\, mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}\, mv_2^2$$

Simplificando y sustituyendo datos:

$$10 \text{ m/s}^2 \cdot 50 \text{ m} + 0{,}5 \cdot 200^2 \text{ (m/s)}^2 = 10 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m} + 0{,}5 \cdot v_2^2$$

Despejando v_2:

$$\boxed{v_2 = 202 \text{ m/s}}$$

8.31. ***(*) Un proyectil de masa 10 g, que se mueve con una velocidad v, se incrusta en un bloque de madera de masa 3,990 kg, inicialmente en reposo. Como consecuencia del impacto el conjunto bloque-proyectil asciende una altura de 5 cm. Calcular: a) la velocidad del conjunto bloque-proyectil en el instante del choque; b) la velocidad del proyectil antes del choque; c) razonar si se conservan después del impacto el momento lineal y la energía cinética del proyectil.***

Solución:

a) La energía cinética del conjunto bloque-proyectil se transforma en energía potencial gravitatoria, cumpliéndose que:

$$\frac{1}{2}(m + M)\, v'^2 = (m + M)\, gh$$

de donde:

$$v' = \sqrt{2\,gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = \boxed{1 \text{ m/s}}$$

b) Aplicando el principio de conservación del momento lineal se tiene:

$$mv = (m + M)\, v'$$

$$v = \frac{4 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}}{10^{-2} \text{ kg}} = \boxed{400 \text{ m/s}}$$

c) En este caso de choque inelástico —que suponemos perfecto— se conserva el momento lineal; pero no la energía cinética del proyectil, que una gran parte se transforma en trabajo de deformación y en calor. En efecto:

Energía cinética del proyectil antes del choque:

$$E_c = 1/2 \text{ mv}^2 = 1/2 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot 400^2 \text{ (m/s)}^2 = \boxed{800 \text{ J}}$$

Energía cinética del conjunto bloque-proyectil en el instante del impacto:

$$E_c = 1/2\,(m + M)\, v'^2 = 1/2 \cdot 4 \text{ kg} \cdot 1 \text{ (m/s)}^2 = \boxed{2 \text{ J}}$$

Solución:

a) Si se mueven en el mismo sentido, las velocidades son del mismo signo:

$$v_1' = \frac{(0{,}1\ \text{kg} - 0{,}02\ \text{kg})\ 0{,}2\ \text{m/s} + 2 \cdot 0{,}02\ \text{kg} \cdot 0{,}1\ \text{m/s}}{0{,}1\ \text{kg} + 0{,}02\ \text{kg}} = \boxed{0{,}167\ \text{m/s}}$$

$$v_2' = \frac{(0{,}02\ \text{kg} - 0{,}1\ \text{kg}) \cdot 0{,}1\ \text{m/s} + 2 \cdot 0{,}1\ \text{kg} \cdot 0{,}2\ \text{m/s}}{0{,}1\ \text{kg} + 0{,}02\ \text{kg}} = \boxed{0{,}267\ \text{m/s}}$$

Los bloques se moverán en la misma dirección y sentido que inicialmente.

b) Si los cuerpos se mueven en sentidos contrarios, la velocidad de uno será negativa respecto a la del otro: $v_1 = 0{,}2$ m/s; $v_2 = -0{,}1$ m/s:

$$v_1' = \frac{(0{,}1\ \text{kg} - 0{,}02\ \text{kg})\ 0{,}2\ \text{m/s} - 2 \cdot 0{,}1\ \text{m/s} \cdot 0{,}02\ \text{kg}}{0{,}1\ \text{kg} + 0{,}02\ \text{kg}} = \boxed{0{,}1\ \text{m/s}}$$

$$v_2' = \frac{(0{,}02\ \text{kg} - 0{,}1\ \text{kg})\ (-0{,}1\ \text{m/s}) + 2 \cdot 0{,}1\ \text{kg} \cdot 0{,}2\ \text{m/s}}{0{,}1\ \text{kg} + 0{,}02\ \text{kg}} = \boxed{0{,}4\ \text{m/s}}$$

Después del choque el primer bloque continúa moviéndose en la misma dirección y sentido que al principio; el segundo bloque cambia el sentido de su velocidad.

8.33. *Dos péndulos A y B, de masas 90 g y 150 g, respectivamente, cuelgan verticalmente de dos hilos de masa despreciable cuya longitud mide 0,1 m. El péndulo A se eleva hasta una posición tal que el hilo forme un ángulo de 45° con la vertical y desde allí se le suelta para que choque contra el péndulo B, que está en reposo, como se indica en la figura 8.3.*

Si el coeficiente de restitución es 0,8, ¿qué altura alcanzará cada péndulo después del primer choque?

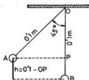


Fig. 8.3

Solución: La velocidad con que el péndulo A choca contra el B se deduce a partir de la expresión $v = \sqrt{2\ gh}$.

El valor de h, como puede observarse en la figura, será:

$$h = 0{,}1\ \text{m} - 0{,}1\ \text{m} \cos 45° = 0{,}1\ \text{m} - 0{,}0707\ \text{m} = 0{,}029\ \text{m} \simeq 0{,}03\ \text{m}$$

$$v_a = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}03\ \text{m}} = 0{,}77\ \text{m/s}$$

Aplicando las expresiones correspondientes a la conservación del momento lineal y al coeficiente de restitución, se tiene:

$$0{,}09\ \text{kg} \cdot 0{,}77\ \text{m/s} = 0{,}09\ \text{kg} \cdot v_a' + 0{,}150\ \text{kg} \cdot v_b'$$

$$0{,}8 = -\frac{v_a' - v_b'}{v_a - v_b} = -\frac{v_a' - v_b'}{0{,}77 \text{ m/s}}$$

Resolviendo el sistema se obtienen los siguientes valores:

$$v_a' = -0{,}096 \text{ m/s}; \quad v_b' = 0{,}52 \text{ m/s}$$

Lo que indica que el péndulo A retrocede después del choque.

Las energías cinéticas de los péndulos se transforman en energías potenciales gravitatorias: $1/2\ mv^2 = mgh$; de donde: $h = v^2/2g$.

$$h_a = (0{,}096 \text{ m/s})^2/2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = \boxed{4{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ m}}$$

$$h_b = (0{,}52 \text{ m/s})^2/2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = \boxed{1{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$

8.34. ***(*) En la cima de una «montaña rusa» un coche y sus ocupantes, cuya masa total es 1 000 kg, está a una altura de 40 m sobre el suelo y lleva una velocidad de 5 m/s.***

¿Qué energía cinética tendrá el coche cuando llegue a la cima siguiente, que está a 20 m de altura?

Solución: Si llamamos A a la primera cima, donde se encuentra el coche inicialmente, y B a la segunda, tal como se esquematiza en la figura 8.4, y aplicamos el principio general de conservación de la energía en ambos puntos, tenemos:

$$Ep_A + Ec_A = Ep_B + Ec_B$$

de donde:

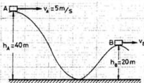


Fig. 8.4

$$Ec_B = Ep_A + Ec_A - Ep_B = mg\,(h_A - h_B) + \frac{1}{2}\, mv_A^2 =$$

$$= 1\,000 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}\,(40 - 20) \text{ m} + \frac{1}{2}\, 1\,000 \text{ kg}\,(5 \text{ m/s})^2 = \boxed{208\,500 \text{ J}}$$

8.35. ***Una masa puntual se encuentra situada en el punto (1,1,1) y mediante la acción de la fuerza $\vec{F} = 3x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} + 5z\,\vec{k}$ se desplaza hasta el punto (2,0,3).***

¿Qué trabajo realizó la fuerza?

Solución:

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) =$$

$$= \int_1^2 3x\,dx - \int_1^0 2y\,dy + \int_1^3 5z\,dz =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2}\right]_1^2 - \left[y^2\right]_1^0 + \left[\frac{5z^2}{2}\right]_1^3 = \boxed{25{,}5\ \text{J}}$$

8.36. ***Un motor de 16 CV eleva un montacargas de 500 kg a 50 m de altura en 25 segundos.***
Calcúlese la potencia desarrollada y el rendimiento del motor.

Solución: El motor realiza un trabajo:

$$W = mgh = 500\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 50\ \text{m} = 2{,}45 \cdot 10^5\ \text{J}$$

y la potencia que desarrolla vale:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{2{,}45 \cdot 10^5\ \text{J}}{25\ \text{s}} = \boxed{9\ 800\ \text{W}}$$

La potencia que consume el motor es:

$$P' = 16\ \text{CV} = 16\ \text{CV} \cdot \frac{735{,}75\ \text{W}}{1\ \text{CV}} = 11\ 772\ \text{W}$$

Por tanto, el rendimiento valdrá:

$$R\ \% = \frac{9\ 800\ \text{W}}{11\ 772\ \text{W}} \cdot 100 = \boxed{83{,}2\ \%}$$

8.37. ***Un fusil dispara proyectiles de masa 1 g con una velocidad de salida de 400 m/s. La fuerza variable con que los gases procedentes de la explosión de la carga de proyección actúan sobre la base del proyectil viene dada por:***

$$F = 320 - 640\ x$$

F viene expresada en N y x en m.
Deducir la longitud del cañón del fusil.

Solución: En la boca del cañón del fusil la energía cinética del proyectil es:

$$E_c = \frac{1}{2}\ 10^{-3}\ \text{kg} \cdot (400\ \text{m/s})^2 = 80\ \text{J}$$

Aplicando el teorema de las fuerzas vivas, de acuerdo con el cual esta energía procede del trabajo producido por los gases en el interior del fusil:

$$W = E_c = \int F\ dx = \int (320 - 640\ x)\ dx = 80\ \text{J}$$

De donde:

$$320\ x - 320\ x^2 = 80$$
$$320\ x^2 - 320\ x + 80 = 0$$
$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

ecuación que conduce a:

$$\boxed{x = 0,5 \text{ m}}$$

8.38. ***Dos masas de 6 y 20 kg están sujetas por los extremos de una cuerda ligera que pasa por una polea sin rozamientos. La masa de 6 kg apoya directamente en el suelo y la de 20 kg está a 2 m sobre él, según se representa en la figura 8.5.***

Si se deja el sistema en libertad, ¿con qué velocidad llegará al suelo la masa de 20 kg ?

Nota: *Utilícense exclusivamente razonamientos energéticos.*

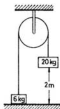


Fig. 8.5

Solución: Aplicaremos el principio de conservación de la energía mecánica. Cuando el bloque de 20 kg llega al suelo, tras haber recorrido 2 m, el bloque de 6 kg hubo de ascender esa misma distancia y, en ese instante, los dos bloques poseen la misma velocidad.

a) Energía del sistema antes de ponerse en libertad: solamente la potencial gravitatoria del bloque de 20 kg:

$$E_p = mgh = 20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 2 \text{ m} = 392 \text{ J}$$

b) Energía del sistema cuando el bloque de 20 kg llega al suelo:

- Energía gravitatoria del bloque de 6 kg:

$$E_p = 6 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 2 \text{ m} = 117{,}6 \text{ J}$$

- Energía cinética de los dos bloques animados de la misma velocidad:

$$E_c = \frac{1}{2} (m + m') v^2 = \frac{1}{2} \cdot 26 \text{ kg} \cdot v^2$$

Como la energía se conserva:

$$392 \text{ J} = 117{,}6 \text{ J} + 13 \text{ kg} \cdot v^2$$

de donde:

$$v = \sqrt{\frac{274{,}4 \text{ J}}{13 \text{ kg}}} = \boxed{4{,}6 \text{ m/s}}$$

8.39. ***Un bloque de 10 kg apoya sobre una mesa horizontal, siendo 0,25 el coeficiente de rozamiento, y está unido por medio de una cuerda ligera que pasa por una polea sin rozamiento a otro bloque de 8 kg que cuelga verticalmente.***

Calcular la velocidad del conjunto cuando el bloque de 8 kg descendió 4 m.

Solución: El problema, esquematizado en la figura 8.6, puede resolverse mediante un razonamiento dinámico o con un criterio energético.

a) **Criterio dinámico:**

La aceleración del sistema en libertad es:

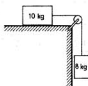


Fig. 8.6

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} \cdot g =$$

$$= \frac{8 \text{ kg} - 0{,}25 \cdot 10 \text{ kg}}{18 \text{ kg}} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 =$$

$$= 3 \text{ m/s}^2$$

La velocidad del sistema después de un recorrido de 4 m:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\,as} = \sqrt{2 \cdot 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 4 \text{ m}} = \boxed{4{,}9 \text{ m/s}}$$

b) **Criterio energético:**

El descenso de energía gravitatoria del sistema se convierte en energía cinética del mismo y en trabajo realizado contra la fuerza de rozamiento:

$$m_2gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v^2 + \mu m_1 gs$$

$$8 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 4 \text{ m} = \frac{1}{2}\, 18 \text{ kg} \cdot v^2 + 0{,}25 \cdot 10 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 4 \text{ m}$$

Despejando v:

$$\boxed{v = 4{,}9 \text{ m/s}}$$

8.40. *(*) Un bloque de 50 kg asciende una distancia de 6 m por la superficie de un plano inclinado 37° respecto a la horizontal, aplicándole una fuerza de 490 N paralela al plano. El coeficiente de rozamiento es 0,2.*
Calcular:

a) El trabajo realizado por la fuerza aplicada.
b) El aumento de energía cinética del bloque.
c) Aumento de energía potencial del bloque.
d) El trabajo realizado contra la fuerza de rozamiento; ¿en qué se convierte ese trabajo?
e) ¿A qué equivale la suma de los términos calculados en b), c) y d)?

Solución:

a) $$W = F \cdot s \cdot \cos \varphi = 490 \text{ N} \cdot 6 \text{ m} \cdot 1 = \boxed{2\,940 \text{ J}}$$

b) En el diagrama de la figura 8.7 se representan las fuerzas que actúan sobre el bloque. Supuesto el ascenso, se tiene.

$$F - mg \operatorname{sen} \alpha - F_r = ma$$

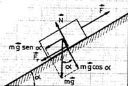


Fig. 8.7

y como:

$$F_r = \mu mg \cos \alpha$$

Sustituyendo y despejando a:

$$a = \frac{F - mg\,(\text{sen}\,\alpha + \mu \cos \alpha)}{m} =$$

$$= \frac{490\ \text{N} - 50\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}\,(0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}8)}{50\ \text{kg}} = 2{,}35\ \text{m/s}^2$$

La velocidad del bloque, después de un recorrido de 6 m, es:

$$v^2 = v_o^2 + 2\ as = 2 \cdot 2{,}35\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 6\ \text{m} = 28{,}2\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

y la energía cinética:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\ mv^2 = \frac{1}{2}\ 50\ \text{kg} \cdot 28{,}2\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \boxed{\mathbf{705\ J}}$$

c) $\Delta E_p = mgh = mgs \cdot \text{sen}\,\alpha = 50\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 6\ \text{m} \cdot 0{,}6 = \boxed{\mathbf{1\ 764\ J}}$

d) $W_r = \mu \cdot mg \cos \alpha \cdot s = 0{,}2 \cdot 50\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0{,}8 \cdot 6\ \text{m} = \boxed{\mathbf{470{,}4\ J}}$

Este trabajo, como consecuencia de la fricción del bloque contra la superficie de deslizamiento, **se transforma en calor.**

e) La suma de la energía cinética adquirida por el bloque, la energía gravitatoria y el trabajo realizado contra el rozamiento ha de ser igual al trabajo total realizado por la fuerza aplicada:

$$W = E_c + E_p + W_r$$

$$W = 705\ \text{J} + 1\ 764\ \text{J} + 470{,}4\ \text{J} = 2\ 939{,}4\ \text{J} \simeq \boxed{\mathbf{2\ 940\ J}}$$

Nota: La no coincidencia exacta entre la suma total y el trabajo calculado en a) se debe a la aproximación con que se tomaron sen 37° y cos 37°. No obstante, como se puede observar, la diferencia es despreciable.

8.41. ***La fuerza $F = 2t^3 + 4t$ (SI), al actuar sobre una partícula puntual, la hace cambiar de posición, de acuerdo con la ley: $s = 2t^2 + 3$ (SI). Hallar el trabajo realizado por la fuerza citada, cuando dicha partícula se traslada desde $s_o = 5$ m hasta $s_1 = 21$ m.***

Solución: Ya que $s = 2t^2 + 3$, $ds = 4tdt$. Como la expresión a integrar es función del tiempo t, tendremos que fijar también en función del tiempo los límites de integración. Fijándonos en la ecuación del movimiento, tenemos que:

$$\text{Para } s_o = 5 \text{ m},\ t_o = 1 \text{ s}$$
$$\text{Para } s_1 = 21 \text{ m},\ t_1 = 3 \text{ s}$$

Tras esto no nos queda sino calcular el trabajo realizado por la fuerza:

$$W = \int_{s_o}^{s_1} F \cdot ds = \int_{t_o}^{t_1} (2t^3 + 4t) \cdot 4tdt = \int_1^3 (8t^4 + 16t^2)\, dt =$$

$$= \left[\frac{8t^5}{5} + \frac{16t^3}{3} \right]_1^3 = \frac{7\,888}{15} \text{ J} = \boxed{525.87 \text{ J}}$$

8.42. ***La fuerza $\vec{F} = 2x^2\ \vec{i} + xz\ \vec{j} - 2z^2\ \vec{k}$ (SI), actuando sobre una partícula puntual, de masa m, la obliga a desplazarse a lo largo de la trayectoria OABCDO, indicada por flechas en la figura 8.8. El lado del cubo mide 3 m. Calcular el trabajo realizado por dicha fuerza.***

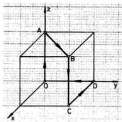


Fig. 8.8

Solución: El trabajo pedido será la suma de los realizados a lo largo de las cinco etapas del recorrido:

$$W_1 = W_O^A = \int_0^A F_z dz = \int_0^3 -2z^2 dz = \left[-\frac{2z^3}{3} \right]_0^3 = -18 \text{ J}$$

$$W_2 = W_A^B = \int_A^B (F_x dx + F_y dy) = \int_0^3 2x^2 dx + \int_0^3 3xdy =$$

$$= \int_0^3 2x^2 dx + \int_0^3 3xdx = \int_0^3 (2x^2 + 3x)\, dx = \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 = 31{,}5 \text{ J}$$

$$W_3 = W_B^C = \int_B^C F_z dz = \int_3^0 -2z^2 dz = \left[-\frac{2z^3}{3} \right]_3^0 = 18 \text{ J}$$

$$W_4 = W_C^D = \int_C^D F_x dx = \int_3^0 2x^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_3^0 = -18 \text{ J}$$

$$W_5 = W_D^O = \int_D^O F_y dy = 0 \text{ J (ya que para esta etapa } z = 0)$$

Por lo tanto, el trabajo total realizado por la fuerza será:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 =$$

$$= -18 \text{ J} + 31{,}5 \text{ J} + 18 \text{ J} - 18 \text{ J} + 0 \text{ J} = 13{,}5 \text{ J}$$

$$\boxed{W = 13{,}5 \text{ J}}$$

8.43. ***Al actuar la fuerza $\vec{F} = x\,\vec{i} - y\,\vec{j}$ (SI) sobre una masa puntual, la traslada desde el punto (0,0) al (1,1), coordenadas todas ellas expresadas en metros. Hallar el trabajo realizado por dicha fuerza cuando la trayectoria descrita por su punto de aplicación es:***

a) La recta $y = x$.
b) La parábola $y = x^2$.
c) El eje de las x desde $x = 0$ hasta $x = 1$ y la recta $x = 1$ desde $y = 0$ hasta $y = 1$.

Comentar los resultados obtenidos y analizar la fuerza actuante.

Solución: En primer lugar, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = (x\,\vec{i} - y\,\vec{j}) \cdot (dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}) = x\,dx - y\,dy$, ya que tanto $\vec{F}$ como $d\vec{r}$ no tienen componentes según el eje OZ (fig. 8.9).

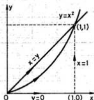
a) Para la trayectoria $y = x$, $dy = dx$; luego:

$$W_1 = \int_0^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (x\,dx - y\,dy) =$$

$$= \int_0^1 (x\,dx - x\,dx) = \boxed{0 \text{ J}}$$

b) Para la trayectoria $y = x^2$, $dy = 2x\,dx$; luego:

$$W_2 = \int_0^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 [x\,dx - x^2 \cdot (2x\,dx)] = \boxed{0 \text{ J}}$$



c) Para la recta $y = 0$, $dy = 0$, y para la $x = 1$, $dx = 0$. Luego:

Fig. 8.9

$$W_3 = \int_0^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c (x\,dx - y\,dy) = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 -y\,dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{0 \text{ J}}$$

Vemos, pues, que el trabajo realizado no depende de la trayectoria. Así pues, **$\vec{F} = x\,\vec{i} - y\,\vec{j}$ es una fuerza conservativa.**

2.44. *(*) Un cuerpo de masa 2 kg se mueve a lo largo de una trayectoria cuyos puntos vienen determinados por las siguientes ecuaciones paramétricas: $x = 3t^2$; $y = 3t^3$; $z = -2t$, estando dichas ecuaciones expresadas en metros. Calcular:*

a) La velocidad.
b) El momento angular ($\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$).
c) Determinar el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de dicha trayectoria entre los instantes $t = 1$ s y $t = 2$ s.

Solución:

a) Dado que el vector de posición del móvil es:

$$\vec{r} = 3t^2\,\vec{i} + 3t^3\,\vec{j} - 2t\,\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

el vector velocidad será:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\,\vec{i} + 9t^2\,\vec{j} - 2\,\vec{k} \quad \text{(SI)}}$$

siendo su módulo:

$$|\vec{v}| = \sqrt{36t^2 + 81t^4 + 4}$$

b) Calculemos ahora el momento angular del móvil:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m\,(\vec{r} \wedge \vec{v}) = 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 & 3t^3 & -2t \\ 6t & 9t^2 & -2 \end{vmatrix} = 2\,(12t^3\,\vec{i} - 6t^2\,\vec{j} +$$

$$+ 9t^4\,\vec{k}) = \boxed{24t^3\,\vec{i} - 12t^2\,\vec{j} + 18t^4\,\vec{k} \quad \text{(SI)}}$$

c) Para el cálculo del trabajo realizado por la fuerza podemos emplear dos métodos ligeramente distintos:

c_1)

$$W = \int_{t=1}^{t=2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \int_{t=1}^{t=2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = m \cdot \int_{t=1}^{t=2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} =$$

$$= m \cdot \int_{t=1}^{t=2} \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \cdot \left[\frac{v^2}{2}\right]_{t=1}^{t=2} =$$

$$= \frac{m}{2}\,[v^2]_{t=1}^{t=2} = \frac{m}{2}\,[36t^2 + 81t^4 + 4]_{t=1}^{t=2} = \boxed{1\,323\text{ J}}$$

c_2) De otro modo, el momento lineal o cantidad de movimiento del cuerpo es:

$$\vec{p} = m\vec{v} = 12t\,\vec{i} + 18t^2\,\vec{j} - 4\,\vec{k} \quad \text{(SI)}$$

La fuerza productora del movimiento tiene de valor:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 12\,\vec{i} + 36t\,\vec{j} \quad \text{(SI)}$$

De ahí que:

$$W = \int_{t=1}^{t=2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t=1}^{t=2} (12\,\vec{i} + 36t\,\vec{j}) \cdot (6t\,\vec{i} + 9t^2\,\vec{j} - 2\,\vec{k})\,dt =$$

$$= \int_{t=1}^{t=2} (72t + 324t^3)\,dt = \left[36t^2 + 81t^4\right]_1^2 = \boxed{1\,323\ \text{J}}$$

8.45. ***(*) Un móvil de 1 kg se desplaza según una trayectoria cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = 3t^2$; $y = -2t$; $z = 3t$ (expresadas en metros). Calcular:***

a) Los valores de la aceleración tangencial y normal en el instante $t = 1$s.
b) La potencia mecánica instantánea para $t = 1$s.

Solución:

a) Dado que el vector de posición del móvil es:

$$\vec{r} = 3t^2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j} + 3t\,\vec{k}$$

el vector velocidad será:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

y su módulo:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(6t)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{36t^2 + 13}$$

El vector aceleración es: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 6\,\vec{i}$, siendo su módulo: $|\vec{a}| = 6$.

Como vemos, la aceleración es constante a lo largo del tiempo, tanto en módulo como en dirección y sentido. Al cabo de 1 s, $|\vec{a}|_{t=1s} = 6\ \text{ms}^{-2}$.

Vamos a calcular ahora la aceleración tangencial:

$$a_t = \frac{d\,|\vec{v}|}{dt} = \frac{36t}{\sqrt{36t^2 + 13}}$$

Al cabo de 1 s:

$$|a_t|_{t=1s} = \frac{36 \cdot 1}{\sqrt{36 \cdot 1^2 + 13}} = \frac{36}{7}\ \text{ms}^{-2} = 5{,}14\ \text{ms}^{-2}$$

$$\boxed{|a_t|_{t=1s} = 5{,}14\ \text{ms}^{-2}}$$

La aceleración normal del móvil al cabo de 1 s valdrá:

$$a_{n_{t=1s}} = \sqrt{|\vec{a}|^2_{t=1s} - |a_t|^2_{t=1s}} =$$

$$= \sqrt{(6\ \text{ms}^{-2})^2 - \left(\frac{36}{7}\ \text{ms}^{-2}\right)^2} = \frac{6}{7}\sqrt{13}\ \text{ms}^{-2} = 3{,}09\ \text{ms}^{-2}$$

$$\boxed{\mathbf{a_{n_{t=1s}} = 3{,}09\ ms^{-2}}}$$

b) Como:

$$|\vec{v}|_{t=1s} = \sqrt{(6\cdot 1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7\ \text{ms}^{-1},\ \text{y}\ |a_t|_{t=1s} = \frac{36}{7}\ \text{ms}^{-2}$$

resulta:

$$P_{t=1s} = |F\cdot v\cos\alpha|_{t=1} = m\,|a_t|_{t=1}\cdot|\vec{v}|_{t=1} =$$

$$= 1\ \text{kg}\cdot\frac{36}{7}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 7\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = \boxed{\mathbf{36\ W}}$$

O también:

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a} = 1\ \text{kg}\cdot 6\,\vec{i}\ (\text{ms}^{-2}) = 6\,\vec{i}\ (\text{N})$$
$$W = \vec{F}\cdot\vec{r} = 6\,\vec{i}\ (\text{N})\cdot(3t^2\,\vec{i} - 2t\,\vec{j} + 3t\,\vec{k})\ (\text{m}) = 18t^2\ (\text{J})$$
$$P = \frac{dW}{dt} = 36t\ (\text{W})$$

$$\boxed{\mathbf{P_{t=1s} = 36\ W}}$$

8.46. ***Una cadena de L = 2 m de longitud, M = 4 kg de masa y densidad lineal constante, está colocada sobre una mesa perfectamente pulimentada, de manera que cuelga del borde la cuarta parte de su longitud. Hallar el trabajo que es necesario realizar para subir toda la cadena a la mesa, tirando de ella por su extremo superior (fig. 8.10).***

Solución: Subir toda la cadena a la mesa equivale a elevar hasta la altura de la mesa el centro de masas de la parte colgante de la cadena, suponiendo concentrada en dicho punto toda la masa colgante, cuyo valor es:

$$m = \frac{M}{4} = \frac{4\ \text{kg}}{4} = 1\ \text{kg}$$

La altura a la que hay que elevar el centro de masas de la parte de la cadena que cuelga en el borde es:

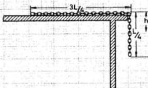


Fig. 8.10

$$h = \frac{1}{2}\ \frac{L}{4} = \frac{L}{8} = \frac{2\ m}{8} = 0{,}25\ m$$

En consecuencia, el trabajo pedido valdrá:

$$W = mgh = 1\ kg \cdot 9{,}8\ ms^{-2} \cdot 0{,}25\ m = \boxed{2{,}45\ J}$$

8.47. ***Sobre una mesa no pulimentada está apoyada una cadena, de longitud total L, de forma que parte de ella cuelga libremente, según indica la figura 8.11. El coeficiente de rozamiento entre la cadena y la superficie de la mesa es μ. Se deja que la cadena inicie su movimiento en la posición exacta en la que se equilibra el peso de la cadena que cuelga libremente y la fuerza de rozamiento.***

a) ¿Qué velocidad tendrá la cadena en el momento en que su extremo abandone el borde de la mesa? (Resolver el problema dinámicamente y aplicando el teorema de las fuerzas vivas.)

b) Particularizar el resultado anterior al caso en que L = 6 m y μ = 0,2.

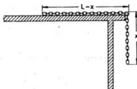


Fig. 8.11

Solución:

a) Resolvamos el problema primero dinámicamente. Designando por λ el peso de cadena por unidad de longitud, se tiene que, en el instante inicial, el peso de cadena que cuelga libremente, λx, ha de ser igual a la fuerza de rozamiento, λμ (L – x). En consecuencia, tenemos que: $\lambda x = \lambda\mu (L - x)$, de donde: $x = \frac{\mu L}{1 + \mu}$. La fuerza causante del movimiento es el peso de la cadena colgante menos la fuerza de rozamiento: $F = \lambda x - \lambda\mu (L - x)$; la masa total de la cadena es $m = \frac{\lambda L}{g}$. Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica, resulta:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\lambda x - \lambda\mu (L - x)}{\frac{\lambda L}{g}} = g \left[\frac{x - \mu (L - x)}{L} \right]$$

o sea:

$$\frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = g \left[\frac{x - \mu (L - x)}{L} \right]$$

Trasponiendo términos, tenemos:

$$\frac{L}{g} v \cdot dv = [x - \mu (L - x)] dx$$

Integremos ahora esta última expresión:

$$\int_o^v \frac{L}{g} v \cdot dv = \int_{\frac{\mu L}{1+\mu}}^{L} [x (1 + \mu) - \mu L] dx$$

$$\frac{L}{g} \frac{v^2}{2} = \left[(1 + \mu) \frac{x^2}{2} - \mu L x \right]_{\frac{\mu L}{1+\mu}}^{L} =$$

$$= (1 + \mu) \frac{L^2}{2} - \mu L^2 - \frac{\mu^2 L^2}{2 (1 + \mu)} + \frac{\mu^2 L^2}{1 + \mu} =$$

$$= \frac{L^2}{2} \left[1 - \mu + \frac{\mu^2}{1 + \mu} \right] = \frac{L^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \mu}$$

De aquí:

$$v^2 = \frac{gL}{1 + \mu}$$

de donde:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{gL}{1 + \mu}}}$$

Resolvámoslo ahora aplicando el teorema de las fuerzas vivas:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_o^2 = \int_x^L F \cdot dx$$

Dado que:

$$F = \lambda x - \lambda \mu (L - x)$$

$$v_o = 0$$

$$m = \frac{\lambda L}{g}$$

sustituyendo, se tiene:

$$\frac{\lambda L}{2g} v^2 = \int_{\frac{\mu L}{1+\mu}}^{L} [\lambda x - \lambda \mu (L - x)] dx$$

resultando al final, tras todos estos cálculos:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{gL}{1 + \mu}}}$$

b) La sustitución en la anterior expresión de los datos del enunciado del problema conduce a:

$$v = \sqrt{\frac{9{,}8\ ms^{-2} \cdot 6m}{1 + 0{,}2}} = \boxed{7\ ms^{-1}}$$

8.48. ***(*) Un volante gira por la acción de un peso, de masa m = 4 kg, que cuelga verticalmente del extremo de una cuerda arrollada a un eje (fig. 8.12). Partiendo del reposo, el peso desciende una altura vertical de 3 m, en el tiempo t = 12 s. Determínese la energía cinética adquirida por el peso en ese intervalo y la tensión de la cuerda durante el movimiento. (Tómese g = 10 m · s⁻².)***

Solución: En primer lugar:

$$s = v_o t + \frac{1}{2}\ at^2$$

de donde, como $v_o = 0$, resulta:

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 3\ m}{(12\ s)^2} = \frac{1}{24}\ ms^{-2}$$

Por otra parte: $mg - T = ma$, de donde:

$$T = m\ (g - a) =$$

$$= 4\ kg \cdot \left(10\ m \cdot s^{-2} - \frac{1}{24}\ m \cdot s^{-2}\right) = \boxed{39{,}8\ N}$$

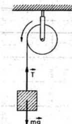


Fig. 8.12

La velocidad del peso al cabo de 12 segundos es:

$$v = v_o + a \cdot t = \frac{1}{24}\ m \cdot s^{-2} \cdot 12\ s = 0{,}5\ m \cdot s^{-1}$$

Por lo tanto, su energía cinética al cabo de dicho tiempo es:

$$E_c = \frac{1}{2}\ m \cdot v^2 = \frac{1}{2}\ 4\ kg \cdot (0{,}5\ m \cdot s^{-1})^2 = \boxed{0{,}5\ J}$$

8.49. ***(*) Se construye una columna cilíndrica con discos iguales de 1 m de altura y 50 kg de peso, colocados unos encima de otros. Hallar el trabajo necesario para construir dicha columna si, finalmente, tiene una altura de 10 m.***

Solución: La columna consta de 10 discos iguales, cada uno de los cuales se ha de colocar encima del anterior (fig. 8.13). El trabajo necesario para construir la columna será la suma de los trabajos realizados al colocar los diez discos:

$$W = \Sigma\ W_i = F \cdot \cos \varphi\ \Sigma\ h_i$$

$\Sigma\ h_i$ es la suma de los términos de una progresión aritmética cuyo primer término es $h_1 = 0$ m, y el último:

$$h_{10} = h_1 + (n - 1)\, d = 0\ m + (10 - 1) \cdot 1\ m = 9\ m$$

Por lo tanto:

$$\Sigma\, h_i = \frac{(h_1 + h_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(0\ m + 9\ m) \cdot 10}{2} = 45\ m$$

En consecuencia, el trabajo necesario para construir la columna es:

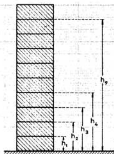


Fig. 8.13

$$W = 50\ kg - f \cdot \frac{9{,}8\ N}{1\ kg - f} \cdot 1 \cdot 45\ m = \boxed{22\ 050\ J}$$

8.50. ***(*) Con un resorte de acero se pueden lanzar verticalmente cuerpos hacia arriba; se han hecho varias experiencias con cuerpos de masas m distintas, midiendo las alturas, h, alcanzadas. Los resultados son:***

m (g)	*100*	*200*	*400*	*500*	*1 000*
h (m)	*21 ± 2*	*11 ± 1*	*5 ± 1*	*3,8 ± 0,5*	*1,9 ± 0,2*

Represente la altura alcanzada h en función de las inversas de las masas lanzadas. ¿Qué gráfica resulta? ¿Por qué?

Deduzca de la forma más simple posible, a partir de dicha gráfica, el valor en julios de la energía elástica que almacena el resorte cuando está comprimido.

(No utilizar ajustes por mínimos cuadrados.)

Solución: Tabulemos, en primer lugar, los datos del enunciado del problema, con objeto de trazar la gráfica pedida:

m (g)	h (m)	1/m (g^{-1})
100	21	0,0100
200	11	0,0050
400	5	0,0025
500	3,8	0,0020
1 000	1,9	0,0010

Tracemos ahora la gráfica de h en función de 1/m (fig. 8.14):

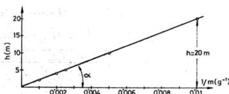


Fig. 8.14

Vemos que la gráfica es (aunque algunos puntos queden ligeramente distanciados) **una línea recta.** Efectivamente, el resorte, cuando está comprimido, tiene una energía elástica constante, la cual transfiere a los cuerpos en forma de energía cinética, que, posteriormente, se convierte en potencial: $E_p = mgh$. De aquí:

$$h = \frac{E_p}{g} \cdot \frac{1}{m}$$

Como tanto E_p como g son constantes:

$$h = k \cdot \frac{1}{m}$$

que es la ecuación de una recta, precisamente la que acabamos de representar.

Para el cálculo de la energía elástica que almacena el resorte cuando está comprimido hemos de tener en cuenta que esta energía es igual a la energía potencial que adquiere el cuerpo cuando alcanza su altura máxima. De acuerdo con ello:

$$E_p = mgh = g\,\frac{h}{1/m} = g \cdot \operatorname{tg}\alpha = 9{,}8\ \text{ms}^{-2} \cdot \frac{20\ \text{m}}{10^{-2}\ \text{g}^{-1} \cdot \dfrac{10^3\ \text{g}}{1\ \text{kg}}} =$$

$$= \boxed{19{,}6\ \text{J}}$$

8.51. *(*) Un haz de neutrones de 1 MeV de energía (1 MeV = 1,6 · 10^{-13} julios) choca contra los átomos de nitrógeno contenidos en una cámara. En el choque de ambas partículas, que se puede suponer perfectamente elástico, ambas salen despedidas. Hallar sus respectivas velocidades después del choque. Masa del átomo de nitrógeno = 14 u; masa del neutrón = 1 u (1 u = 1,66 · 10^{-27} kg).*

Solución: La velocidad de uno cualquiera de los átomos de nitrógeno antes del choque es: $v_{N_2} = 0\ \text{ms}^{-1}$, y la del haz de neutrones incidente:

$$v_n = \sqrt{\frac{2E}{m_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}}{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}} = 1{,}388 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

En los choques perfectamente elásticos se cumple tanto el principio de conservación de la energía cinética como el de conservación de la cantidad de movimiento, obteniéndose, por aplicación de ambos, las ecuaciones:

$$v'_{N_2} = \frac{(m_{N_2} - m_n) \cdot v_{N_2} + 2m_n v_n}{m_{N_2} + m_n} \qquad [1]$$

$$v'_n = \frac{(m_n - m_{N_2}) \cdot v_n + 2m_{N_2} v_{N_2}}{m_{N_2} + m_n} \qquad [2]$$

Estas dos ecuaciones nos dan las velocidades de las dos partículas después del choque. Sustituyendo en ellas los datos numéricos del enunciado del problema, tenemos:

$$v'_{N_2} = \frac{(14\ \mathrm{u} - 1\ \mathrm{u}) \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{u}} \cdot 0\ \mathrm{ms^{-1}} + 2 \cdot 1\ \mathrm{u} \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{u}} \cdot 1{,}388 \cdot 10^7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{(14\ \mathrm{u} + 1\ \mathrm{u}) \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{u}}} = \boxed{\mathbf{1{,}85 \cdot 10^6\ m \cdot s^{-1}}}$$

$$v'_N = \frac{(1\ \mathrm{u} - 14\ \mathrm{u}) \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{u}} \cdot 1{,}388 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 2 \cdot 14\ \mathrm{u} \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{u}} \cdot 0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{(14\ \mathrm{u} + 1\ \mathrm{u}) \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{u}}} = \boxed{\mathbf{-1{,}20 \cdot 10^7\ m \cdot s^{-1}}}$$

Los átomos de nitrógeno salen impulsados con una velocidad de $1{,}85 \cdot 10^6$ m/s, mientras que los neutrones retroceden a la velocidad de $1{,}20 \cdot 10^7$ m/s.

8.52. *(*) Una bala de 10 g incide horizontalmente con una velocidad de 400 m/s sobre un bloque de madera de 390 g de masa que está en reposo sobre una mesa. Calcúlese, prescindiendo del rozamiento bloque-mesa:*

a) La velocidad del bloque después del choque.
b) La energía mecánica inicial y final del sistema.

Solución:

a) Se trata de un choque perfectamente inelástico, ya que la bala penetra dentro del bloque de madera, adquiriendo el conjunto una velocidad V.
Ya que el tiempo de duración del choque es infinitesimalmente pe-

queño, se conserva el momento lineal del sistema bloque-bala, cumpliéndose, en consecuencia, que:

$$m \cdot v = (M + m) \cdot V$$

siendo m la masa de la bala, v su velocidad antes del choque y M la masa del bloque de madera.

De la igualdad anterior se deduce que:

$$V = \frac{m \cdot v}{M + m} = \frac{0{,}01 \text{ kg} \cdot 400 \text{ m/s}}{0{,}39 \text{ kg} + 0{,}01 \text{ kg}} = \boxed{10 \text{ m/s}}$$

b) La energía mecánica inicial del sistema es la energía cinética de la bala:

$$E_{m_o} = E_{c_o} = \frac{1}{2} \, m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \, 0{,}01 \text{ kg} \cdot (400 \text{ m/s})^2 = \boxed{800 \text{ J}}$$

Por el contrario, la energía mecánica final es la que corresponde al sistema integrado por el bloque y la bala:

$$E_{m_f} = E_{c_f} = \frac{1}{2} (M + m) \cdot V^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \, (0{,}39 \text{ kg} + 0{,}01 \text{ kg}) \cdot (10 \text{ m/s})^2 = \boxed{20 \text{ J}}$$

Se puede comprobar cómo la energía cinética no se conserva, sino que disminuye en el choque, lo cual es lógico por ser un choque inelástico y parte de ella se convierte en energía de deformación y calor.

8.53. ***(*) Sobre un bloque de madera de 2 kg que se encuentra al comienzo de un plano inclinado de 30° se dispara un proyectil de 100 g con una velocidad de 100 m/s, incrustándose en él. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento en el plano inclinado es 0,1, calcúlese la distancia que recorre el bloque sobre el plano.***

Solución: Aunque el enunciado del problema no lo menciona explícitamente, supondremos que el proyectil se dispara en la dirección del plano inclinado. El choque es perfectamente inelástico, ya que la bala penetra dentro del bloque de madera, adquiriendo el conjunto una velocidad V (fig. 8.15).

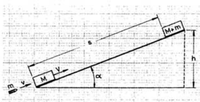


Fig. 8.15

Ya que el tiempo de duración del choque es infinitesimalmente pequeño, se conserva el momento lineal del sistema bloque-proyectil, cumpliéndose, en consecuencia, que:

$$m \cdot v = (M + m) \cdot V$$

siendo m la masa del proyectil, v su velocidad antes del choque y M la masa del bloque de madera.

De la igualdad anterior se deduce que:

$$V = \frac{m \cdot v}{M + m} = \frac{0{,}1 \text{ kg} \cdot 100 \text{ m/s}}{2 \text{ kg} + 0{,}1 \text{ kg}} = 4{,}76 \text{ m/s}$$

Una vez que se ha realizado el choque, tras incrustarse el proyectil dentro del bloque, se cumple el principio de conservación de la energía, en virtud del cual parte de la energía cinética del comienzo:

$$E_c = \frac{1}{2} (M + m) \cdot V^2$$

se invierte en vencer las fuerzas de rozamiento:

$$W_r = F_r \cdot s = \mu (M + m) \cdot g \cdot s \cdot \cos \alpha$$

convirtiéndose el resto en energía potencial gravitatoria:

$$\Delta E_p = (M + m) \cdot g \cdot h = (M + m) \cdot g \cdot s \cdot \text{sen } \alpha$$

Se verifica, por lo tanto, que:

$$\frac{1}{2} (M + m) \cdot V^2 = \mu (M + m) \cdot g \cdot s \cdot \cos \alpha + (M + m) \cdot g \cdot s \cdot \text{sen } \alpha$$

de donde:

$$s = \frac{V^2}{2g (\mu \cos \alpha + \text{sen } \alpha)} =$$

$$= \frac{(4{,}76 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9{,}8 \text{ ms}^{-2} (0{,}1 \cdot 0{,}866 + 0{,}5000)} = \boxed{1{,}97 \text{ m}}$$

8.54. ***Una bala de 20 g de masa choca con un bloque de 1 980 g, apoyado sobre la superficie perfectamente pulimentada de una mesa, y unido a un muelle espiral elástico, fijo a una pared, como indica la figura 8.16. Tras el choque la bala queda incrustada en el bloque, comprimiéndose el muelle 20 cm.***



Fig. 8.16

Si se sabe que es necesaria una fuerza de 10^5 dyn para comprimir el muelle 2 cm, y suponiendo que dicho muelle tiene, antes del choque, su longitud natural, calcular:

a) La energía potencial elástica máxima almacenada en el muelle.
b) La velocidad del sistema bloque-bala en el instante infinitesimalmente posterior al choque.
c) La velocidad de la bala en el momento del choque.

Solución:

a) Dado que la constante elástica del muelle es:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{1\ N}{2 \cdot 10^{-2}\ m} = 50\ N \cdot m^{-1}$$

la energía potencial elástica máxima en él almacenada tiene de valor:

$$E_{p_{máx}} = \frac{1}{2}\ k \cdot A^2 = \frac{1}{2}\ 50\ N \cdot m^{-1} \cdot (2 \cdot 10^{-1}\ m)^2 = \boxed{1\ J}$$

b) Después de incrustarse la bala en el bloque, el sistema bloque-bala inicia un movimiento vibratorio armónico de 0,2 m de amplitud. Su velocidad es máxima e igual, en módulo, a la que adquirió justamente después del choque, cuando pasa por su posición inicial de reposo, posición en la que su energía es sólo cinética:

$$\frac{1}{2}\ (M + m) \cdot V^2$$

siendo M la masa del bloque, m la de la bala y V la velocidad del sistema justamente después del choque. A medida que el muelle se deforma, tanto en un sentido como en otro, esta energía cinética se va transformando en potencial elástica, hasta que, al llegar a sus posiciones extremas, la transformación es total. Se cumple, en consecuencia, que:

$$\frac{1}{2}\ (M + m) \cdot V^2 = E_{p_{máx}} = 1\ J; \ \ \frac{1}{2}\ 2\ kg \cdot V^2 = 1\ J$$

de donde:

$$\boxed{V = 1\ m \cdot s^{-1}}$$

c) El choque de la bala contra el bloque es totalmente inelástico, y como en el momento en que este choque se produce no actúan fuerzas exteriores horizontales, se conserva el momento lineal del sistema bala-bloque. Por lo tanto, llamando v a la velocidad de la bala en el momento del choque, tenemos:

$$v = \frac{(M + m) \cdot V}{m} = \frac{(1\ 980 + 20) \cdot 10^{-3}\ kg \cdot 1\ m \cdot s^{-1}}{2 \cdot 10^{-2}\ kg} = \boxed{100\ m \cdot s^{-1}}$$

8.55. *Disparamos una bala, de masa m, contra un bloque de madera, de masa M, unido a un muelle espiral, cuya constante elástica es k. Tras el choque la bala queda incrustada dentro del bloque, desplazándose el sistema, de forma que el muelle se contrae una longitud x. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el suelo sobre el cual se apoya es μ (fig. 8.17).*



Fig. 8.17

a) Determinar la velocidad de la bala en el instante justamente anterior a su impacto.

b) Particularizar la expresión anterior al caso en que m = 5 g, M = 995 g, x = 5 cm, k = 10 N · cm⁻¹, μ = 0,4. (Tómese g = 10 ms⁻².)

Solución:

a) Dado que el choque es muy rápido, durante él no tiene tiempo suficiente para actuar la fuerza exterior de rozamiento, por lo que se puede considerar que se conserva el momento lineal. Designando por v la velocidad de la bala en el instante mismo anterior al choque y V la velocidad del sistema bala-bloque justamente después, tenemos:

$$mv = (M + m) \cdot V \qquad [1]$$

Después del choque la energía cinética del sistema:

$$\frac{1}{2} (M + m) \cdot V^2$$

se convierte en energía elástica del resorte:

$$\frac{1}{2} k \cdot x^2$$

y el resto se invierte en trabajo para vencer la fuerza de rozamiento. Tenemos, pues, que:

$$\frac{1}{2} (M + m) \cdot V^2 = \frac{1}{2} k \cdot x^2 + F_r \cdot x \qquad [2]$$

Pero, por otra parte:

$$F_r = \mu N = \mu (M + m) \cdot g \qquad [3]$$

De la ecuación [2] se obtiene:

$$V = \sqrt{\frac{k \cdot x^2 + 2F_r \cdot x}{M + m}} \qquad [4]$$

Sustituyendo en esta ecuación [4] el valor de F_r dado por la [3], tenemos:

$$V = \sqrt{\frac{k \cdot x^2 + 2\mu\,(M + m)\,g \cdot x}{M + m}} \qquad [5]$$

Despejando v en la ecuación [1] y sustituyendo el valor de V dado por la [5], llegamos, por último, a:

$$v = \frac{M + m}{m}\,V = \frac{M + m}{m} \cdot \sqrt{\frac{k \cdot x^2 + 2\mu\,(M + m)\,g \cdot x}{M + m}}$$

$$\boxed{\mathbf{v = \frac{M + m}{m} \cdot \sqrt{\frac{k \cdot x^2 + 2\mu\,(M + m)\,g \cdot x}{M + m}}}}$$

b) Sustituyendo, en la anterior expresión, los valores numéricos del enunciado del problema, tenemos que, como:

$$k = 10\,\frac{N}{cm} \cdot \frac{10^2\ cm}{1\ m} = 10^3\ N \cdot m^{-1}$$

$$v = \frac{0{,}995\ kg + 5 \cdot 10^{-3}\ kg}{5 \cdot 10^{-3}\ kg} \cdot$$

$$\sqrt{\frac{10^3\ N \cdot m^{-1}\,(5 \cdot 10^{-2}\ m)^2 + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 1\ kg \cdot 10\ ms^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2}\ m}{0{,}995\ kg + 5 \cdot 10^{-3}\ kg}} =$$

$$= \boxed{\mathbf{340\ m \cdot s^{-1}}}$$

9. DINÁMICA DE LA ROTACIÓN

FORMULARIO-RESUMEN

ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA DE LA ROTACIÓN

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$$

- $\vec{M}$ = momento exterior aplicado
- I = momento de inercia del sólido respecto al eje
- $\vec{\alpha}$ = aceleración angular del sólido

MOMENTOS DE INERCIA DE ALGUNOS SÓLIDOS SENCILLOS

CILINDRO

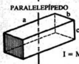


$$I = M \cdot \frac{R^2}{2}$$



$$I = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right)$$

PARALELEPÍPEDO



$$I = M\left(\frac{a^2 + b^2}{12}\right)$$

DISCO



$$I = M \cdot \frac{R^2}{4}$$



$$I = M \cdot \frac{R^2}{2}$$

LÁMINA DELGADA

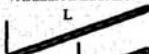


$$I = M \cdot \frac{b^2}{12}$$



$$I = M\left(\frac{a^2 + b^2}{12}\right)$$

VARILLA DELGADA



$$I = M \cdot \frac{L^2}{3}$$

$$I = M \cdot \frac{L^2}{12}$$

ARO



$$I = MR^2$$



$$I = M\,\frac{2R^2}{5} \quad \text{ESFERA MACIZA}$$

$$I = M \cdot \frac{2R^2}{3} \quad \text{ESFERA HUECA}$$

Radio de giro: $R = \sqrt{\frac{I}{M}}$

TEOREMA DE STEINER

$$I = I_G + M \cdot a^2$$

- I = momento de inercia del cuerpo respecto a un eje.
- I_G = momento de inercia del cuerpo respecto a un eje paralelo al anterior y que pase por el centro de gravedad.
- a = distancia entre ambos ejes.
- M = masa del cuerpo.

MOMENTO CINÉTICO DE ROTACIÓN: $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$

TEOREMA DEL IMPULSO ANGULAR: $\vec{M} \cdot t = I \cdot \vec{\omega}_2 - I \cdot \vec{\omega}_1$

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO CINÉTICO:

Si $\vec{M} = 0 \Rightarrow I \cdot \vec{\omega} = \text{cte}$

ENERGÍA CINETICA DE ROTACIÓN: $E_r = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$

TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS PARA LA ROTACIÓN:

$$W_r = \frac{1}{2} I \cdot \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \cdot \omega_1^2 = \Delta E_r$$

ENERGÍA TOTAL DE UN CUERPO SOMETIDO A TRASLACIÓN Y ROTACIÓN:

$$E = E_c + E_r$$

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

$$W_1 + E_{c_1} + E_{r_1} + E_{p_1} = W_2 + E_{c_2} + E_{r_2} + E_{p_2} = \text{cte}$$

ANALOGÍAS ENTRE TRASLACIONES Y ROTACIONES

Traslaciones		Rotaciones	
Espacio recorrido	s	Ángulo descrito	φ
Velocidad	$v = ds/dt$	Velocidad angular	$\omega = d\varphi/dt$
Aceleración lineal	$a = dv/dt$	Aceleración angular	$\alpha = d\omega/dt$
Masa	m	Momento de inercia	I
Fuerza	F	Momento	M
ECUACIÓN FUNDAMENTAL	$F = m \cdot a$	ECUACIÓN FUNDAMENTAL	$M = I \cdot \alpha$
Impulso mecánico	$F \cdot t$	Impulso angular	$M \cdot t$
Momento lineal o cantidad de movimiento	$m \cdot v$	Momento angular o momento cinético	$I \cdot \omega$
Trabajo de traslación	$F \cdot s$	Trabajo de rotación	$M \cdot \varphi$
Energía cinética	$\frac{1}{2} mv^2$	Energía cinética	$\frac{1}{2} I \cdot \omega^2$

9. DINÁMICA DE LA ROTACIÓN

9.1. *¿Qué analogías y qué diferencias existen entre la masa de un cuerpo y su momento de inercia?*

Solución: Físicamente la masa de un cuerpo representa la oposición que éste ofrece a adquirir una aceleración lineal cuando se le aplica una fuerza; mientras que el momento de inercia representa la oposición a adquirir una aceleración angular al aplicarle un momento.

La masa de un cuerpo es, para velocidades muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, una magnitud constante; el momento de inercia depende de la posición del eje de giro.

9.2. *¿Existen momentos de inercia negativos? ¿Por qué?*

Solución: El momento de inercia viene definido matemáticamente por la expresión $I = \Sigma\, m_i r_i^2$. La masa nunca puede ser negativa (no tendría sentido físico). La distancia r sí puede ser negativa, pero al estar elevada al cuadrado, el resultado siempre será positivo.

En consecuencia, **no puede haber momentos de inercia negativos.**

9.3. *¿Puede un cuerpo poseer infinitos momentos de inercia? ¿Por qué?*

Solución: El momento de inercia de un cuerpo es una propiedad variable del mismo, puesto que depende de la masa del cuerpo y de la posición del eje alrededor del cual gira. Como el eje puede pasar teóricamente por infinitas posiciones, el cuerpo ofrecerá infinitos momentos de inercia.

9.4. *¿Qué analogías y qué diferencias existen entre el momento cinético y el momento lineal?*

Solución: Ambas son **magnitudes vectoriales:** el momento lineal es característico del movimiento de traslación, mientras que el momento cinético lo es del de rotación. En circunstancias especiales las dos magnitudes se conservan: el momento lineal cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es nula, y el angular cuando es nulo el momento de las fuerzas externas actuantes.

9.5. *Dos masas de 20 g y 30 g están colocadas en una barra de masa despreciable y situadas, respectivamente, a 30 cm y 1,2 m del eje de giro. ¿Cuál es el momento de inercia del conjunto respecto a dicho eje? ¿Cuánto valdrá su radio de giro?*

Solución:

a) El momento de inercia viene dado por la expresión $I = \Sigma\, m_i r_i^2$. Sustituyendo datos:

$$I = 0{,}02 \text{ kg} \cdot (0{,}30 \text{ m})^2 + 0{,}03 \text{ kg} \cdot (1{,}2 \text{ m})^2 = \boxed{\mathbf{4{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}}$$

b) La expresión matemática del radio de giro es:

$$R = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{0{,}045\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}{0{,}05\ \text{kg}}} = \boxed{0{,}95\ \text{m}}$$

9.6. ***Una varilla de 2 m de longitud y masa despreciable lleva soldadas dos esferitas de 4 kg en sus extremos y una de 2 kg en su parte media. Calcular:***

a) Su momento de inercia respecto a un eje perpendicular a ella que pase por uno de sus extremos.

b) Su radio de giro respecto a ese mismo eje.

Solución: La figura 9.1 esquematiza las condiciones del problema:

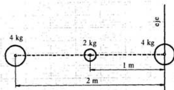


Fig. 9.1

De ella deducimos:

a) $$I = 4\ \text{kg} \cdot (2\ \text{m})^2 + 2\ \text{kg} \cdot (1\ \text{m})^2 + 4\ \text{kg} \cdot 0 = \boxed{18\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}$$

b) $$R = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{18\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}{10\ \text{kg}}} = \boxed{1{,}342\ \text{m}}$$

9.7. ***¿Qué energía cinética de rotación tiene un cilindro macizo que gira alrededor de su eje de revolución si su masa es de 1 kg, su radio 0,1 m y gira a razón de 600 r.p.m.?***

Solución: El momento de inercia del cilindro es:

$$I = \frac{1}{2}\ MR^2 = 0{,}5 \cdot 1\ \text{kg} \cdot (0{,}1\ \text{m})^2 = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Teniendo en cuenta que la velocidad angular es:

$$\omega = 600\ \text{r.p.m.} = 20\pi\ \text{rad/s}$$

la energía cinética de rotación valdrá:

$$E_r = \frac{1}{2}\ I\omega^2 = 0{,}5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2\ (20\pi\ \text{rad/s})^2 = \boxed{9{,}87\ \text{J}}$$

9.8. *¿Por qué un patinador extiende los brazos cuando quiere dejar de dar vueltas?*

Solución: En virtud del principio de conservación del momento cinético, éste debe permanecer constante en un sistema aislado. Por tanto, si se produce un aumento en el valor del momento de inercia del sistema, como consecuencia debe producirse una disminución en la velocidad angular; de este modo el producto $I \cdot \omega$ permanece constante.

El patinador, al extender los brazos, aumenta su momento de inercia, pues aumenta la distancia de algunas partes de su cuerpo respecto al eje de giro. Consecuentemente debe disminuir la velocidad angular que posee.

9.9. *¿Qué clases de energía posee una esfera que cae rodando por un plano inclinado?*

Solución: En lo alto del plano la esfera posee energía gravitatoria; a lo largo del plano posee energía gravitatoria (está a una cierta altura), energía cinética de traslación (avanza) y energía cinética de rotación (gira); al llegar al suelo posee energía cinética de traslación (avanza) y de rotación (gira).

9.10. ***Si se hace girar un cuerpo suspendido de un hilo de manera que se vaya enrollando el hilo en el dedo a medida que gira, se observa que su velocidad aumenta según va disminuyendo la longitud del hilo, ¿por qué?***

Solución: La razón física es la misma que la explicada en 9.8. Al enrollarse el hilo en el dedo disminuye la distancia del cuerpo al eje de giro y, como consecuencia, disminuye su momento de inercia.

Para que el producto $I \cdot \omega$ permanezca constante deberá aumentar la velocidad angular.

9.11. *¿De qué factores depende la energía cinética de un cuerpo en rotación? ¿Cuál es el fundamento físico del «yo-yo»?*

Solución: La energía cinética de rotación depende del momento de inercia del cuerpo y de su velocidad angular, siendo directamente proporcional al primero y al cuadrado de la segunda. Dicha energía viene dada por la expresión:

$$E_r = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

análoga a la de la energía cinética de traslación:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

El «yo-yo» (fig. 9.2) es una aplicación práctica del llamado «disco de Maxwell». Se fundamenta en el principio de conservación de la energía: el disco, en su posición elevada, posee

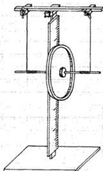


Fig. 9.2

energía potencial gravitatoria; al descender tiene energía gravitatoria, energía cinética de traslación y energía cinética de rotación. Al llegar a su posición más baja, y debido a la acción ejercida por el hilo, el disco vuelve a transformar su energía de movimiento en energía gravitatoria, ascendiendo (teóricamente) a su altura inicial.

9.12. ***Una rueda, cuyo radio de giro mide 2 m, tiene una masa de 500 g. ¿Qué energía de rotación posee cuando gira a 50 vueltas por segundo? ¿Qué fuerza tangencial constante, aplicada a su periferia, es preciso ejercer para detenerla en 2 segundos?***

Solución: El momento de inercia de la rueda es:

$$I = m \cdot r^2 = 0{,}5 \text{ kg} \cdot (2 \text{ m})^2 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Su energía cinética de rotación, considerando que $\omega = 100\pi$ rad/s, es:

$$E_r = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (100\pi \text{ rad/s})^2 \simeq \boxed{\mathbf{10^5 \ J}}$$

Al detenerse la rueda en 2 segundos, experimenta una aceleración angular dada por:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 100 \text{ rad/s}}{2 \text{ s}} = -50\pi \text{ rad/s}^2$$

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de la Rotación $M = I \cdot \alpha$ y teniendo en cuenta que, por ser la fuerza tangencial, $M = F \cdot r$, resulta:

$$F \cdot r = I \cdot \alpha$$

de donde:

$$F = \frac{I \cdot \alpha}{r} = \frac{2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \, (-50\pi \text{ rad/s}^2)}{2 \text{ m}} = \boxed{\mathbf{-157{,}1 \ N}}$$

El signo negativo de la fuerza indica que se trata de una fuerza de frenado.

Nota: La rueda se considera como un aro cuya masa está concentrada en la periferia, en cuyo caso el radio de giro y el radio del aro coinciden.

9.13. ***En lo alto de un plano inclinado 30° sobre la horizontal, de longitud 10 m, se coloca un cilindro para que caiga rodando sin deslizar. Suponiendo que toda la energía potencial del cilindro se transforma integramente en energía cinética de traslación y energía cinética de rotación del cilindro al llegar al suelo, deducir con qué velocidad llega a éste.***

Solución: La energía potencial gravitatoria del cilindro en lo alto del plano (fig. 9.3) es:

$$E_p = mgh$$

Su energía cinética de traslación es:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

y la de rotación:

$$E_r = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

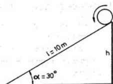


Fig. 9.3

Aplicando el principio de conservación de la energía:

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

El momento de inercia de un cilindro respecto a un eje que pase por el centro de sus bases es:

$$I = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$

y como, además:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

sustituyendo y efectuando operaciones, se tiene:

$$gh = \frac{3}{4} v^2$$

de donde:

$$v = 2 \sqrt{\frac{gh}{3}} = 2 \sqrt{\frac{g \cdot l \cdot \text{sen } 30°}{3}} =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{(10 \text{ m/s}^2) \cdot 10 \text{ m} \cdot 0{,}5}{3}} = \boxed{\mathbf{8{,}165 \text{ m/s}}}$$

9.14. ***Calcular el momento de inercia de una varilla respecto a un eje que pase por su punto medio y sea perpendicular a ella.***

Solución: El momento de inercia de una varilla respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por uno de sus extremos es $1/3 \cdot m \cdot L^2$. Como el centro de gravedad de la varilla coincide con el centro geométrico, la distancia entre ambos es la mitad de la longitud de la varilla (L/2).

Por tanto:

$$I_G = I - m \cdot a^2 = \frac{1}{3} mL^2 - m \cdot \frac{L^2}{4} = \boxed{\frac{1}{12} mL^2}$$

9.15. ***Un cilindro de 20 cm de diámetro y 5 kg de masa se coloca horizontalmente de forma que pueda girar alrededor de un eje que pase por el centro de sus bases. A su alrededor lleva arrollada una cuerda sobre la que:***

a) Se aplica una fuerza de 100 N.
b) Se cuelga un cuerpo de 10 kg.

Deducir la aceleración angular que experimenta el cilindro en cada uno de los dos casos.

Solución:

a) Figura 9.4. En este caso la fuerza aplicada se destina íntegramente a mover el cilindro. Su momento, respecto al eje de giro, valdrá:

$$M = F \cdot d = 100\ N \cdot 0{,}1\ m = 10\ N \cdot m$$

Aplicando la ecuación fundamental: $M = I \cdot \alpha$:

$$10\ N \cdot m = \frac{1}{2}\ 5\ kg \cdot 0{,}1^2\ m^2 \cdot \alpha$$

De donde:

$$\boxed{\alpha = 400\ rad/s^2}$$

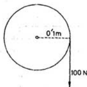


Fig. 9.4

b) Figura 9.5. En este caso la fuerza aplicada (que es el peso del cuerpo que cuelga) hace dos efectos: mover el cilindro y provocar la caída del cuerpo. O, dicho de otra manera, la fuerza que produce el giro del cilindro es la diferencia entre el peso del cuerpo que cuelga $(m \cdot g)$ y la que le comunica la aceleración de caída $(m \cdot a)$. Por tanto:

$$F = mg - ma$$

que es, precisamente, la tensión de la cuerda.
Aplicando la ecuación fundamental:

$$F \cdot d = I \cdot \alpha$$

$$(mg - ma) \cdot d = \frac{1}{2}\ m'r^2 \cdot \alpha$$

Y como $\alpha = a/r$:

$$(mg - ma)\ d = \frac{1}{2}\ m'r^2 \cdot \frac{a}{r}$$

Sustituyendo datos y efectuando operaciones:

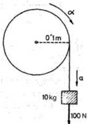


Fig. 9.5

$$(10\ kg \cdot 10\ m \cdot s^{-2} - 10\ kg \cdot a)\ 0{,}1\ m = \frac{1}{2}\ 5\ kg \cdot 0{,}1^2\ m^2 \cdot \frac{a}{0{,}1\ m}$$

de donde:

$$a = 8 \text{ m/s}^2$$

Y, por tanto:

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{0{,}1 \text{ m}} = \boxed{80 \text{ rad/s}^2}$$

9.16. ***Un obrero saca agua de un pozo mediante un torno cuyo cilindro tiene una masa de 50 kg y un diámetro de 0,4 m. El nivel del agua está a 30 m de profundidad y la cantidad de agua extraída cada vez es 25 litros. Cuando el obrero logra subir el caldero con el agua a la superficie, se le escapa el manubrio del torno y el sistema queda en libertad.***

a) ¿Cuánto tardará en caer el caldero al fondo del pozo?
b) ¿Con qué velocidad llegará a él?

Solución:

a) Habrá que calcular en primer lugar la aceleración del sistema:

$$(mg - ma) \cdot d = \frac{1}{2} \text{ m}'r^2 \cdot \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \text{ m}' \cdot a \cdot r$$

$$(25 \text{ kg} \cdot 10 \text{ ms}^{-2} - 25 \text{ kg} \cdot a) \cdot 0{,}2 \text{ m} = 0{,}5 \cdot 50 \text{ kg} \cdot 0{,}2 \text{ m} \cdot a$$

de donde:

$$a = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Al ser un movimiento uniformemente acelerado:

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2$$

$$30 \text{ m} = \frac{1}{2} \text{ } 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot t^2$$

De donde:

$$\boxed{t = 3{,}46 \text{ s}}$$

b) Aplicando la expresión $v = v_o + at$, se tiene:

$$v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 3{,}46 \text{ s} = \boxed{17{,}3 \text{ m/s}}$$

9.17. ***Una bola de billar (esfera maciza y homogénea), de masa 100 g, tiene un diámetro de 6 cm. Si corre rodando sin deslizar a una velocidad de 3 m/s, ¿qué energía cinética posee?***

Solución: La bola, a la vez que gira, avanza. Posee, en consecuencia, energía cinética de traslación:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

y energía cinética de rotación:

$$E_r = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

El momento de inercia de la bola es:

$$I = \frac{2}{5} mr^2 = \frac{2}{5} \cdot 0{,}1 \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 = 3{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

y su velocidad angular será:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{3 \text{ m/s}}{0{,}03 \text{ m}} = 100 \text{ rad/s}$$

La energía cinética de traslación de la bola es:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} 0{,}1 \text{ kg} \cdot (3 \text{ m/s})^2 = 0{,}45 \text{ J}$$

y la de rotación:

$$E_r = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} 3{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 (100 \text{ rad/s})^2 = 0{,}18 \text{ J}$$

La energía total de la bola valdrá:

$$E = E_c + E_r = 0{,}45 \text{ J} + 0{,}18 \text{ J} = \boxed{\mathbf{0{,}63 \text{ J}}}$$

9.18. ***Un cilindro parte del reposo en lo alto de un plano inclinado 30° sobre la horizontal y rueda por él sin deslizarse. Se supone que no hay rozamientos. Calcular la velocidad lineal del centro de gravedad del cilindro una vez que haya recorrido 5 metros de plano.***

Solución (fig. 9.6): En lo alto del plano el cilindro únicamente posee energía potencial gravitatoria: mgh. Como:

$$h = d \cdot \text{sen } 30° = 5 \text{ m} \cdot 0{,}5 = 2{,}5 \text{ m}$$

la energía gravitatoria del cilindro valdrá:

$$E_p = m \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 2{,}5 \text{ m} = 25 \text{ m J}$$

Aplicando el principio de conservación de la energía.

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

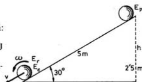


Fig. 9.6

$$25 \text{ m J} = 0{,}5 \text{ m v}^2 + 0{,}5 \cdot \frac{1}{2} \text{ mr}^2 \frac{v^2}{r^2}$$

Simplificando y despejando v, se tiene:

$$\boxed{v = 5{,}8 \text{ m/s}}$$

9.19. *Un cilindro de masa 5 kg puede girar alrededor de un eje horizontal que pasa por el centro de sus bases. El radio del cilindro es 10 cm. Externamente el cilindro lleva arrollada una cuerda de la que cuelga un cuerpo de 50 g.*
Deducir:

a) La aceleración angular del cilindro.
b) La aceleración lineal de la cuerda.
c) La longitud de cuerda desenrollada en 5 segundos.

Solución:

a) y b) En este caso la fuerza que origina la rotación del cilindro no es el peso del cuerpo que cuelga, sino la tensión de la cuerda (T = mg − ma), según se explicó en 9.15 (fig. 9.7).

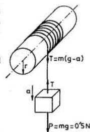


Fig. 9.7

Por tanto, al aplicar la ecuación fundamental de la Dinámica de la rotación, se tiene:

$$M = I \cdot \alpha$$
$$T \cdot r = I \cdot \alpha$$
$$m\,(g - a)\,r = I \cdot \alpha$$

Ahora bien, como el momento de inercia del cilindro es:

$$I = \frac{1}{2} \text{ Mr}^2$$

y su aceleración angular:

$$\alpha = \frac{a}{r}$$

sustituyendo, se tiene:

$$m\,(g - a)\,r = \frac{1}{2} \text{ Mr}^2 \frac{a}{r}$$

de donde:

$$a = \frac{2 \text{ m g}}{2\text{m} + \text{M}} = \frac{2 \cdot 0{,}05 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{2 \cdot 0{,}05 \text{ kg} + 5 \text{ kg}} = \boxed{0{,}196 \text{ m/s}^2}$$

La aceleración angular del cilindro valdrá:

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{0{,}196 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{0{,}1 \text{ m}} = \boxed{\mathbf{1{,}96 \text{ rad/s}^2}}$$

c) La longitud de cuerda desenrollada es igual al descenso que experimenta la masa de 50 g sometida, durante 5 segundos, a la aceleración de 0,196 m/s^2.
Al ser un movimiento uniformemente variado:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} 0{,}196 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} (5 \text{ s})^2 = \boxed{\mathbf{2{,}45 \text{ m}}}$$

9.20. ***Una rueda, cuya masa suponemos distribuida en la periferia de una circunferencia de 2 m de radio, pesa 1 000 kg. Calcular:***

a) La energía cinética de la rueda cuando gira a 80 r.p.m.
b) El momento del par que habría que aplicar durante 1 minuto a la rueda, supuesta inicialmente en reposo, para comunicarle la energía cinética anterior.

Solución:

a) El momento de inercia de la rueda es:

$$I = M \cdot r^2 = 1\,000 \text{ kg} \cdot (2 \text{ m})^2 = 4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

y su velocidad angular:

$$\omega = 80 \ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \frac{8}{3} \pi \text{ rad/s}$$

La energía cinética de la rueda valdrá:

$$E_r = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \left(\frac{8}{3} \pi \text{ rad/s}\right)^2 = \boxed{\mathbf{140\,367{,}7 \text{ J}}}$$

b) La aceleración angular a la que hay que someter la rueda para que en 1 minuto, partiendo del reposo, adquiera la velocidad angular de $\frac{8}{3} \pi$ rad/s es:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{8\pi/3 \text{ rad/s}}{60 \text{ s}} = \frac{2\pi}{45} \text{ rad/s}^2$$

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de la Rotación:

$$M = I \cdot \alpha = 4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{2\pi}{45} \text{ rad/s}^2 = \boxed{\mathbf{558{,}5 \text{ N} \cdot \text{m}}}$$

9.21. ***Un cilindro macizo, de masa 2 kg y radio 5 cm, rueda sin deslizamiento por un plano inclinado 30°. Se supone que el cilindro parte del reposo y no hay rozamientos.***

Calcular la velocidad lineal del cilindro después de haber recorrido 3 m de plano.

Solución: La velocidad lineal del cilindro después de haber descendido verticalmente una altura h viene dada, según lo explicado en el problema 9.13, por la expresión:

$$v = 2\sqrt{\frac{g \cdot h}{3}}$$

en la que h, de acuerdo con los datos del problema, vale:

$$h = s \cdot \text{sen } 30° = 3 \text{ m} \cdot 0{,}5 = 1{,}5 \text{ m}$$

Por tanto:

$$v = 2\sqrt{\frac{10 \text{ m} \cdot s^{-2} \cdot 1{,}5 \text{ m}}{3}} = \boxed{4{,}47 \text{ m/s}}$$

9.22. ***Se tiene un volante de 80 cm de diámetro y 50 kg de masa, que suponemos concentrada en su periferia. Este volante gira en un plano horizontal sin rozamientos, debido a la acción de una fuerza tangencial constante de 1 kp.***

Calcular:

a) La aceleración angular del volante.
b) Su velocidad angular al cabo de 10 segundos.

Solución:

a) El momento de inercia del volante es:

$$I = M \cdot r^2 = 50 \text{ kg} \cdot (0{,}4 \text{ m})^2 = 8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Como la fuerza es tangencial:

$$M = F \cdot r = 10 \text{ N} \cdot 0{,}4 \text{ m} = 4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de la Rotación:

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{4 \text{ N} \cdot \text{m}}{8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = \boxed{0{,}5 \text{ rad/s}^2}$$

b) Al tratarse de un movimiento circular uniformemente variado:

$$\omega = \omega_o + \alpha t = 0 + 0{,}5 \frac{\text{rad}}{s^2} \cdot 10 \text{ s} = \boxed{5 \text{ rad/s}}$$

9.23. ***Una esfera tiene una masa de 4 kg. Si se la hace girar alrededor de un eje tangente a ella, se observa que posee un momento de inercia que vale 0,014 kg · m².***

Deducir el radio de la esfera en el supuesto que sea maciza y homogénea.

Solución: El momento de inercia de una esfera maciza y homogénea respecto a un eje tangente a ella puede deducirse fácilmente aplicando el teorema de Steiner:

$$I = I_G + M \cdot a^2$$

expresión en la que I_G, para el caso de esta esfera, vale:

$$I_G = \frac{2}{5}\ M \cdot r^2$$

y a = r (radio de la esfera).

Por tanto:

$$I = \frac{2}{5}\ M \cdot r^2 + M \cdot r^2 = \frac{7}{5}\ M \cdot r^2$$

de donde:

$$r = \sqrt{\frac{5 \cdot I}{7\,M}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 0{,}014\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}{7 \cdot 4\ \text{kg}}} = \boxed{5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}$$

9.24. ***Dos cuerpos de igual masa descienden desde una misma altura por un plano inclinado. Uno de ellos rueda sin deslizar y el otro desliza sin rodar. Se supone, además, que ambos tienen la misma forma. ¿Cuál de los dos llega antes al suelo?***

Solución: En el caso del cuerpo que cae deslizando se cumplirá que:

$$mgh = \frac{1}{2}\ mv^2$$

de donde:

$$v^2 = 2hg \qquad [1]$$

En el caso del que cae rodando se cumple que:

$$mgh = \frac{1}{2}\ mv'^2 + \frac{1}{2}\ I\omega^2 = \frac{1}{2}\ m \cdot v'^2 + \frac{1}{2}\ I\ \frac{v'^2}{r^2}$$

efectuando operaciones:

$$2mghr^2 = mr^2 \cdot v'^2 + I \cdot v'^2 = (mr^2 + I) \cdot v'^2$$

de donde:

$$v'^2 = \frac{2mghr^2}{mr^2 + I} = 2gh \frac{mr^2}{mr^2 + I} \qquad [2]$$

Comparando las expresiones [1] y [2], se deduce que v es mayor que v'; por tanto, el tiempo t que tarda el primer cuerpo en descender es menor que el tiempo t' que tardaría el segundo.

En consecuencia, el cuerpo que desliza sin rodar llega antes al suelo que el que rueda sin deslizar.

9.25. ***Un cilindro macizo y homogéneo tiene una masa de 20 kg y un radio de giro de 0,5 m. Si gira en torno a un eje que pasa por el centro de sus bases a razón de 1 rad/s, ¿qué energía cinética de rotación posee?***

Solución: El momento de inercia del cilindro es:

$$I = M \cdot R^2 = 20 \text{ kg} \cdot (0{,}5 \text{ m})^2 = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

La energía cinética de rotación valdrá:

$$E_r = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 (1 \text{ rad/s})^2 = \boxed{2{,}5 \text{ J}}$$

9.26. ***(*) Un aro de espesor despreciable, de 3 mm de diámetro y masa 3 g gira a razón de 180 r.p.m. Calcular:***

a) ***Su energía cinética de rotación.***
b) ***El par de frenado que habría que aplicarle para que se detenga después de efectuar 25 vueltas.***
c) ***El tiempo que tardará en pararse.***

Solución:

a) El momento de inercia del aro es:

$$I = M \cdot r^2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 = 6{,}75 \cdot 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

y su velocidad angular: 6π rad/s.
La energía cinética de rotación vale:

$$E_r = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 6{,}75 \cdot 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (6\pi \text{ rad/s})^2 = \boxed{1{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ J}}$$

b) La aceleración angular del aro viene dada por:

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varphi} = \frac{0 - (6\pi \text{ rad/s})^2}{2 \cdot 50\pi \text{ rad}} = -0{,}36\pi \text{ rad/s}^2$$

Por consiguiente:

$$M = I \cdot \alpha = 6{,}75 \cdot 10^{-9} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (-0{,}36\pi \text{ rad/s}^2) = \boxed{-7{,}63 \cdot 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{m}}$$

c) El tiempo que tardará en pararse será:

$$t = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha} = \frac{0 - 6\pi \text{ rad/s}}{-0{,}36\pi \text{ rad/s}^2} = \boxed{16{,}7 \text{ s}}$$

9.27. ***Un disco de 20 kg de masa y radio 50 cm lleva arrollada una cuerda en su periferia sobre la que se ejerce una fuerza vertical hacia abajo de 40 N. Se supone que el disco gira alrededor de un eje que pasa por su centro y no existen rozamientos.***

Deducir la velocidad que adquiere al cabo de 3 segundos de actuación de la fuerza.

Solución: El momento de inercia del disco es:

$$I = \frac{1}{2} M \cdot r^2 = \frac{1}{2} 20 \text{ kg} \cdot (0{,}5 \text{ m})^2 = 2{,}5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

El momento de la fuerza tangencial aplicada es:

$$M = F \cdot r = 40 \text{ N} \cdot 0{,}5 \text{ m} = 20 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de la Rotación:

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{20 \text{ N} \cdot \text{m}}{2{,}5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 8 \text{ rad/s}^2$$

La velocidad angular del disco al cabo de 3 segundos es:

$$\omega = \omega_o + \alpha t = 0 + 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ s} = \boxed{24 \text{ rad/s}}$$

9.28. ***(*) El volante de una taladradora tiene un momento de inercia de 15 kg · m² y suministra toda la energía precisa para una cierta operación de taladro que requiere una energía de 4 500 J.***

Calcular:

- ***a) La velocidad angular después de efectuar la operación si inicialmente giraba a 300 r.p.m.***
- ***b) La potencia que habrá que suministrar en 5 segundos para que el volante adquiera su velocidad inicial.***

Solución:

a) El volante realiza el trabajo a expensas de su energía cinética de rotación, cuyo valor es:

$$E_r = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} 15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (10\pi \text{ rad/s})^2 = 7\,400 \text{ J}$$

Al emplear en la operación de taladro 4 500 J, su energía final de rotación es 7 400 J − 4 500 J = 2 900 J.

La velocidad angular del volante que corresponde a esta energía es:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,E_r}{I}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\,900\ J}{15\ kg \cdot m^2}} = \boxed{19{,}6\ rad/s}$$

que equivalen a 190 r.p.m. aproximadamente.

b) Para devolverle al volante su velocidad inicial es preciso suministrarle una energía de 4 500 J. La potencia necesaria para ello valdrá:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{4\,500\ J}{5\ s} = \boxed{900\ W}$$

9.29. ***A un cilindro de 1 cm de radio y masa 4 kg se le arrolla una cuerda de masa despreciable. De un extremo de esta cuerda cuelga un cuerpo de 10 kg. Calcular:***

a) La aceleración angular del cilindro y la lineal de caída del cuerpo.
b) Si en vez de colgar un cuerpo se hubiese aplicado una fuerza de 100 N, ¿cuánto valdría ahora la aceleración angular del cilindro?

Solución:

a) La aceleración lineal de caída del cuerpo viene dada, según se explicó en el problema 9.19, por la expresión:

$$a = \frac{2 \cdot m \cdot g}{2m + M} = \frac{2 \cdot 10\ kg \cdot 10\ m/s^2}{2 \cdot 10\ kg + 4\ kg} = \boxed{8{,}33\ m/s^2}$$

y la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{8{,}33\ m/s^2}{0{,}01\ m} = \boxed{833{,}3\ rad/s^2}$$

b) En este caso la fuerza es tangencial; por tanto:

$$M = F \cdot r = 100\ N \cdot 10^{-2}\ m = 1\ N \cdot m$$

Como el momento de inercia del cilindro es:

$$I = \frac{1}{2}\ Mr^2 = \frac{1}{2}\ 4\ kg\ (10^{-2}\ m)^2 = 2 \cdot 10^{-4}\ kg \cdot m^2$$

y aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica de la Rotación:

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{1\ N \cdot m}{2 \cdot 10^{-4}\ kg \cdot m^2} = \boxed{5\,000\ rad/s^2}$$

9.30. ***(*) Un volante cuya masa es de 5 kg y está concentrada en la periferia tiene un radio de 1 m y gira a 1 000 vueltas · s^{-1}. Hallar el momento mínimo del par de fuerzas constante que hay que aplicar para conseguir que se pare en 2 s.***

Solución: Si la masa del volante está concentrada en la periferia, implica que puede ser considerado como un aro o anillo, de momento de inercia:

$$I = MR^2 = 5 \text{ kg} \cdot (1 \text{ m})^2 = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Por otra parte, la velocidad angular con la que gira es:

$$\omega_o = 1\,000 \ \frac{\text{rev}}{\text{s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = 2\,000\pi \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

siendo su aceleración angular de frenado:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{0 \text{ rad/s} - 2\,000\pi \text{ rad/s}}{2 \text{ s}} = -1\,000\pi \text{ rad/s}^2$$

Aplicando al volante la ecuación fundamental de la Dinámica de la Rotación, tenemos:

$$M = I \cdot \alpha = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (-1\,000\pi \text{ rad/s}^2) = \boxed{-5\,000\pi \text{ N} \cdot \text{m}}$$

9.31. ***(*) Un cuerpo gira sin rozamiento en torno a su eje fijo vertical con una velocidad angular de 2 000 revoluciones por minuto. El momento de inercia del cuerpo respecto al eje de giro es de $5 \cdot 10^{-4}$ kg · m². En estas condiciones se adhiere en un punto de la superficie que dista 0,1 m del centro, una pequeña partícula de 10 g que inicialmente estaba en reposo.***

¿Cuánto vale la velocidad de rotación final del conjunto cuerpo-partícula?

Solución: Sea: $I_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ el momento de inercia del cuerpo.

$$\omega_1 = 2\,000 \ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \frac{200\pi}{3} \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

su velocidad angular antes de adherirse la partícula.

$$I_2 = m_2 \cdot r_2^2 = 10^{-2} \text{ kg} \cdot (10^{-1} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

el momento de inercia de ésta.

Ya que no hay fuerzas externas que actúen, se ha de conservar el momento cinético con respecto al eje fijo de rotación, cumpliéndose que:

$$I_1 \cdot \omega_1 = (I_1 + I_2) \cdot \omega_2$$

siendo ω_2 la velocidad de rotación final del conjunto cuerpo-partícula.

De la anterior igualdad se deduce:

$$\omega_2 = \frac{I_1 \cdot \omega_1}{I_1 + I_2} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 200\pi/3 \text{ rad/s}}{5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = \frac{500\pi}{9} \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} =$$

$$= \boxed{174{,}4 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

9.32. *(*) Una persona sobre una plataforma horizontal que puede girar sin rozamiento mantiene, cogida por un eje, una rueda de bicicleta a la que hace girar en un plano horizontal.*

a) Explíquese la ley que rige el movimiento de la plataforma.
b) Siendo el momento de inercia de la rueda $I_1 = 3$ kg · m², el del conjunto formado por la plataforma y la persona $I_2 = 300$ kg · m² y la velocidad con que hace girar a la rueda 4 r.p.s., calcúlese la velocidad de giro de la plataforma.

Solución:

a) Como sobre el sistema plataforma-persona-rueda no actúa ninguna fuerza exterior, el momento resultante será nulo, permaneciendo, por lo tanto, constante el momento cinético total (principio de conservación del momento cinético). En consecuencia, la ley que rige el movimiento de la plataforma será:

$$\boxed{\vec{L} = \text{cte}}$$

b) Apliquemos la ley que acabamos de deducir. Si inicialmente el momento cinético es nulo, se cumplirá que:

$$I_1 \cdot \omega_1 + I_2 \cdot \omega_2 = 0$$

siendo ω_2 la velocidad de giro de la plataforma. Se deduce que:

$$\omega_2 = -\frac{I_1 \cdot \omega_1}{I_2} = -\frac{3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 4 \text{ r.p.s.}}{300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = \boxed{-0{,}04 \text{ r.p.s.}}$$

El signo negativo indica que la plataforma gira en sentido contrario al de la rueda.

9.33. *(*) Sobre una rueda que posee un eje fijo se ejerce un momento constante de 20 N · m durante 10 s, con lo cual su velocidad angular aumenta desde 0 a 100 revoluciones por minuto. Se suprime entonces el momento externo y al cabo de 100 s el rozamiento de sus cojinetes la hace detener. Determinar:*

a) Las aceleraciones angulares en cada fase del movimiento.
b) El momento de las fuerzas de rozamiento.
c) El momento de inercia de la rueda.

***Indicación:** Téngase presente que las fuerzas de rozamiento actúan durante todo el tiempo.*

Solución:

a) La velocidad angular al cabo de 10 segundos es:

$$\omega = 100 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \frac{10}{3} \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La aceleración angular de la rueda en la primera fase del movimiento valdrá:

$$\alpha_1 = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{\frac{10}{3}\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} - 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{10 \text{ s}} = \boxed{\frac{\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}$$

siendo su valor en la segunda fase:

$$\alpha_2 = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} - \frac{10\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{100 \text{ s}} = \boxed{-\frac{\pi}{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}$$

b y c) En la primera fase del movimiento actúan tanto el momento de la fuerza aplicada como el de las fuerzas de rozamiento:

$$20 \text{ N} \cdot \text{m} - M_r = I \cdot \frac{\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \qquad [1]$$

Por el contrario, durante la segunda etapa, cuando se suprime el momento externo, sólo actúa el de rozamiento:

$$M_r = I \cdot \frac{\pi}{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \qquad [2]$$

La resolución del sistema formado por las ecuaciones [1] y [2] conduce a:

$$\boxed{\begin{aligned} M_r &= 1{,}818 \text{ N} \cdot \text{m} \\ I &= 17{,}37 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}}$$

9.34. ***(*) Dos niños de igual masa —que para el problema pueden ser considerados como puntos materiales— se encuentran situados sobre una barra horizontal soldada a otra vertical, que a su vez se apoya sobre los cojinetes C_1 y C_2, tal como indica la figura 9.8. Todo el sistema —salvo los niños— se considera de masa despreciable. Inicialmente el conjunto gira con una velocidad ω_o constante, siendo la distancia de los niños al eje igual en ambos casos a x_o. Más tarde los niños avanzan en dirección al eje. Determinar la velocidad angular ω del sistema cuando la distancia de los niños al eje es x.***

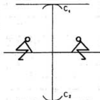


Fig. 9.8

Solución: El momento de inercia inicial de los dos niños con respecto al eje es: $I_o = 2mx_o^2$, valiendo el momento de inercia final: $I = 2mx^2$. Dado que se tiene que cumplir el principio de conservación del momento cinético, se verificará que:

$$I_o \cdot \omega_o = I \cdot \omega$$
$$2mx_o^2\omega_o = 2mx^2\omega$$

de donde:

$$\boxed{\omega = \left(\frac{x_o}{x}\right)^2 \cdot \omega_o}$$

9.35. ***(*) Las masas A, B y C están unidas rígidamente entre sí y se encuentran distribuidas como se indica en la figura 9.9 e inicialmente en reposo.***

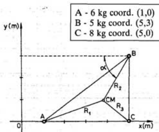


Fig. 9.9

a) ***Hallar la posición del centro de masas (CM).***
b) ***¿Cuál será la aceleración del CM si el sistema se coloca sobre una superficie horizontal y se aplica una fuerza de 40 N a la masa menor según +OX?***
c) ***Calcular el momento de inercia respecto al CM.***
d) ***Determinar la aceleración angular en el instante inicial.***

Solución:

a) Hallemos, en primer lugar, la posición del centro de masas:

$$X_{CM} = \frac{\Sigma\, m_i \cdot x_i}{M} = \frac{6\text{ kg} \cdot 1\text{ m} + 5\text{ kg} \cdot 5\text{ m} + 8\text{ kg} \cdot 5\text{ m}}{6\text{ kg} + 5\text{ kg} + 8\text{ kg}} = \frac{71}{19}\text{ m}$$

$$Y_{CM} = \frac{\Sigma\, m_i \cdot y_i}{M} = \frac{6\text{ kg} \cdot 0\text{ m} + 5\text{ kg} \cdot 3\text{ m} + 8\text{ kg} \cdot 0\text{ m}}{6\text{ kg} + 5\text{ kg} + 8\text{ kg}} = \frac{15}{19}\text{ m}$$

El centro de masas es el punto $(\frac{71}{19}, \frac{15}{19})$, que viene definido por el vector de posición: $\vec{R} = \frac{71}{19}\,\vec{i} + \frac{15}{19}\,\vec{j}$:

$$\boxed{\text{CM}\left(\frac{71}{19}, \frac{15}{19}\right);\ \vec{r}_o = \frac{71}{19}\,\vec{i} + \frac{15}{19}\,\vec{j}\ \text{(SI)}}$$

b) La fuerza $\vec{F} = 40\ \vec{i}$ (N) comunica al centro de masas una aceleración:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}}{M} = \frac{40\ \vec{i}\ (N)}{19\ kg} = \frac{40}{19}\ \vec{i}\ (ms^{-2})$$

$$\boxed{\vec{a}_{CM} = \frac{40}{19}\ \vec{i}\ \ (SI)}$$

c) Tenemos que calcular, ante todo, las distancias R_1, R_2 y R_3:

$$R_1 = \sqrt{(X_{CM} - X_A)^2 + (Y_{CM} - Y_A)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{71}{19} - 1\right)^2 + \left(\frac{15}{19} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{2\,929}}{19}\ m$$

$$R_2 = \sqrt{(X_B - X_{CM})^2 + (Y_B - Y_{CM})^2} =$$

$$= \sqrt{\left(5 - \frac{71}{19}\right)^2 + \left(3 - \frac{15}{19}\right)^2} = \frac{\sqrt{2\,340}}{19}\ m$$

$$R_3 = \sqrt{(X_C - X_{CM})^2 + (Y_C - Y_{CM})^2} =$$

$$= \sqrt{\left(5 - \frac{71}{19}\right)^2 + \left(0 - \frac{15}{19}\right)^2} = \frac{\sqrt{801}}{19}\ m$$

El momento de inercia del sistema respecto al centro de masas valdrá:

$$I = m_A \cdot R_1^2 + m_B \cdot R_2^2 + m_C \cdot R_3^2 =$$

$$= 6\ kg \cdot \left(\frac{\sqrt{2\,929}}{19}\ m\right)^2 + 5\ kg \cdot \left(\frac{\sqrt{2\,340}}{19}\ m\right)^2 + 8\ kg \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\sqrt{801}}{19}\ m\right)^2 = \boxed{98{,}84\ kg \cdot m^2}$$

d) El momento de la fuerza aplicada con respecto al centro de masas es:

$$M = F \cdot R_2 \cdot \text{sen}\ \alpha = F \cdot (Y_B - Y_{CM}) =$$

$$= 40\ N \cdot \left(3 - \frac{15}{19}\right) m = 88{,}42\ N \cdot m$$

Por lo tanto, el valor de la aceleración angular en el instante inicial es:

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{88{,}42\ N \cdot m}{98{,}84\ kg \cdot m^2} = \boxed{0{,}895\ rad \cdot s^{-2}}$$

10. DINÁMICA DEL MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO. MOVIMIENTO PENDULAR

FORMULARIO-RESUMEN

Movimiento armónico de traslación:	$s = A \cdot \text{sen}\,(\omega t + \theta_0)$	$F = -k \cdot x$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$
Movimiento armónico de rotación:	$\varphi = A \cdot \text{sen}\,(\omega t + \theta_0)$	$M = -k \cdot \varphi$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}$

Período del péndulo simple: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

(l = longitud del péndulo)

Período del péndulo físico: $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}}$

(d = distancia entre el centro de gravedad y el punto de suspensión)

Longitud reducida de un péndulo físico: $l = \frac{I}{m \cdot d}$

10. DINÁMICA DEL MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO. MOVIMIENTO PENDULAR

10.1. ***¿Qué transformaciones energéticas tienen lugar en un cuerpo que posee un movimiento vibratorio armónico? ¿Y las de un cuerpo que oscila a un lado y a otro de su posición de equilibrio?***

Solución: Tanto en un caso como en otro, en la posición de máxima elongación el cuerpo que vibra u oscila posee únicamente energía potencial (elástica o gravitatoria). En cualquier punto situado entre la máxima elongación y la posición de equilibrio el cuerpo posee energía potencial y cinética. Al pasar por la posición de equilibrio el cuerpo tiene únicamente energía cinética (se considera esta posición como «nivel cero» de energía potencial). En todos los casos la energía total del cuerpo es constante, como consecuencia del principio de conservación.

10.2. ***¿En qué casos puede considerarse un movimiento pendular como un vibratorio armónico simple?***

Solución: Únicamente en aquellos casos en los que la amplitud de la oscilación sea menor de 5°. De lo contrario, la fuerza productora del movimiento vendría dada por:

$$F = -m \cdot g \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

y el período por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \operatorname{sen}^4 \frac{\varphi}{2} + \ldots\right)$$

10.3. ***Demuéstrese que la fórmula del período de oscilación de un péndulo simple es homogénea.***

Solución: La fórmula del período de oscilación de un péndulo simple es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

La ecuación de dimensiones del primer miembro es $[T] = T$, y la del segundo:

$$\left[2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\right] = \left(\frac{L}{LT^{-2}}\right)^{1/2} = T$$

Como la ecuación dimensional de los dos miembros es la misma, se dice que la fórmula **es homogénea.**

10.4. *¿Cómo es la fuerza que produce un movimiento vibratorio armónico? ¿Y la que produce un movimiento pendular? ¿En qué casos son análogas?*

Solución: La fuerza que produce un movimiento vibratorio armónico simple es una fuerza proporcional a la elongación y de signo contrario a ella:

$$F = -k \cdot x$$

En el caso de que el movimiento sea pendular, $F = -mg \text{ sen } \varphi$. Únicamente si φ es menor de 5° se cumple que el valor de ese ángulo, medido en radianes, coincide con el valor de su seno, y, por tanto:

$$F = -mg \text{ sen } \varphi = -mg\varphi = -mg \frac{x}{l} = -k \cdot x$$

en cuyo caso el movimiento pendular puede considerarse como vibratorio armónico.

10.5. *Un péndulo simple de 4 m de longitud oscila con un período de 4 segundos. ¿Cuál será la longitud de otro péndulo que oscile en el mismo lugar de la experiencia con un período de 2 segundos?*

Solución: Aplicando la expresión del período a cada uno de los dos péndulos, se tiene:

$$4 \text{ s} = 2\pi \sqrt{\frac{4 \text{ m}}{g}} \quad [1]$$

$$2 \text{ s} = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}} \quad [2]$$

Dividiendo entre sí las ecuaciones [1] y [2]:

$$\frac{(4 \text{ s})^2}{(2 \text{ s})^2} = \frac{4 \text{ m}}{l'}$$

de donde:

$$\boxed{l' = 1 \text{ m}}$$

10.6. *Dos péndulos tienen distinta longitud: la de uno es doble de la del otro. ¿En qué relación están sus períodos de oscilación?*

Solución: Para el primer péndulo se cumple que:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad [1]$$

y para el segundo:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{g}} \qquad [2]$$

Dividiendo entre sí las ecuaciones [1] y [2]:

$$\frac{T}{T'} = \frac{2\pi \sqrt{l/g}}{2\pi \sqrt{2l/g}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

10.7. ***Una masa de 150 g se suspende de un extremo de un resorte y se observa que la longitud del mismo se alarga 0,4 m. ¿Cuánto vale la constante elástica del resorte?***

Si después se abandona a sí misma, desplazándola hacia abajo, el resorte oscila. ¿Cuánto vale el período de oscilación?

Solución: Aplicando la ley de Hooke:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{0{,}15\ \text{kg} \cdot 10\ \text{m/s}^2}{0{,}4\ \text{m}} = \boxed{3{,}75\ \text{N/m}}$$

Conocido el valor de la constante elástica, deducimos el período de oscilación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}15\ \text{kg}}{3{,}75\ \text{N/m}}} = \boxed{1{,}257\ \text{s}}$$

10.8. ***Deducir el período de oscilación de un péndulo simple de 60 cm de longitud cuando está situado en lo alto de una montaña de 1 500 m de altura sobre el nivel del mar.***

Solución: El valor de g, a una cierta altura sobre el nivel del mar, viene dado por la expresión:

$$g = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} = \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{\left(1 + \frac{1{,}5 \cdot 10^3\ \text{m}}{6\,370 \cdot 10^3\ \text{m}}\right)^2} = 9{,}805\ \text{m/s}^2$$

Sustituyendo este valor en la ecuación general del período de un péndulo simple:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}6\ \text{m}}{9{,}805\ \text{m/s}^2}} = \boxed{1{,}55\ \text{s}}$$

10.9. ***La longitud de un péndulo que bate segundos en el ecuador terrestre es 0,991 m, y la del que bate segundos en el polo es 0,9962 m. ¿Cuánto pesará un cuerpo situado en el ecuador terrestre si en el polo pesa 10 kp?***

Solución: Recordemos que 1 kp = 9,81 N; por tanto, 10 kp = 98,1 N.
Un péndulo que bate segundos es aquel cuyo período de oscilación es de

dos segundos. A partir de los datos del problema podemos calcular el valor de g en el ecuador y en el polo:

$$g_{ecuador} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}991 \text{ m}}{4 \text{ s}^2} = 9{,}78 \text{ m/s}^2$$

$$g_{polo} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}9962 \text{ m}}{4 \text{ s}^2} = 9{,}832 \text{ m/s}^2$$

Como el peso del cuerpo viene dado por P = mg y el cuerpo dado, en el polo, pesa 98,1 N, su masa será:

$$m = \frac{P}{g} = \frac{98{,}1 \text{ N}}{9{,}832 \text{ m/s}^2} = 9{,}978 \text{ kg}$$

El peso de esta masa situada en el ecuador será:

$$P = mg = 9{,}978 \text{ kg} \cdot 9{,}78 \text{ m/s}^2 = \boxed{\mathbf{97{,}581 \text{ N}}}$$

10.10. ***Deducir el valor de la aceleración debida a la gravedad en un punto de la Tierra donde un péndulo simple de 2 m de longitud realiza 50 oscilaciones en 2,5 minutos.***

Solución: El período o tiempo de una oscilación vale:

$$T = \frac{t}{n} = \frac{2{,}5 \text{ min}}{50 \text{ osc.}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 3 \text{ s}$$

De la expresión general del período de un péndulo se deduce que:

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 2 \text{ m}}{(3 \text{ s})^2} = \boxed{\mathbf{8{,}77 \text{ m/s}^2}}$$

10.11. ***Un motor eléctrico de 20 kg está colocado sobre cuatro resortes que le sirven de soporte. La constante elástica de cada uno vale 30 N/cm.***
Deducir el período de oscilación de cada uno de los resortes.

Solución: La constante elástica de cada resorte es:

$$k = 30 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 3\ 000 \text{ N/m}$$

soportando cada uno de ellos una masa de:

$$\frac{20 \text{ kg}}{4} = 5 \text{ kg}$$

El período de oscilación de cada resorte valdrá:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{5 \text{ kg}}{3 \cdot 10^3 \text{ N/m}}} = \boxed{\mathbf{0{,}257 \text{ s}}}$$

10.12. *Del techo de una habitación cuelga un péndulo simple que realiza 50 oscilaciones completas en 300 segundos. Si la bolita que constituye el péndulo está situada a 20 cm del suelo, ¿qué altura tiene el techo?*

Solución: La altura del techo será igual a la suma de la altura a que se encuentra la bolita (0,2 m) y la longitud del péndulo. Ésta se deduce a partir de la expresión matemática del período, el cual vale: T = 300 s/50 = 6 s.

$$l = \frac{g \cdot T^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (6 \text{ s})^2}{4\pi^2} = 8{,}936 \text{ m}$$

La altura del techo será:

$$h = 0{,}2 \text{ m} + 8{,}936 \text{ m} = \boxed{9{,}136 \text{ m}}$$

10.13. *Un cuerpo de 2 kg está suspendido de un resorte. Si se le aplica una fuerza adicional de 10 N, el resorte se alarga 0,1 m.*

Calcúlese la constante recuperadora del resorte.

Si después de ejercida la fuerza el cuerpo se abandona a sí mismo, se observa que oscila libremente.

Calcúlese su período de oscilación.

Solución: El valor de la constante recuperadora del resorte es:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{10 \text{ N}}{0{,}1 \text{ m}} = \boxed{100 \text{ N/m}}$$

El período de oscilación será:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2 \text{ kg}}{100 \text{ N/m}}} = \boxed{0{,}89 \text{ s}}$$

10.14. *Un punto material de 2,5 kg oscila con un movimiento armónico simple de frecuencia 3 Hz.*

Deducir:

a) Su pulsación.
b) La aceleración cuando la elongación es 5 cm.
c) El valor de la fuerza recuperadora para esa elongación.

Solución:

a) La pulsación valdrá:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 3 \text{ s}^{-1} = \boxed{6\pi \text{ rad/s}}$$

b) La aceleración, para una elongación dada, viene dada por:

$$a = -\omega^2 \cdot s = -(6\pi \text{ rad/s})^2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = \boxed{-17{,}77 \text{ m/s}^2}$$

El punto vibrante está sometido a una aceleración, de sentido contrario al de la elongación, cuyo valor es **17,77 m/s²**

c) El valor absoluto de la fuerza recuperadora será:

$$F = m \cdot a = 2,5 \text{ kg} \cdot 17,77 \text{ m/s}^2 = \boxed{44,43 \text{ N}}$$

Recuérdese, también, que el sentido de esta fuerza recuperadora es contrario al de la elongación.

10.15. ***Un péndulo simple está constituido por una masa puntual de 500 g suspendida de un hilo de 1 m de longitud.***

a) Calcúlese el período de oscilación de ese péndulo para pequeñas amplitudes.
b) Si se desplaza la masa puntual un ángulo de 60° respecto a su posición de equilibrio, ¿con qué velocidad pasará de nuevo por dicha posición de equilibrio?

Solución:

a) El período de oscilación del péndulo es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{1 \text{ m}}{9,8 \text{ m/s}^2}} = \boxed{2 \text{ s}}$$

b) Cuando se desplaza la masa puntual un ángulo de 60° respecto a su posición de equilibrio (véase fig. 10.1), su energía potencial gravitatoria es:

$$E_p = mgh = mg (l - l \cos 60°) =$$
$$= 0,5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 (1 - 0,5) \text{ m} = 2,5 \text{ J}$$

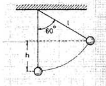


Fig. 10.1

De acuerdo con el principio de conservación de la energía, cuando la masa puntual pasa por la posición de equilibrio poseerá una energía cinética tambien de 2,5 J. Por tanto:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

de donde:

$$v = \sqrt{\frac{2 E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5 \text{ J}}{0,5 \text{ kg}}} = \boxed{3,16 \text{ m/s}}$$

10.16. ***A un muelle helicoidal de acero se le cuelga una masa de 10 kg y se observa que se alarga 2 cm. Seguidamente se le añaden otros 10 kg y se le deja oscilar libremente, observando que lo hace con una amplitud de 3 cm.***
Deducir la frecuencia de la oscilación en este caso.

Solución: La constante recuperadora del muelle es:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{10 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2}{0{,}02 \text{ m}} = 5 \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

La frecuencia de la oscilación será:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{20 \text{ kg}}{5 \cdot 10^3 \text{ N/m}}}} = \boxed{2{,}5 \text{ s}^{-1}}$$

10.17. ***Un resorte de acero tiene una longitud de 15 cm y una masa de 50 g. Cuando se le añade una masa de 50 g se alarga, quedando en reposo con una longitud de 17 cm.***

Calcúlese:

a) La constante recuperadora del resorte.
b) La frecuencia de las oscilaciones cuando se le cuelga una masa de 90 g, además de la de 50 g que ya tenía.
c) El trabajo realizado por el resorte para elevar esta masa anterior hasta una altura de 6 cm.

Solución:

a) Calculemos la constante recuperadora del resorte teniendo en cuenta que cuando se le cuelga una masa de 50 g (0,05 kg) experimente un alargamiento de (17 − 15) cm = 2 cm = 0,02 m.

$$k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{0{,}05 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2}{0{,}02 \text{ m}} = \boxed{25 \text{ N/m}}$$

b) La frecuencia de las oscilaciones será:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{0{,}14 \text{ kg}}{25 \text{ N/m}}}} = \boxed{2{,}13 \text{ s}^{-1}}$$

c) El trabajo que realiza el resorte será igual al incremento de energía potencial gravitatoria que experimenta la masa citada:

$$W = E_p = mgh = 0{,}14 \text{ kg} \cdot 10 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}06 \text{ m} = \boxed{0{,}084 \text{ J}}$$

10.18. ***A una partícula material de masa 10 g se la obliga a describir un movimiento vibratorio armónico en el eje de las Y. La amplitud del movimiento es 5 cm y la frecuencia 0,5 s⁻¹.***

Deducir la máxima velocidad que puede alcanzar la partícula.

Solución: La ecuación de la elongación en un movimiento vibratorio armónico es:

$$y = A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0) = A \text{ sen } (2\pi\nu t + \varphi_0)$$

y la de la velocidad:

$$v = \frac{dy}{dt} = 2\pi\nu A \cos(2\pi\nu t + \varphi_o)$$

Esta velocidad será máxima cuando $\cos(2\pi\nu t + \varphi_o) = 1$. Por tanto:

$$v_{máx} = 2\pi\nu A = 2\pi \cdot 0,5\ s^{-1} \cdot 0,05\ m = \boxed{0,157\ m/s}$$

10.19. ***Una masa de 1 kg cuelga de un hilo de 1 m de longitud y oscila con una amplitud de 60°.***
Calcular:

a) La velocidad con que pasa la masa oscilante por la posición de equilibrio.
b) El valor de la fuerza que origina el movimiento cuando el punto oscilante está en la posición extrema.
c) La tensión de la cuerda en esta posición.

Solución:

a) La velocidad de la masa oscilante cuando pasa por la posición de equilibrio se calcula según lo explicado en el apartado b) del problema 10.15 y que, por su analogía con este caso, no merece la pena volver a repetir.
Efectuando los cálculos oportunos, se deduce fácilmente que:

$$\boxed{v = 3,16\ m/s}$$

b) La fuerza que origina el movimiento cuando el punto oscilante está en la posición extrema es:

$$F = mg \operatorname{sen} \varphi = 1\ kg \cdot 10\ m \cdot s^{-2} \cdot 0,866 = \boxed{8,66\ N}$$

c) La tensión del hilo en esa posición extrema es:

$$T = mg \cos \varphi = 1\ kg \cdot 10\ m \cdot s^{-2} \cdot 0,5 = \boxed{5\ N}$$

10.20. ***Un cuerpo cuya masa es 100 g posee un movimiento armónico simple a lo largo de una recta vertical AB de 10 cm de longitud. El período de vibración es 2 segundos.***
Calcúlese:

a) La velocidad y aceleración en el punto medio de AB.
b) La velocidad y aceleración en el extremo B.
c) La fuerza recuperadora en el extremo B.

Solución:

a) La velocidad en el punto medio de AB es máxima (dicho punto representa la posición de equilibrio) y su valor, según se explicó en el problema 10.18, viene dado por:

$$v = 2\pi\nu A = \frac{2\pi}{T} A = \frac{2\pi\ rad}{2\ s} \cdot 0,05\ m = \boxed{0,157\ m/s}$$

Como la aceleración es proporcional a la elongación, al ser ésta nula en la posición de equilibrio, también lo será aquélla:

$$a = -\omega^2 \cdot s = -\omega^2 \cdot 0 = \boxed{0}$$

b) En el extremo B la velocidad es **nula** y el valor absoluto de la aceleración será:

$$a_B = |-\omega^2 A| = \frac{4\pi^2}{T^2}\ A = \frac{4\pi^2}{(2\ s)^2} \cdot 0{,}05\ m = \boxed{0{,}493\ m/s^2}$$

c) Por último, la fuerza recuperadora será, en valor absoluto:

$$F_B = m \cdot a_B = 0{,}1\ kg \cdot 0{,}493\ m/s^2 = \boxed{4{,}9 \cdot 10^{-2}\ N}$$

10.21. ***Un péndulo simple está constituido por una esferita puntual de masa 100 g suspendida de un hilo de longitud 1 m. Se le hace oscilar con una amplitud de 30°.***

a) ¿Cuánto vale la energía potencial de la esferita en la máxima elongación?
b) ¿Qué velocidad máxima adquirirá al oscilar?
c) ¿Cuánto tiempo invertirá en 10 oscilaciones completas?

Solución:

a) En la posición de máxima elongación (fig. 10.2) la energía potencial gravitatoria de la esferita es:

$$E_p = mgh = mg\ (l - l \cos 30°) =$$
$$= 0{,}1\ kg \cdot 10\ m \cdot s^{-2}\ (1 - 0{,}866)\ m =$$
$$= \boxed{0{,}134\ J}$$

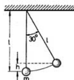


Fig. 10.2

b) Al oscilar, la energía potencial gravitatoria de la esferita se transforma en energía cinética. En el momento en que la transformación sea total, cosa que sucede al pasar la esferita por la posición de equilibrio, se tiene:

$$E_p = E_c = \frac{1}{2}\ mv_{máx}^2$$

de donde:

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2\ E_p}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}134\ J}{0{,}1\ kg}} = \boxed{1{,}64\ m/s}$$

c) El período de este péndulo (tiempo de una oscilación) es:

$$T = 2\pi\ \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\ \sqrt{\frac{1\ m}{9{,}8\ m/s^2}} = 2\ s$$

Por tanto, el tiempo invertido en 10 oscilaciones completas será:

$$t = 10\ T = 10 \cdot 2\ s = \boxed{20\ s}$$

10.22. ***Deducir el error absoluto cometido al considerar como péndulo simple una bola de 3 cm de diámetro suspendida de un hilo de masa despreciable, siendo 1 m la distancia del punto de suspensión al centro de gravedad de la esfera.***

Nota: El momento de inercia del conjunto hilo-esferita respecto al eje de giro es:

$$I = M \cdot L^2 + \frac{2}{5} M \cdot R^2$$

Solución: El período de oscilación de un péndulo físico viene dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{M \cdot L^2 + (2/5)\ MR^2}{M \cdot g \cdot d}} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{L^2 + (2/5)\ R^2}{g \cdot d}} = 2\pi \sqrt{\frac{(1 + 9 \cdot 10^{-5})\ m^2}{9{,}8\ m/s^2 \cdot 1\ m}}$$

La longitud que habría de tener un péndulo simple para que su período fuese igual al del físico será:

$$L' = \frac{g \cdot T^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}8\ m/s^2 \left[4\pi^2\ \frac{(1 + 9 \cdot 10^{-5})}{9{,}8}\right] s^2}{4\pi^2} =$$

$$= 1 + 9 \cdot 10^{-5}\ m$$

Si consideramos al péndulo físico dado como si fuera un péndulo simple, cometeríamos un error absoluto de $9 \cdot 10^{-5}\ m = 0{,}009\ cm$:

$$L' - L = (1 + 9 \cdot 10^{-5})\ m - 1\ m = \boxed{9 \cdot 10^{-5}\ m}$$

10.23. ***Una rueda de masa 3 kg, supuesta concentrada en la periferia y de radio 32 cm, puede girar alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro. En un punto de la periferia esta rueda lleva una sobrecarga de 3 kg.***

Se observa que al desplazar ligeramente la sobrecarga un pequeño ángulo, el conjunto oscila como un péndulo físico.

Calcular:

- *a) El período de las pequeñas oscilaciones.*
- *b) La masa que debiera tener la sobrecarga para que el conjunto se convirtiera en un dispositivo que bate segundos.*
- *c) El centro de oscilación.*

Solución:

a) El período de un péndulo físico viene dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

siendo, en este caso, $I = MR^2 + M'R^2$, y como $M = M' = 3$ kg:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\,R}{g}} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}32\ m}{9{,}8\ m/s^2}} = \boxed{1{,}6\ s}$$

b) Designemos por m la masa pedida cuando T = 2 s:

$$2\ s = 2\pi \sqrt{\frac{(3 + m)\ kg \cdot (0{,}32\ m)^2}{m \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 0{,}32\ m}}$$

de donde:

$$\boxed{m = 1{,}41\ kg}$$

c)

$$l = \frac{I}{md} = \frac{6\ kg \cdot (0{,}32\ m)^2}{3\ kg \cdot 0{,}32\ m} = \boxed{0{,}64\ m}$$

10.24. ***Cuando sobre un muelle elástico actúa una fuerza de 50 N, experimenta un alargamiento de 4 cm. Calcular el trabajo que es necesario realizar para estirar el muelle 10 cm.***

Solución: Como el alargamiento es proporcional a la fuerza deformadora, se tiene, de acuerdo con la ley de Hooke:

$$F = k \cdot x$$

de donde:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{50\ N}{4\ cm \cdot \dfrac{1\ m}{10^2\ cm}} = 1\,250\ N/m$$

El trabajo necesario para estirar el muelle 10 cm es:

$$W = \int_0^x F \cdot dx = \int_0^x kx \cdot dx = \frac{1}{2}\ k\,[x^2]_0^x = \frac{1}{2}\ kx^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1\,250\ \frac{N}{m} \cdot (10^{-1}\ m)^2 = \boxed{6{,}25\ J}$$

10.25. ***Al apoyar, con velocidad nula, un cuerpo de 20 kg de masa sobre un muelle elástico, dispuesto verticalmente, éste se comprime 10 cm. Calcular la deforma-***

ción que experimenta dicho muelle si el cuerpo se deja caer desde 2 m por encima de él.

Solución: La constante del muelle es:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{20 \text{ kg-f}}{10 \text{ cm}} \cdot \frac{9{,}8 \text{ N}}{1 \text{ kg-f}} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 1\,960 \text{ N/m}$$

Cuando dejamos caer un cuerpo de masa m sobre el muelle, desde una altura h, y el muelle se acorta en una longitud a, la energía potencial gravitatoria del cuerpo, mg (h + a), se invierte en trabajo de deformación del muelle. Este trabajo tiene por valor:

$$W = \int_0^a kx \cdot dx = \left[\frac{k}{2} x^2\right]_0^a = \frac{ka^2}{2}$$

Luego:

$$\frac{ka^2}{2} = mgh + mga$$

de donde:

$$\frac{k \cdot a^2}{2} - mga - mgh = 0$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores numéricos del enunciado del problema, tenemos:

$$\frac{1\,960 \text{ N/m}}{2} a^2 - 20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot a - 20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 2 \text{ m} = 0$$

$$5a^2 - a - 2 = 0; \; a = \frac{1 + \sqrt{1 + 40}}{10} = \frac{1 + 6{,}4}{10} = \boxed{0{,}74 \text{ m}}$$

(La otra solución carece de significado físico).

10.26. *Una pequeña esfera de 2 mg de masa, sujeta a un muelle de constante recuperadora 0,8 N · m⁻¹, se encuentra sometida a un movimiento vibratorio armónico simple, de 16 erg de energía total. Calcular la amplitud y el período de tal movimiento.*

Nota: Se recomienda, para mayor sencillez, resolver el problema utilizando para los cálculos unidades del sistema cegesimal.

Solución: En primer lugar:

$$k = 0{,}8 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{10^5 \text{ dyn}}{1 \text{ N}} \cdot \frac{1 \text{ m}}{10^2 \text{ cm}} = 800 \text{ dyn/cm}$$

La energía total es, en todo momento:

$$E = E_{p_{máx}} = \frac{1}{2}\ kA^2$$

siendo A la amplitud del movimiento. De la ecuación anterior se deduce:

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 16\ \text{erg}}{800\ \text{dyn/cm}}} = \boxed{0{,}2\ \text{cm}}$$

Calculemos ahora el período del movimiento:

$$T = 2\pi\ \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\ \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}\ \text{g}}{8 \cdot 10^2\ \text{dyn/cm}}} \simeq \boxed{10^{-2}\ \text{s}}$$

10.27. ***Del techo del laboratorio cuelga un muelle elástico helicoidal, del cual se suspende un cuerpo de 5 kg, experimentando, a causa de ello, un aumento de longitud de 1 cm. Se añaden después otros 15 kg más y se hace oscilar el sistema con una amplitud de 4 cm. Calcular:***

a) La frecuencia del movimiento.
b) La velocidad, la aceleración y la fuerza recuperadora a los 2 segundos de haber empezado a oscilar el sistema.

Solución:

a) La constante recuperadora tiene de valor:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{\text{Peso}}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{5\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{10^{-2}\ \text{m}} = 4\ 900\ \text{N/m}$$

Cuando el sistema oscila, la frecuencia del movimiento es:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\ \sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{2\pi}\ \sqrt{\frac{4\ 900\ \text{N/m}}{20\ \text{kg}}} \simeq \boxed{\frac{5}{2}\ \text{s}^{-1}}$$

b) Dado que la fase inicial del movimiento es $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, ya que cuando $t = 0$, $x = A$, tenemos:

$$x = A \cdot \text{sen}\ (\omega t + \varphi_0) = 4 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{sen}\ \left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= 4 \cdot 10^{-2} \cos 5\pi t \quad \text{(SI)}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -0{,}2\pi \cdot \text{sen}\ 5\pi t = -0{,}2\pi\ \sqrt{1 - \cos^2 5\pi t} =$$
$$= -5\pi\ \sqrt{16 \cdot 10^{-4} - x^2} \quad \text{(SI)}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\pi^2 \cos 5\pi t = -25\pi^2 x \quad \text{(SI)}$$

$$F = m \cdot a = 20\ \text{kg} \cdot (-\pi^2 \cos 5\pi t)\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} =$$
$$= -20\pi^2 \cos 5\pi t \quad (\text{SI}) = -500\ \pi^2 x \quad (\text{SI})$$

Particularicemos ahora las expresiones acabadas de obtener al caso en que t = 2 s:

$$x_{2s} = 4 \cdot 10^{-2} \cos 5\pi \cdot 2\ (\text{m}) = 4 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 4\ \text{cm}$$

$$v_{2s} = -5\pi \sqrt{16 \cdot 10^{-4} - (4 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2} = \boxed{\mathbf{0\ m \cdot s^{-1}}}$$

$$a_{2s} = -25\pi^2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \boxed{\mathbf{-\pi^2\ m \cdot s^{-2}}}$$

$$F_{2s} = -500\pi^2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}\ \text{N} = \boxed{\mathbf{-20\pi^2\ N}}$$

10.28. ***Una partícula, de 2 mg de masa, realiza un movimiento vibratorio armónico simple, viniendo dada su elongación, en todo momento por la ecuación:***

$$x = A \cdot \textit{sen}\ 100\pi t \quad (SCGS)$$

Se sabe que la velocidad de la partícula, cuando ha transcurrido un tiempo igual a la sexta parte del período, es $v = 2\pi\ cm \cdot s^{-1}$.

Calcular la amplitud del movimiento, la constante recuperadora y la energía total, utilizando en todos los cálculos el sistema cegesimal de unidades.

Solución: El período del movimiento vibratorio armónico es $T = \frac{1}{50}$ s.

Para hallar la velocidad de la partícula, en función del tiempo, no tenemos más que derivar, con respecto al tiempo, la ecuación de la elongación, y así obtenemos:

$$v = \frac{dx}{dt} = 100\pi\ A \cos 100\pi\ t \quad (\text{SCGS})$$

Para $t = \frac{T}{6} = \frac{1/50\ \text{s}}{6} = \frac{1}{300}$ s:

$$v_{t=1/300\ s} = 100\pi\ A \cos \frac{100\pi}{300} = 100\pi\ A \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 50\pi \cdot A\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por otra parte, $v_{t=1/300\ s} = 2\pi\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$. En consecuencia, teniendo en cuenta ambas expresiones para la velocidad, obtenemos:

$$50\pi \cdot A\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1} = 2\pi\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{A = 4 \cdot 10^{-2}\ cm}}$$

La constante recuperadora valdrá:

$$k = \omega^2 \cdot m = (100\pi\ \text{s}^{-1})^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ \text{g} \simeq \boxed{\mathbf{200\ dyn/cm}}$$

La energía total es:

$$E = \frac{1}{2}\ k \cdot A^2 \simeq \frac{1}{2}\ 200\ \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}\ (4 \cdot 10^{-2}\ \text{cm})^2 \simeq \boxed{0{,}16\ \text{erg}}$$

10.29. ***En un montaje de laboratorio se disponen dos raíles en ángulo recto, inclinados con respecto a la horizontal uno 30° y el otro 60° (fig. 10.3). Se deja deslizar, sin rozamiento, desde el punto A, situado sobre el raíl de 30° de inclinación a una altura de 1,225 m sobre el suelo, una bola que, tras alcanzar el punto B, situado en la unión de los dos raíles, asciende, de nuevo, por el otro raíl hasta C, y así sucesivamente. Hallar el período de oscilación de la bola.***

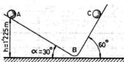


Fig. 10.3

Solución: Consideremos, en primer lugar, el espacio AB. Su longitud es:

$$s_1 = \frac{h}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{1{,}225\ \text{m}}{1/2} = 2{,}45\ \text{m}$$

La aceleración con la que la bola lo recorre tiene de valor:

$$a_1 = g \cdot \text{sen}\ \alpha = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{sen}\ 30° = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \frac{1}{2} = 4{,}9\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Por tanto, el tiempo que invierte la bola en recorrer dicho espacio será:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}45\ \text{m}}{4{,}9\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 1\ \text{s}$$

Cuando la bola llega al punto B, tras deslizarse a lo largo del primer raíl, su velocidad es:

$$v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 1{,}225\ \text{m}} = 4{,}9\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Dado que en el montaje reseñado no existe rozamiento, la bola, al llegar al punto B, prosigue su movimiento a lo largo del segundo raíl, hasta llegar a un punto C, que, de acuerdo con el principio de conservación de la energía mecánica, estará situado a una misma altura que el A (h = 1,225 m). En recorrer el espacio BC la bola emplea un tiempo:

$$t_2 = \frac{v_C - v_B}{a_2} = \frac{0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} - 4{,}9\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{-9{,}8\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{s}$$

Análogamente, los tiempos empleados por la bola en los recorridos de retroceso CB y BA son, respectivamente:

$$t_2' = \frac{\sqrt{3}}{3}\ s \quad y \quad t_1' = 1\ s$$

Por lo tanto, el período de oscilación de la bola valdrá:

$$T = t_1 + t_2 + t_1' + t_2' = \left(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\ s = \boxed{3{,}155\ s}$$

10.30. *Una masa puntual de 50 g está suspendida de un hilo inextensible y sin masa apreciable, de 2 m de longitud. Se hace oscilar a dicha masa puntual, de manera que en el momento de su máxima elongación se eleva 2,5 cm por encima del plano horizontal que pasa por su posición de equilibrio.*

a) Calcular el período de las oscilaciones que ejecuta la masa puntual.
b) Hallar la velocidad y la energía cinética de la masa puntual cuando pasa por la vertical.
c) Determinar la tensión del hilo en dicha posición.
d) En el momento en que el hilo pasa por la vertical tropieza con un clavo, situado 1,5 m por debajo del punto de suspensión y dispuesto perpendicularmente al plano de oscilación del péndulo. Describir el movimiento de la masa puntual a partir de este momento.
e) Calcular la relación entre las tensiones del hilo cuando el nuevo péndulo alcanza sus posiciones extremas.
f) Hallar el período del péndulo descrito en d).

Solución:

a)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{9{,}8\ m \cdot s^{-2}}} = \boxed{2{,}84\ s}$$

b) Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica a la masa puntual cuando se encuentra en sus posiciones de equilibrio y de máxima elongación, tenemos:

$$mgh = \frac{1}{2}\ mv^2$$

siendo m el valor de la masa puntual, h la altura a la que se eleva en el momento de su máxima elongación y v su velocidad cuando pasa por la vertical. De la ecuación anterior se deduce:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\ m \cdot s^{-2} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ m} = \boxed{0{,}7\ m \cdot s^{-1}}$$

La energía cinética de la masa puntual valdrá:

$$E_c = \frac{1}{2}\ mv^2 = \frac{1}{2}\ 5 \cdot 10^{-2}\ kg \cdot (0{,}7\ m \cdot s^{-1})^2 = \boxed{1{,}225 \cdot 10^{-2}\ J}$$

c) Cuando la masa puntual pasa por la vertical, se cumple que la tensión del hilo es igual a la suma del peso y de la fuerza centrífuga o, lo que es lo mismo, la fuerza resultante de la tensión del hilo y del peso de la masa puntual es quien origina la aceleración centrípeta del movimiento. En consecuencia:

$$T = P + F_c = m \cdot g + \frac{m \cdot v^2}{l} = m \cdot \left(g + \frac{v^2}{l}\right) =$$

$$= 5 \cdot 10^{-2}\ \text{kg} \cdot \left(9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} + \frac{(0{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2\ \text{m}}\right) = \boxed{0{,}5\ \text{N}}$$

d) **De acuerdo con el principio de conservación de la energía mecánica, la masa puntual alcanzará la misma altura a ambos lados, describiendo un movimiento armónico simple, de período igual a la suma de dos semiperíodos: uno correspondiente al movimiento con respecto al punto de suspensión y el otro con respecto al clavo.**

e) Las tensiones del hilo cuando el péndulo alcanza sus posiciones extremas son (fig. 10.4):

$$T = mg \cos \alpha \quad [1]; \quad T' = mg \cos \alpha' \quad [2]$$

Dividiendo entre sí las expresiones [1] y [2], tenemos:

$$\frac{T}{T'} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = \frac{1{,}975/2}{0{,}475/0{,}5} = \frac{79}{76}$$

$$\boxed{\frac{T}{T'} = \frac{79}{76}}$$

f) Ya que el período de un péndulo de 0,5 m de longitud viene dado por la expresión:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}5\ \text{m}}{9{,}8\ \text{ms}^{-2}}} = 1{,}42\ \text{s}$$

el período del péndulo descrito en d) será:

$$T'' = \frac{T}{4} + \frac{T'}{4} + \frac{T'}{4} + \frac{T}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ (T + T') = \frac{1}{2}\ (2{,}83\ \text{s} + 1{,}42\ \text{s}) = \boxed{2{,}13\ \text{s}}$$

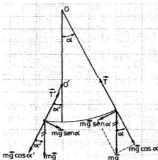


Fig. 10.4

11. CALOR Y TEMPERATURA. PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

FORMULARIO-RESUMEN

EQUIVALENCIA CALOR-TRABAJO

$$\boxed{W = J \cdot Q = \frac{1}{A} \cdot Q} \quad \begin{cases} J = 4{,}1855 \text{ J/cal} \\ A = 0{,}2389 \text{ cal/J} \end{cases}$$

ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA CALORIMETRÍA

$$\boxed{Q = m \cdot c \cdot \Delta t}$$

- Q = calor desprendido o absorbido.
- m = masa de sustancia.
- c = calor específico de la sustancia.
- Δt = variación de temperatura.

RELACIÓN DE MAYER

$$\boxed{C_p = C_v + R}$$

- C_p = calor específico del gas a presión constante.
- C_v = calor específico del gas a volumen constante.
- R = constante de los gases.
- $\left(R = 8{,}3144 \dfrac{J}{K \cdot mol} = 1{,}986 \dfrac{cal}{K \cdot mol}\right)$.

γ (coeficiente adiabático) = C_p/C_v

	C_p	C_v	γ
Gas monoatómico	5 cal/K · mol	3 cal/K · mol	1,67
Gas diatómico	7 cal/K · mol	5 cal/K · mol	1,40

EQUILIBRIO TÉRMICO

$$c = \frac{(m_1 + m_c) \cdot (t - t_1)}{m_2 \cdot (t_2 - t)}$$

- c = calor específico del sólido.
- m_1 = masa de agua.
- m_2 = masa del sólido.
- m_c = equivalente en agua del calorímetro.
- t_1 = temperatura inicial del agua.
- t_2 = temperatura inicial del sólido.
- t = temperatura de equilibrio.

RELACIÓN ENTRE LAS ESCALAS TERMOMÉTRICAS

$$\frac{C}{100} = \frac{F - 32}{180} = \frac{T - 273}{100}$$

- C = temperatura en grados centígrados.
- F = temperatura en grados Fahrenheit.
- T = temperatura en grados absolutos (Kelvin).

PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

$$\Delta U = Q + W$$

- ΔU = variación de energía interna.
- Q = calor.
- W = trabajo mecánico.

CRITERIO DE SIGNOS

	Calor		Trabajo	
	Absorbido	Desprendido	Realizado por el sistema	Realizado contra el sistema
Criterio termodinámico	+	−	+	−
Criterio de la IUPAC	+	−	−	+

Entalpía: $H = U + P \cdot V$

Calores de reacción: $Q_p = \Delta H$, $Q_v = \Delta U$ → $Q_p = Q_v + R \cdot T \cdot \Delta n$

11. CALOR Y TEMPERATURA. PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

11.1. *¿A qué temperatura, expresada en grados centígrados, la lectura en la escala Fahrenheit supera en 500 °F a la lectura en la escala centígrada?*

Solución: La relación entre la escala centígrada y la Fahrenheit es:

$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}$$

Como F = C + 500, sustituyendo, resulta:

$$\frac{C}{5} = \frac{C + 500 - 32}{9}$$

de donde:

$$\boxed{C = 585\ °C}$$

11.2. *¿Qué temperatura se expresará en grados Fahrenheit con valor triple del correspondiente a grados centígrados?*

Solución: En este caso, C = F/3.
Por tanto:

$$\frac{F/3}{5} = \frac{F - 32}{9}$$

de donde se obtiene:

$$\boxed{F = 80\ °F = 26{,}67\ °C}$$

11.3. *Una vez leemos que la temperatura de cierta ciudad es de 72°. ¿Qué se puede deducir al respecto?*

Solución: Estará expresada en grados Fahrenheit. Su equivalente en grados centígrados será:

$$\frac{C}{5} = \frac{72 - 32}{9}$$

de donde:

$$\boxed{C = 22{,}2\ °C}$$

11.4. ***¿Qué temperatura vendrá expresada por el mismo número en la escala centígrada y en la escala Fahrenheit?***

Solución: Según la relación de equivalencia entre ambas escalas, tendremos:

$$\frac{x - 32}{5} = \frac{x}{5}$$

de donde:

$$\boxed{x = -40\ °C = -40\ °F}$$

11.5. ***¿Existe límite superior de temperaturas? ¿Y límite inferior?***

Solución: No existe límite superior de temperaturas, por tratarse de una magnitud fundamental. Sin embargo, sí existe un límite inferior, que es el de −273,16 °C, equivalente a 0 K.

11.6. ***¿Por qué razón se suele elegir el mercurio como líquido termométrico?***

Solución: Las razones por las que se elige el mercurio como líquido termométrico son las siguientes:

a) Su coeficiente de dilatación constante y muy elevado.
b) Su calor específico muy pequeño.
c) Su buena conductividad térmica.
d) Su punto de ebullición muy elevado.

11.7. ***¿Sirve el modelo del «calórico» para explicar el intercambio de calor entre dos cuerpos? Utilícese para el caso del calorímetro de mezclas.***

Solución: Efectivamente. Al suponer que el calor era «como un fluido» que pasaba de los cuerpos calientes a los fríos, de modo que la cantidad de calórico que cedía el cuerpo caliente era igual a la que ganaba el frío, se explicaba plenamente este fenómeno. Precisamente en el calorímetro de mezclas hacemos uso de este razonamiento, con la modificación de que sabemos que el calor no es un «fluido» raro, sino una **energía.**

11.8. ***¿Hay casos en que al suministrar calor a un cuerpo no se eleva su temperatura?***

Solución: El ejemplo más conocido es el de los cambios de estado de fusión y ebullición; en este caso el calor suministrado al cuerpo se emplea en vencer las fuerzas de cohesión entre las moléculas, pero sin elevar la temperatura.

Otro ejemplo sería el de una barra calentada por un extremo, la cual, transcurrido cierto tiempo, alcanza un equilibrio térmico, de forma que pierde energía calorífica por convección o radiación al mismo ritmo que la recibe.

11.9. ***¿Es posible que un cuerpo tenga mucha energía térmica y, sin embargo, esté frío? Diseñar un modelo mecánico y otro hidráulico que lo explique.***

Solución: Efectivamente; puesto que el calor es la energía total del cuerpo, debida fundamentalmente al movimiento de sus moléculas. Por tanto, depende de la energía media de cada molécula (temperatura) y del número de moléculas que tenga el cuerpo (y, por tanto, de su masa).

Por consiguiente, un cuerpo frío (p. ej., el mar) puede tener mucha energía térmica (dada su enorme masa), del mismo modo que un depósito puede contener gran cantidad de agua y, sin embargo, alcanzar un nivel muy pequeño.

11.10. ***a) Tenemos distintos cuerpos de igual masa calentados por un mismo foco calorífico. ¿Cuál se calentará antes?***
b) ¿Qué cantidad de calor se precisa comunicar a 5 dm³ de agua para que su temperatura aumente 25 °C?

Solución:

a) Según la ecuación fundamental de la calorimetría:

$$Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1)$$

se calentará antes (mayor incremento de temperatura) el de menor calor específico.

b) Apliquemos la ecuación fundamental de la calorimetría, recordando que 5 dm³ de agua equivalen a 5 kg; es decir, a 5 000 g:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t = 5\,000 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot 25\ {}^\circ\text{C} = 125 \cdot 10^3 \text{ cal} = \boxed{\mathbf{125\ kcal}}$$

11.11. ***Citar cuatro ejemplos donde se observe que el calor se transforma en otro tipo de energía y viceversa.***

Solución:

a) Calor en otra forma de energía:
- Energía calorífica en energía mecánica: motor de explosión, máquina de vapor, turbina de vapor.
- Energía calorífica en energía radiante: alumbrado de incandescencia.
- Energía calorífica en mecánica y eléctrica: centrales térmicas.
- Energía calorífica en energía eléctrica: efecto termoiónico.

b) Estos mismos ejemplos, a la inversa, sirven para ilustrar la transformación de otras formas de energía en calor.

11.12. ***¿Qué cantidad de calor será necesario comunicar a medio litro de agua para que su temperatura pase de 25 °C a 75 °C?***

Solución: Como 0,5 litros de agua equivalen a 500 g, resulta:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t = 500 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (75 - 25)\ {}^\circ\text{C} = \boxed{\mathbf{25\ 000\ cal}}$$

11.13. *El calor específico de los metales es del orden de las centésimas, mientras que el del agua es 1 cal/g · °C. Si se comunican 1 000 calorías a 100 gramos de agua y otras tantas a 100 gramos de aluminio, ¿en cuál de los dos casos se elevará más la temperatura?*

Solución: Se calentará más el aluminio por ser de menor calor específico. Véase el razonamiento seguido en la explicación de la cuestión número 10 de este capítulo.

11.14. *En tres recipientes iguales se echa la misma cantidad (320 gramos) de agua, cloroformo y glicerina. Las tres sustancias están a la misma temperatura inicial (10 °C) y se pretende elevar esa temperatura en cada una de las sustancias a 60 °C. Para ello es preciso comunicar al recipiente que contiene el agua, 18 kcal; al de la glicerina, 11,28 kcal, y al del cloroformo, 5,74 kcal. Sabiendo que el calor específico del agua es 1 cal/g · °C, calcular los correspondientes a la glicerina y al cloroformo.*

Solución: Calculemos, en primer lugar, la cantidad de calor, Q_r, necesaria para calentar el recipiente. Considerando el caso del agua, tenemos:

$$18\ 000 \text{ cal} = Q_r + 320 \text{ g} \cdot 1 \ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot (60 - 10)\ °\text{C}$$

de donde:

$$Q_r = 2\ 000 \text{ cal}$$

Aplicando a la glicerina la ecuación fundamental de la calorimetría:

$$11\ 280 \text{ cal} = 2\ 000 \text{ cal} + 320 \text{ g} \cdot c_{(\text{glicerina})} \cdot (60 - 10)\ °\text{C}$$

resultando:

$$\boxed{c_{(\text{glicerina})} = \mathbf{0{,}58\ cal/g \cdot °C}}$$

Haciendo lo mismo para el cloroformo:

$$5\ 740 \text{ cal} = 2\ 000 \text{ cal} + 320 \text{ g} \cdot c_{(\text{cloroformo})} \cdot (60 - 10)\ °\text{C}$$

de donde se obtiene:

$$\boxed{c_{(\text{cloroformo})} = \mathbf{0{,}234\ cal/g \cdot °C}}$$

11.15. *¿Qué cantidad de calor absorbió una masa de 4 gramos de cinc al pasar de 20 °C a 180 °C? Si ese calor se hubiera suministrado a una masa de plomo de 35 g, ¿cuánto habría aumentado su temperatura? Los calores específicos del cinc y del plomo son, respectivamente, 0,093 cal/g · °C y 0,31 cal/g · °C.*

Solución: En el caso del cinc:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t = 4 \text{ g} \cdot 0{,}093 \ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot (180 - 20)\ °\text{C} = \boxed{\mathbf{59{,}52\ cal}}$$

Si suministramos esta misma cantidad de calor a 35 g de plomo, el aumento de temperatura que experimenta es:

$$\Delta t = \frac{Q}{m \cdot c} = \frac{59{,}52 \text{ cal}}{35 \text{ g} \cdot 0{,}31 \dfrac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}}} = \boxed{5{,}5\ {}^\circ\text{C}}$$

11.16. *La temperatura de un cuerpo, expresada en grados absolutos, es 298 K. Calcular esa temperatura en grados centígrados y Fahrenheit. Si el calor específico de ese cuerpo es 1 cal/g · °C, ¿de qué sustancia se trata? ¿Qué cantidad de calor será preciso suministrarle para aumentar su temperatura 10 °C?*

Solución: La temperatura de 298 K, expresada en grados centígrados, es:

$$C = T - 273 = 298 - 273 = \boxed{25\ {}^\circ\text{C}}$$

Para convertir esta temperatura en grados Fahrenheit emplearemos la relación:

$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$\frac{25}{5} = \frac{F - 32}{9}$$

de donde:

$$\boxed{F = 77\ {}^\circ\text{F}}$$

Si el calor específico de una sustancia es 1 cal/g · °C, se trata del **agua.**

La cantidad de calor que será preciso comunicar al agua para elevar su temperatura 10 °C es:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t = m_{(g)} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot 10\ {}^\circ\text{C} = \boxed{\textbf{10 m calorías}}$$

(siendo m la masa en gramos del agua).

11.17. *¿Qué cantidad de calor será preciso suministrar a 0,25 kg de una sustancia, de calor específico 0.2 cal/g · °C, para que su temperatura pase de 5 °C a 59 °F?*

Solución: La temperatura de 59 °F equivale a 15 °C. Por consiguiente, la cantidad de calor necesario será:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t = 250 \text{ g} \cdot 0{,}2 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (15 - 5)\ {}^\circ\text{C} = \boxed{\textbf{500 cal}}$$

11.18. ***El calor específico del cobre varía con la temperatura de acuerdo con la relación:***

$$c = 0{,}092 + 2{,}125 \cdot 10^{-5}\, t$$

(la temperatura t viene expresada en °C y el calor específico en cal/g · °C). Calcular:

a) El calor específico del cobre a 50 °C.
b) El calor específico medio en el intervalo 0-100 °C.

Solución:

a) Para t = 50 °C:

$$c = 0{,}092 + 2{,}125 \cdot 10^{-5} \cdot 50 = \boxed{0{,}093 \text{ cal/g} \cdot {}^\circ\text{C}}$$

b) Como: c_M (calor específico medio) $= \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{Q}{t_2 - t_1}$

y: c_v (calor específico verdadero) $= \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{dQ}{dt}$

resulta:

$$c_M \cdot (t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} c_v \cdot dt$$

de donde:

$$c_M = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} c_v \cdot dt = \frac{1}{100} \int_0^{100} (0{,}092 + 2{,}125 \cdot 10^{-5}\, t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{100} \cdot \left[0{,}092\, t + 2{,}125 \cdot 10^{-5} \frac{t^2}{2} \right]_0^{100} = \boxed{0{,}093062 \text{ cal/g} \cdot {}^\circ\text{C}}$$

11.19. ***Encontrar una relación lineal que ligue el calor específico del hierro con la temperatura, sabiendo que a 100 °C, c = 0,1124 cal/g · °C y que su valor medio en el intervalo 0-100 °C es 0,1089 cal/g · °C.***

Solución: A partir de los conceptos de calor específico medio y verdadero, se deduce que:

$$c_v = c_M + \frac{dc_M}{dt} \cdot t$$

Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} c_M &= a + bt \\ c_v &= a + 2bt \end{aligned}\right\}$$

De aquí resulta:

$$b = \frac{c_v - c_M}{t} = \frac{0{,}1124 - 0{,}1089}{100} = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$$

$$a = c_M - bt = 0{,}1089 - 3{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 100 = 0{,}1054$$

Por tanto:

$$c_v = a + 2bt = 0{,}1054 + 2 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-5}\ t = 0{,}1054 + 7 \cdot 10^{-5}\ t$$

$$\boxed{\mathbf{c = 0{,}1054 + 7 \cdot 10^{-5}\ t}}$$

11.20. ***La figura 11.1 representa el siguiente fenómeno: En un recipiente que contiene 300 g de agua a 10 °C se añaden 200 g de agua a 60 °C. Calcular:***

a) ***La temperatura de equilibrio.***
b) ***El calor cedido por el cuerpo caliente.***
c) ***El calor ganado por el cuerpo frío.***

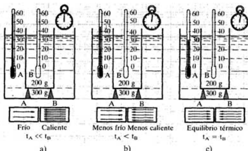


Fig. 11.1

Solución:

a) Calor ganado por el cuerpo frío:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t = 300\ \text{g} \cdot 1\ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot (t - 10)\ °\text{C}$$

Calor cedido por el cuerpo caliente:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t = 200\ \text{g} \cdot 1\ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot (60 - t)\ °\text{C}$$

Aplicando el principio de la igualdad de los intercambios de calor:

$$300\ \text{g} \cdot 1\ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot (t - 10)\ °\text{C} = 200\ \text{g} \cdot 1\ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot (60 - t)\ °\text{C}$$

de donde:

$$\boxed{t = 30\ °C}$$

b) Calor cedido por el cuerpo caliente:

$$Q = 200\ g \cdot 1\ \frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (60 - 30)\ °C = \boxed{6\ 000\ cal}$$

c) Calor ganado por el cuerpo frío:

$$Q = 300\ g \cdot 1\ \frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (30 - 10)\ °C = \boxed{6\ 000\ cal}$$

11.21. ***Una bañera contine 50 litros de agua a 25 °C. ¿Cuánto tiempo será preciso abrir el grifo de agua caliente para que la temperatura final del agua sea 40 °C? (Temperatura del agua caliente: 80 °C. Caudal del grifo: 5 l/s.)***

Solución: Calcularemos previamente la cantidad de agua caliente que se necesita. Basta aplicar el principio de igualdad de los intercambios de calor:

$$5 \cdot 10^4\ g \cdot 1\ \frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (40 - 25)\ °C = m \cdot 1\ \frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (80 - 40)\ °C$$

de donde:

$$m = 18\ 750\ g = 18\ 750\ g \cdot \frac{1\ l}{1\ 000\ g} = 18{,}75\ l$$

Por tanto, el tiempo de funcionamiento del grifo de agua caliente será:

$$t = \frac{18{,}75\ l}{5\ l/s} = \boxed{3{,}75\ s}$$

11.22. ***En un calorímetro que contiene 400 g de agua se introduce un trozo de metal de 50 g a 80 °C. La temperatura inicial del agua es de 10 °C y la de equilibrio de la mezcla, 12 °C. Calcular el calor específico del metal. Se supone que el calorímetro no absorbe calor.***

Solución: Aplicando la expresión:

$$c = \frac{(m_1 + m_c) \cdot (t - t_1)}{m_2 \cdot (t_2 - t)}$$

se tiene:

$$c = \frac{(400 + 0)\ g \cdot (12 - 10)\ °C \cdot 1\ \dfrac{cal}{g \cdot °C}}{50\ g \cdot (80 - 12)\ °C} = \boxed{0{,}235\ \frac{cal}{g \cdot °C}}$$

11.23. ***Calcular la temperatura final de una mezcla de 10 litros y 50 litros de agua, cuyas temperaturas son 80 °C y 20 °C, respectivamente.***

Solución: Llamemos t a la temperatura de la mezcla. El calor cedido por el agua caliente hasta alcanzar el equilibrio es:

$$Q_1 = 10\,000 \text{ g} \cdot 1 \, \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (80 - t)\,{}^\circ\text{C} = 10\,000 \cdot (80 - t) \text{ cal}$$

y el calor ganado por el agua fría:

$$Q_2 = 50\,000 \text{ g} \cdot 1 \, \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (t - 20)\,{}^\circ\text{C} = 50\,000 \cdot (t - 20) \text{ cal}$$

Igualando ambas expresiones, se obtiene para t el valor:

$$\boxed{t = 30\,{}^\circ\text{C}}$$

11.24. ***Si se ponen en la bañera 50 litros de agua a 70 °C, ¿cuántos litros de agua a 10 °C tendremos que añadir para que toda la mezcla quede a 40 °C? Explicar razonadamente el proceso seguido.***

Solución: El calor cedido por el agua caliente es:

$$Q_1 = 50\,000 \text{ g} \cdot 1 \, \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (70 - 40)\,{}^\circ\text{C} = 15 \cdot 10^5 \text{ cal}$$

y el calor ganado por el agua fría:

$$Q_2 = m \cdot 1 \, \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (40 - 10)\,{}^\circ\text{C} = 30 \cdot m \, \frac{\text{cal}}{\text{g}}$$

Igualando ambas expresiones:

$$15 \cdot 10^5 \text{ cal} = 30 \cdot m \, \frac{\text{cal}}{\text{g}}$$

de donde:

$$\boxed{m = 50\,000 \text{ g} = 50 \text{ litros}}$$

11.25. ***En un calorímetro que contiene 400 g de agua se introduce un trozo de metal de 50 g a 80 °C. La temperatura inicial del agua es de 10 °C y la de equilibrio de la mezcla 12 °C. Calcular el calor específico del metal. Se supone que el calorímetro no absorbe calor.***

Solución: El calor cedido por el metal es:

$$Q_1 = 50 \text{ g} \cdot c \cdot (80 - 12)\,{}^\circ\text{C} = 3\,400 \cdot c \; (\text{g} \cdot {}^\circ\text{C})$$

y el calor ganado por el agua:

$$Q_2 = 400 \text{ g} \cdot 1 \, \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (12 - 10)\,{}^\circ\text{C} = 800 \text{ cal}$$

Igualando ambas expresiones, se tiene:

$$3\,400 \cdot c\ (g \cdot °C) = 800\ cal$$

de donde:

$$\boxed{c = 0{,}235\ cal/g \cdot °C}$$

11.26. ***Un calorímetro, de equivalente en agua 10 g, contiene agua a 25 °C. Se introduce en él un cuerpo de 100 gramos de masa y calor específico 0,05 cal/g · °C, a la temperatura de 50 °C. La temperatura de equilibrio es 30 °C. ¿Qué cantidad de agua contenía el calorímetro?***

Solución: El calor cedido por el cuerpo es:

$$Q_1 = 100\ g \cdot 0{,}05\ \frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (50 - 30)\ °C = 100\ cal$$

y el absorbido por el agua y el calorímetro:

$$Q_2 = (m + 10)\ g \cdot 1\ \frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (30 - 25)\ °C = 5 \cdot (m + 10)\ cal$$

Como $Q_1 = Q_2$, se tiene:

$$100\ cal = 5 \cdot (m + 10)\ cal$$

de donde:

$$\boxed{m = 10\ g}$$

11.27. ***La masa de un calorímetro de cobre es de 100 gramos y la del agua contenida en él, cuya temperatura es de 10 °C, es 200 gramos. Se introducen en el calorímetro 200 gramos de cobre a 100 °C. ¿Cuál será la temperatura final de la mezcla? (El calor específico del cobre es 0,093 cal/g · °C.)***

Solución: Llamemos t a la temperatura de equilibrio. El calor cedido por el cobre es:

$$Q_1 = 200\ g \cdot 0{,}093\ \frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (100 - t)\ °C = 18{,}6 \cdot (100 - t)\ cal$$

y el ganado por el agua y el calorímetro:

$$Q_2 = 100\ g \cdot 0{,}093\ \frac{cal}{g \cdot °C} + 200\ g \cdot 1\ \frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (t - 10)\ °C =$$

$$= 209{,}3 \cdot (t - 10)\ cal$$

Igualando ambas expresiones, se tiene:

$$18{,}6 \cdot (100 - t) \text{ cal} = 209{,}3 \cdot (t - 10) \text{ cal}$$

de donde:

$$\boxed{t = 17{,}3\ °C}$$

11.28. ***Un trozo de cobre de 120 g y calor específico 0,093 cal/g · °C, a la temperatura de 100 °C, se sumerge en un recipiente metálico, de masa 0,300 kg, que contiene 200 cm³ de agua a la temperatura de 20 °C. La temperatura de equilibrio de la mezcla es 23 °C. Calcular el calor específico del metal que constituye el recipiente.***

Solución: El calor cedido por el cobre es:

$$Q_1 = 120 \text{ g} \cdot 0{,}093 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot (100 - 23)\ °\text{C} = 859{,}32 \text{ cal}$$

mientras que el absorbido por el agua es:

$$Q_2 = 200 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot (23 - 20)\ °\text{C} = 600 \text{ cal}$$

y el ganado por el recipiente:

$$Q_3 = 300 \text{ g} \cdot c \cdot (23 - 20)\ °\text{C} = 900 \cdot c \ (\text{g} \cdot °\text{C})$$

Igualando el calor cedido por el cobre con el ganado por el agua y el recipiente, tenemos ($Q_1 = Q_2 + Q_3$):

$$859{,}32 \text{ cal} = 600 \text{ cal} + 900 \cdot c \ (\text{g} \cdot °\text{C})$$

de donde:

$$\boxed{c = 0{,}288 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}}}$$

11.29. ***Se mezclan 20 gramos de agua a 40 °C con 15 gramos de alcohol etílico a 30 °C. Sabiendo que el calor específico del alcohol es 0,6 cal/g · °C, ¿cuál habrá sido la temperatura final de la mezcla?***

Solución: Llamemos t a la temperatura final de la mezcla. Teniendo en cuenta que al alcanzarse el equilibrio térmico, el calor cedido por el agua ha de ser igual al absorbido por el alcohol, resulta:

$$20 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot (40 - t)\ °\text{C} = 15 \text{ g} \cdot 0{,}6 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot (t - 30)\ °\text{C}$$

La resolución de esta ecuación conduce a: $\boxed{t = 36{,}9\ °C}$

11.30. *Un trozo de plomo de masa 200 g (calor específico del plomo: 0,03 cal/g · °C) se calienta a 90 °C y se echa en 500 gramos de agua calentados a 20 °C. Determinar la temperatura final del plomo y del agua.*

Solución: Sea t la temperatura final. De acuerdo con el principio de la igualdad de los intercambios de calor, se cumplirá que:

$$200 \text{ g} \cdot 0{,}03 \ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (90 - t) \ {}^\circ\text{C} = 500 \text{ g} \cdot 1 \ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (t - 20) \ {}^\circ\text{C}$$

de donde:

$$\boxed{t = 20{,}83 \ {}^\circ\text{C}}$$

11.31. *Disponemos de tres líquidos distintos y miscibles, A, B y C, cuyas masas y temperaturas respectivas son:*

Líquido	*Masa*	*Temperatura*
A	*100 g*	*20 °C*
B	*200 g*	*15 °C*
C	*300 g*	*6 °C*

Al mezclar A y B se obtiene una temperatura de equilibrio de 17 °C, mientras que al mezclar B y C la temperatura resultante es de 10 °C. ¿Qué temperatura se obtendrá al mezclar A y C?

Solución: Teniendo en cuenta las tres mezclas del problema, designando por c_A, c_B y c_C los calores específicos de los líquidos A, B y C, respectivamente, y por t la temperatura final de la mezcla de A y C, se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 100 \text{ g} \cdot c_A \ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (20 - 17) \ {}^\circ\text{C} &= 200 \text{ g} \cdot c_B \ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (17 - 15) \ {}^\circ\text{C} \\ 200 \text{ g} \cdot c_B \ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (15 - 10) \ {}^\circ\text{C} &= 300 \text{ g} \cdot c_C \ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (10 - 6) \ {}^\circ\text{C} \\ 100 \text{ g} \cdot c_A \ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (20 - t) \ {}^\circ\text{C} &= 300 \text{ g} \cdot c_C \ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (t - 6) \ {}^\circ\text{C} \end{aligned}\right\}$$

que, por simplificación, queda reducido a:

$$\left.\begin{aligned} 3 \ c_A &= 4 \ c_B \\ 5 \ c_B &= 6 \ c_C \\ c_A \cdot (20 - t) &= 3 \ c_C \cdot (t - 6) \end{aligned}\right\}$$

La resolución de este sistema conduce a:

$$\boxed{t = 10{,}87 \ {}^\circ\text{C}}$$

11.32. *500 gramos de una aleación de hierro y cobre, calentada previamente a 100 °C, se introduce en un calorímetro que contiene 2 litros de agua a 20 °C, alcanzándose al final una temperatura de 21,7 °C. El equivalente en agua del calorímetro es 300 g. Hallar la composición de la aleación. (Los calores específicos del hierro y del cobre son, respectivamente, 0,11 cal/g · °C y 0,093 cal/g · °C.)*

Solución: Designemos por x e y, respectivamente, las masas de hierro y cobre contenidas en la aleación.

Aplicando el principio de la igualdad de los intercambios de calor, tenemos:

$$x\ \text{g} \cdot 0{,}11\ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (100 - 21{,}7)\ {}^\circ\text{C} + y\ \text{g} \cdot 0.093\ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot$$

$$\cdot\ (100 - 21{,}7)\ {}^\circ\text{C} = (2\ 000 + 300)\ \text{g} \cdot 1\ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (21{,}7 - 20)\ {}^\circ\text{C} \quad [1]$$

Por otra parte, como la masa de la aleación es 500 g:

$$x + y = 500\ \text{g} \quad [2]$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones [1] y [2], se obtiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{x = 200\ g\ de\ Fe} \\ \mathbf{y = 300\ g\ de\ Cu} \end{array}}$$

11.33. *El físico alemán Julius Robert Mayer (1814-1878) observó que el agua del mar experimentaba un aumento de temperatura después de una tormenta. ¿Qué explicación se puede dar a este fenómeno?*

Solución: Al agitarse el agua del mar las moléculas que lo constituyen aumentan su energía. De esta forma el sistema posee más calor y, consecuentemente, más temperatura.

11.34. *Basándose en el primer principio de la Termodinámica, ¿es correcto afirmar la posibilidad de que un barco navegue consumiendo exclusivamente la energía calorífica el mar?*

Solución: Sí, puesto que el primer principio —como caso de aplicación del principio general de conservación de la energía— la única condición que exige es que la cantidad total de energía se mantenga constante. Es decir, en teoría con 0,24 calorías se podría obtener 1 julio.

11.35. *Un automóvil de 1 000 kg de masa marcha a una velocidad de 30 m/s. ¿Cuántas kilocalorías se desarrollan en los frenos al detenerse el coche? Si ese calor se comunicara a 1 m³ de agua, ¿cuánto se elevaría su temperatura?*

Solución: La energía cinética del coche es:

$$E_c = \frac{1}{2}\ m \cdot v^2 = \frac{1}{2}\ 1\ 000\ \text{kg} \cdot (30\ \text{m/s})^2 = 450\ 000\ \text{J}$$

Esta energía equivale a una cantidad de calor:

$$Q = 450\ 000\ J \cdot \frac{0{,}24\ cal}{1\ J} = 108\ 000\ cal = \boxed{\mathbf{108\ kcal}}$$

La elevación de temperatura que experimenta 1 $m^3 = 10^6$ g de agua con esta cantidad de calor será:

$$\Delta t = \frac{Q}{m \cdot c} = \frac{108\ 000\ cal}{10^6\ g \cdot 1\ \frac{cal}{g \cdot °C}} = \boxed{\mathbf{0{,}108\ °C}}$$

11.36. ***El desnivel de un salto de agua es de 213 metros, existiendo entre el agua del fondo y la de arriba una diferencia térmica de 0,50 °C. Calcular con estos datos el valor del equivalente mecánico del calor.***

Solución: Consideremos m kg de agua que caen desde una altura de 213 metros y que, por consiguiente, pierden una energía potencial:

$$E_p = W = m \cdot g \cdot h = m\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 213\ m = 2\ 087{,}4 \cdot m\ (J)$$

Esta energía corresponde a una cantidad de calor de:

$$Q = m\ kg \cdot \frac{1\ 000\ g}{1\ kg} \cdot 1\ \frac{cal}{g \cdot °C} \cdot 0{,}50\ °C = 500\ m\ (cal)$$

Por tanto, el equivalente mecánico del calor valdrá:

$$J = \frac{W}{Q} = \frac{2\ 087{,}4\ m\ (J)}{500\ m\ (cal)} = \boxed{\mathbf{4{,}17\ J/cal}}$$

11.37. ***Un calorímetro con un equivalente total en agua de 60 gramos se calienta eléctricamente con una corriente de 4 A, que atraviesa una resistencia entre cuyos extremos existe una diferencia de potencial de 12 V. Al cabo de 1 min y 23 s se observa un incremento de temperatura de 14 °C. Hallar el valor del equivalente mecánico del calor, sabiendo que las pérdidas de calor por radiación se elevan a 120 calorías.***

Solución: La energía eléctrica suministrada al calorímetro es:

$$W = I \cdot (V_1 - V_2) \cdot t = 4\ A \cdot 12\ V \cdot 83\ s = 3\ 984\ J$$

Esta energía equivale a una cantidad de calor:

$$Q = 60\ g \cdot 1\ \frac{cal}{g \cdot °C} \cdot 14\ °C + 120\ cal = 960\ cal$$

Por consiguiente, el valor del equivalente mecánico del calor, deducido de esta experiencia, será:

$$J = \frac{W}{Q} = \frac{3\,984 \text{ J}}{960 \text{ cal}} = \boxed{4{,}15 \text{ J/cal}}$$

11.38. ***Cierto día de lluvia las gotas de agua llegan al suelo con una velocidad de 15 m/s. ¿Qué aumento de temperatura experimentan después del choque?***

Solución: Supongamos una gota de agua de masa m kg. Su energía cinética, al llegar al suelo, es:

$$E_c = \frac{1}{2} \text{ m} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \text{ m kg} \cdot (15 \text{ m/s})^2 = 112{,}5 \cdot \text{m (J)}$$

Esta energía, convertida en calor, equivale a:

$$Q = 112{,}5 \cdot \text{m (J)} \cdot \frac{0{,}24 \text{ cal}}{1 \text{ J}} = 27 \cdot \text{m (cal)}$$

que provocarán un aumento de temperatura de:

$$\Delta t = \frac{Q}{m \cdot c} = \frac{27 \cdot \text{m (cal)}}{\text{m kg} \cdot \dfrac{1\,000 \text{ g}}{1 \text{ kg}} \cdot 1 \dfrac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}}} = \boxed{0{,}027\ {}^\circ\text{C}}$$

11.39. ***Un sistema absorbe 500 calorías y realiza un trabajo de 40 kgm. ¿Cuánto aumentó su energía interna?***

Solución: Previamente hemos de expresar todos los datos en las mismas unidades:

$$Q = 500 \text{ cal} = 500 \text{ cal} \cdot \frac{4{,}1855 \text{ J}}{1 \text{ cal}} = 2\,092{,}75 \text{ J}$$

$$W = 40 \text{ kgm} = 40 \text{ kgm} \cdot \frac{9{,}8 \text{ J}}{1 \text{ kgm}} = 392 \text{ J} = 94 \text{ cal}$$

De acuerdo con el primer principio de la Termodinámica:

$$U = Q + W$$

Aplicando el criterio de signos de la IUPAC:

$$\Delta U = 2\,092{,}75 \text{ J} - 392 \text{ J} = \boxed{1\,700 \text{ J}}$$

O también:

$$\Delta U = 500 \text{ cal} - 94 \text{ cal} = \boxed{406 \text{ cal}}$$

11.40. ***Se comunica a un sistema una cantidad de calor de 800 calorías y el sistema realiza un trabajo de 2 kJ. ¿Cuál es la variación de energía interna que experimenta?***

Solución: Como:

$$Q = 800 \text{ cal} = 800 \text{ cal} \cdot \frac{4{,}1855 \text{ J}}{1 \text{ cal}} = 3\,348{,}4 \text{ J}$$

y $W = -2\,000$ J, resulta:

$$U = Q + W = 3\,348{,}4 \text{ J} + (-2\,000 \text{ J}) = \boxed{1\,348{,}4 \text{ J}}$$

11.41. *Un émbolo de 40 cm de diámetro avanza 5 cm bajo una presión de 10 atm. ¿Cuántas calorías corresponderán a este trabajo?*

Solución: La presión de 10 atmósferas equivale a:

$$P = 10 \text{ atm} \cdot \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} = 1{,}013 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

y la variación de volumen es:

$$\Delta V = \pi \cdot r^2 \cdot \Delta h = \pi \cdot (0{,}2 \text{ m})^2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 6{,}28 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Por tanto:

$$W = P \cdot \Delta V = 1{,}013 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 6{,}28 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 6{,}36 \cdot 10^3 \text{ J} =$$

$$= 6{,}36 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \frac{0{,}24 \text{ cal}}{1 \text{ J}} = \boxed{1\,526 \text{ cal}}$$

11.42. *Sabiendo que para el aire, $c_p = 0{,}238$ cal/g · °C y $c_v = 0{,}17$ cal/g · °C, y que su densidad en condiciones normales es 1,293 g/l, calcular el valor aproximado del equivalente mecánico del calor.*

Solución: De acuerdo con la relación de Mayer:

$$J = \frac{R}{c_p - c_v} = \frac{P_o}{(c_p - c_v) \cdot \rho_o \cdot T_o} =$$

$$= \frac{1 \text{ atm} \cdot \dfrac{1{,}013 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}}}{(0{,}238 - 0{,}17)\ \dfrac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot 1{,}29\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 273 \text{ K} \cdot \dfrac{10^3 \text{ g}}{1 \text{ kg}}} = \boxed{4{,}23 \text{ J/cal}}$$

11.43. *Calcular el aumento de energía interna que tiene lugar al evaporarse 25 gramos de agua a 20 °C y presión normal, suponiendo que el vapor de agua se comporta como un gas ideal. (El calor de vaporización del agua a 20 °C es 580 cal/g.) Expresar el resultado en calorías.*

Solución: El volumen que ocupan 25 g de vapor de agua a 20 °C y presión normal es:

$$V = \frac{n \cdot R \cdot T}{P} = \frac{a \cdot R \cdot T}{M \cdot P} = \frac{25\ g \cdot 0{,}082\ \frac{atm \cdot l}{K \cdot mol} \cdot 293\ K}{18\ \frac{g}{mol} \cdot 1\ atm} = 33{,}369\ l$$

mientras que en estado líquido y a esa misma temperatura el volumen que ocupa es:

$$25\ g \cdot \frac{1\ cm^3}{1\ g} \cdot \frac{1\ l}{10^3\ cm^3} = 0{,}025\ l$$

Por tanto, al evaporarse el agua a 20 °C, experimenta un aumento de volumen de:

$$\Delta V = 33{,}369\ l - 0{,}025\ l = 33{,}344\ l$$

Hallemos ahora la cantidad de calor y el trabajo realizado al evaporarse el agua:

$$Q = 25\ g \cdot 580\ \frac{cal}{g} = 14\ 500\ cal$$

$$W = P \cdot \Delta V = 1\ atm \cdot \frac{1{,}013 \cdot 10^5\ Pa}{1\ atm} \cdot 33{,}344\ l \cdot \frac{1\ m^3}{10^3\ l} = 3\ 377{,}7\ J =$$

$$= 3\ 377{,}7\ J \cdot \frac{0{,}24\ cal}{1\ J} = 810\ cal$$

Aplicando el primer principio de la Termodinámica y teniendo en cuenta el criterio de signos de la IUPAC, resulta:

$$U = Q + W = 14\ 500\ cal - 810\ cal = \boxed{13\ 690\ cal}$$

11.44. *Al quemar 2,34 g de benceno (C_6H_6) en una bomba calorimétrica a volumen constante se desprenden, a 25 °C, 23 450 calorías. Calcular el calor de combustión del benceno a presión constante y a esta misma temperatura.*

Solución: La ecuación representativa de la reacción de combustión del benceno es:



$$C_6H_{6(l)} + \frac{15}{2}\ O_{2(g)} \longrightarrow 6CO_{2(g)} + 3H_2O_{(l)}$$

produciéndose en la misma un incremento del número de moles gaseosos:

$$\Delta n = n_2 - n_1 = 6\ moles - \frac{15}{2}\ moles = -\frac{3}{2}\ moles$$

Por otra parte, el calor de combustión del benceno a volumen constante valdrá:

$$Q_v = \frac{-23\,450 \text{ cal}}{2{,}34 \text{ g } C_6H_6} \cdot \frac{78 \text{ g } C_6H_6}{1 \text{ mol } C_6H_6} \cdot \frac{4{,}1855 \text{ J}}{1 \text{ cal}} = -3{,}2713 \cdot 10^6 \text{ J/mol}$$

El signo negativo de Q_v pone de manifiesto que se trata de un calor desprendido.

Hallemos ahora el calor de combustión del benceno a presión constante:

$$Q_p = Q_v + R \cdot T \cdot \Delta n =$$

$$= -3{,}2713 \cdot 10^6 \text{ J} + 8{,}3144 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 298 \text{ K} \cdot \left(-\frac{3}{2} \text{ moles}\right) =$$

$$= -3{,}2713 \cdot 10^6 \text{ J} - 3{,}7 \cdot 10^3 \text{ J} = -3{,}275 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Por tanto, en el proceso de combustión del benceno se desprende una cantidad de calor:

$$\boxed{Q_p = 3{,}275 \cdot 10^3 \text{ kJ/mol}}$$

11.45. ***Calcular la diferencia entre Q_p y Q_v para la combustión de la glucosa a 18 °C, según la ecuación:***



$$C_6H_{12}O_{6(s)} + 6O_{2(g)} \longrightarrow 6CO_{2(g)} + 6H_2O_{(l)}$$

Solución: Como $Q_p - Q_v = R \cdot T \cdot \Delta n$, y en este caso $\Delta n = 0$, resulta:

$$\boxed{Q_p - Q_v = 0}$$

12. SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA. ENTROPÍA. MÁQUINAS TÉRMICAS

FORMULARIO-RESUMEN

ENTROPÍA

$$\Delta S = \frac{Q_{rev}}{T} > \frac{Q_{irrev}}{T}; \quad (\Delta S)_{sistema\ aislado} > 0$$

VARIACIONES DE ENTROPÍA EN LOS PROCESOS REVERSIBLES

Proceso reversible y adiabático: $S = cte$

Cambio de estado (proceso reversible isotérmico) a una temperatura T:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{n \cdot l}{T}$$

- n = número de moles de sustancia.
- l = calor molar correspondiente al cambio de estado.

Procesos no isotérmicos:

$$\Delta S = m \cdot c \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

- m = masa del sistema.
- c = calor específico.
- T_1 = temperatura absoluta inicial (Kelvin).
- T_2 = temperatura absoluta final (Kelvin).

Sistemas gaseosos	**Procesos isobaros (P = cte):** $\Delta S = m \cdot c_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$
	Procesos isocoros (V = cte): $\Delta S = m \cdot c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$

Expansión isotérmica de un gas ideal: $\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$

VARIACIONES DE ENTROPÍA EN LOS PROCESOS IRREVERSIBLES

$$\Delta S > \frac{Q_{irrev}}{T}$$

RENDIMIENTO DE LAS MÁQUINAS TÉRMICAS

$$\mathbf{R} = \frac{W}{Q} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

- Q_1 = calor absorbido del foco caliente.
- Q_2 = calor cedido al foco frío.
- T_1 = temperatura absoluta del foco caliente (Kelvin).
- T_2 = temperatura absoluta del foco frío (Kelvin).

EFICIENCIA DE LAS MÁQUINAS FRIGORÍFICAS

$$\mathbf{R} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

- Q_1 = calor cedido al foco caliente.
- Q_2 = calor absorbido del foco frío.
- T_1 = temperatura absoluta del foco caliente (Kelvin).
- T_2 = temperatura absoluta del foco frío (Kelvin).

12. SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA. ENTROPÍA. MÁQUINAS TÉRMICAS

12.1. *¿Es correcto afirmar la posibilidad de que un barco navegue consumiendo exclusivamente la energía calorífica del mar?*

Solución: De acuerdo con el primer principio de la Termodinámica, existe dicha posibilidad, ya que la energía calorífica puede convertirse en trabajo. Sin embargo, esta posibilidad queda eliminada al aplicar el segundo principio, que exige la existencia de dos focos a distinta temperatura.

12.2. *a) Algunas veces se oye decir: «El Universo va hacia el caos.» ¿Qué interpretación termodinámica se da a esta expresión?*
b) ¿Qué interpretación termodinámica se puede dar a la frase bíblica: «Ganarás el pan con el sudor de tu frente»?

Solución:

a) Los sistemas evolucionan naturalmente hacia estados de mayor entropía y, consecuentemente, hacia estados de mayor desorden. De ahí esa expresión.
Lo que sucede es que, por extensión, se ha aplicado esa frase a fenómenos de tipo social, político, religioso, etc., que están fuera del alcance de la Física.
b) La frase bíblica citada es, en realidad, una forma de enunciar el segundo principio de la Termodinámica, ya que se trata de una transformación calor-trabajo.

12.3. *Citar ejemplos de fenómenos irreversibles.*

Solución:

a) Todos aquellos procesos en que exista rozamiento.
b) La mezcla de agua fría y caliente.
c) La deformación inelástica de un alambre.
d) El paso de una corriente eléctrica a través de una resistencia.
e) La disolución de una sal en agua.
f) Las reacciones químicas espontáneas, etc.

12.4. *¿Cuál será la ecuación de dimensiones de la entropía?*

Solución: Como la entropía viene definida por la relación entre la energía y la temperatura, su ecuación de dimensiones será:

$$[S] = \frac{[W]}{[T]} = \frac{ML^2T^{-2}}{\theta} = ML^2T^{-2}\theta^{-1}$$

12.5. *Según J. Palacios, cuando una gallina clueca empolla los huevos no les da calor, sino que, por el contrario, se lo absorbe. Analizar esta afirmación, de acuerdo con el segundo principio de la Termodinámica.*

Solución: Mientras dura la incubación del huevo hay un aumento del orden y, por consiguiente, una disminución de la entropía. Al tratarse de una transformación isoterma, puesto que la gallina actúa de termostato, el calor de la transformación, $\Delta Q = T \cdot \Delta S$, será negativo, es decir, el huevo cede calor, el cual es absorbido por la gallina.

12.6. *¿Es posible la existencia de alguna transformación que vaya acompañada de una disminución de entropía?*

Solución: Sí; pero no de una forma espontánea, sino **provocada,** de manera que la entropía del agente exterior causante de la transformación, aumente en una proporción superior a la disminución de dicha magnitud en la transformación considerada.

12.7. *Un motor quema 1 kg de combustible con un poder calorífico de 500 $\frac{kcal}{kg}$ y eleva 4 000 kg de agua a 40 metros de altura. ¿Qué tanto por ciento de calor se transformó en trabajo?*

Solución: La cantidad de calor suministrada por el combustible es:

$$Q = 1 \text{ kg} \cdot 500 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}} = 500 \text{ kcal} = 5 \cdot 10^5 \text{ cal}$$

y la energía empleada en elevar el agua:

$$W = m \cdot g \cdot h = 4\,000 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 40 \text{ m} = 15{,}68 \cdot 10^5 \text{ J} =$$

$$= 15{,}68 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \frac{0{,}24 \text{ cal}}{1 \text{ J}} = 3{,}7632 \cdot 10^5 \text{ cal}$$

Por consiguiente, el tanto por ciento de energía transformada será:

$$\frac{3{,}7632 \cdot 10^5 \text{ cal}}{5 \cdot 10^5 \text{ cal}} \cdot 100 = \boxed{75{,}3 \ \%}$$

12.8. *Una masa de agua cae desde 100 m. ¿Cuánto aumentará su temperatura, en el supuesto de que toda la energía se transforme en calor?*

Solución: Hemos de tener presente que la masa, cuando se trate de ejercicios de Mecánica, debe expresarse en kilogramos (si se opera en el Sistema Internacional); mientras que en ejercicios de Calorimetría ha de venir dada en gramos (recordar la definición de caloría).

La energía potencial de m kg de agua situados a 100 m de altura es:

$$m \cdot g \cdot h = m \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 100 \text{ m} = 1\,000 \cdot m \text{ J} = 240 \cdot m \text{ cal}$$

Este calor (240 · m cal) se suministra a los 1 000 · m gramos de agua. Aplicando la ecuación fundamental de la Calorimetría:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t$$

tenemos:

$$\Delta t = \frac{Q}{m \cdot c} = \frac{240 \cdot m\ cal}{1\,000 \cdot m\ g \cdot 1\ \frac{cal}{g \cdot °C}} = \boxed{0{,}24\ °C}$$

12.9. ***El rendimiento de un motor de gasolina es del 30 %. Si el calor de combustión de la gasolina es 10^4 cal/g, ¿qué cantidad de trabajo mecánico se puede obtener cuando dicho motor queme medio kilogramo de gasolina?***

Solución:

$$W = 0{,}5\ kg\ gas. \cdot \frac{10^3\ g}{1\ kg} \cdot \frac{10^4\ cal}{g\ gas.} \cdot \frac{4{,}1855\ J}{1\ cal} \cdot \frac{30\ J\ aprovech.}{100\ J\ consum.} =$$

$$= \boxed{6{,}28 \cdot 10^6\ J}$$

12.10. ***¿Qué trabajo se podrá realizar mediante el calor producido por la combustión completa de 100 kg de carbón, si cada kilogramo de carbón origina 9 000 kcal y el calor solamente se aprovecha un 40 %?***

Solución:

$$W = 100\ kg\ carbón \cdot \frac{9\,000\ kcal}{kg\ carbón} \cdot \frac{1\,000\ cal}{1\ kcal} \cdot \frac{40\ cal\ aprovechadas}{100\ cal\ producidas} \cdot$$

$$\cdot \frac{4{,}1855\ J}{1\ cal} = \boxed{1{,}5 \cdot 10^9\ J}$$

12.11. ***Un automóvil de 1 000 kg de masa aprovecha el 20 % de la energía producida en la combustión de la gasolina. Si el coche partió del reposo y alcanzó la velocidad de 36 km/h, calcular:***

a) ***La energía que utilizó el motor.***
b) ***La energía total producida.***
c) ***La cantidad de gasolina gastada. (El calor de combustión de la gasolina es 10^4 cal/g.)***

Solución:

a) La energía que utilizó el motor se invirtió en incrementar la energía cinética del coche:

$$W = E_c = \frac{1}{2}\ m \cdot v^2 = \frac{1}{2} 1\,000\ kg \cdot (10\ m/s)^2 = 5 \cdot 10^4\ J = \boxed{1{,}2 \cdot 10^4\ cal}$$

b) Como el automóvil aprovecha el 20 % de la energía producida en la combustión de la gasolina, esta energía será:

$$W = 1{,}2 \cdot 10^4 \text{ cal aprovechadas} \cdot \frac{100 \text{ cal producidas}}{20 \text{ cal aprovechadas}} = \boxed{\mathbf{6 \cdot 10^4\ cal}}$$

c) La cantidad de gasolina gastada es:

$$m = 6 \cdot 10^4 \text{ cal} \cdot \frac{1 \text{ g gasolina}}{10^4 \text{ cal}} = \boxed{\mathbf{6\ g\ gasolina}}$$

12.12. *Un alpinista de 60 kg tomó 234 gramos de azúcar, cuyo contenido energético es de 938 kcal. Suponiendo que sólo un 15 % del mismo se transforma en energía mecánica, ¿qué altura podrá escalar el alpinista a expensas de dicha energía?*

Solución: La energía mecánica procedente del azúcar consumido por el alpinista es:

$$E = 938 \text{ kcal} \cdot \frac{1\,000 \text{ cal}}{1 \text{ kcal}} \cdot \frac{15 \text{ cal aprovechadas}}{100 \text{ cal producidas}} \cdot \frac{4{,}1855 \text{ J}}{1 \text{ cal}} = 588\,900 \text{ J}$$

Con esta energía el alpinista podrá subir una altura:

$$h = \frac{E}{m \cdot g} = \frac{588\,900 \text{ J}}{60{,}234 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 997{,}64 \text{ m} \simeq \boxed{\mathbf{1\,000\ m}}$$

12.13. *En las cataratas del Niágara el agua cae desde una altura de 50 m, y en las de Yosemite, desde 736 m de altura. Si toda la variación de energía potencial se transforma en calor y éste es absorbido por el agua, calcular la variación de temperatura que experimentará ésta en cada una de las cataratas citadas.*

Solución: En cada uno de los casos la variación de energía potencial que experimenta el agua es: $\Delta E_p = m \cdot g \cdot h$ julios, que corresponde a una cantidad de calor de $Q = 0{,}24 \cdot m \cdot g \cdot h$ calorías. Si esta cantidad de calor se emplea en calentar el agua, el aumento de temperatura que ésta experimenta es:

$$\Delta t = \frac{0{,}24 \cdot m \cdot g \cdot h \text{ cal}}{1\,000 \cdot m\, g \cdot 1 \dfrac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}}} = \frac{0{,}24 \cdot g \cdot h}{1\,000} \ {}^\circ\text{C}$$

(Recuérdese que en las fórmulas de la Mecánica la masa se expresa en kilogramos, mientras que en las de la Calorimetría la masa viene dada en gramos.)

Para las cataratas del Niágara:

$$\Delta t = \frac{0{,}24 \cdot 10 \cdot 50}{1\,000} \ {}^\circ\text{C} = \boxed{\mathbf{0{,}12\ {}^\circ C}}$$

y para las de Yosemite:

$$\Delta t = \frac{0{,}24 \cdot 10 \cdot 736}{1\,000} \text{ °C} = \boxed{1{,}77 \text{ °C}}$$

12.14. ***Si el calor de vaporización del agua es 540 cal/g, calcular:***

a) ***La variación de entropía que experimentan 5 gramos de agua líquida a 100 °C y 1 atmósfera de presión, al vaporizarse completamente de una forma reversible a temperatura y presión constante.***

b) ***La variación de entropía total del universo en dicho proceso.***

c) ***La variación de entropía que experimentan los alrededores.***

Solución:

a) Como se trata de un proceso isotérmico:

$$\Delta S = \frac{5 \text{ g} \cdot 540 \text{ cal/g} \cdot 4{,}18 \text{ J/cal}}{373 \text{ K}} = \boxed{30{,}3 \text{ J/K}}$$

b) Como el proceso es reversible: $(\Delta S)_{universo} = \boxed{0}$

c) Como $(\Delta S)_{sistema} + (\Delta S)_{alrededores} = (\Delta S)_{universo}$, la variación de entropía que experimentan los alrededores será:

$$(\Delta S)_{alrededores} = (\Delta S)_{universo} - (\Delta S)_{sistema} = \boxed{-30{,}3 \text{ J/K}}$$

12.15. ***Calentamos reversiblemente 20 gramos de aluminio desde 17 °C a 27 °C. Calcular la variación de entropía que tiene lugar. (El calor específico del aluminio es 0,217 cal/g · °C.)***

Solución: La variación de entropía será:

$$\Delta S = m \cdot c \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} = 20 \text{ g} \cdot 0{,}217 \ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{°C}} \cdot 4{,}185 \ \frac{\text{J}}{\text{cal}} \cdot \ln \frac{300}{290} \cdot 1 \ \frac{\text{°C}}{\text{K}}$$

$$= \boxed{0{,}62 \text{ J/K}}$$

12.16. ***Hallar la variación de entropía que experimenta 1 gramo de agua cuando, a presión normal, se calienta desde 0 °C hasta 100 °C.***

Solución:

$$\Delta S = m \cdot c \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} = 1 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{°C}} \cdot \frac{4{,}1855 \text{ J}}{1 \text{ cal}} \cdot \ln \frac{373}{273} \cdot 1 \ \frac{\text{°C}}{\text{K}} = \boxed{1{,}306 \text{ J/K}}$$

12.17. ***¿Qué variación de entropía experimenta 1 gramo de hielo a 0 °C cuando, a presión normal, se convierte en vapor de agua a 100 °C?***

Solución: El proceso se puede descomponer en otros tres, con sus correspondientes variaciones de entropía.

a) Fusión del hielo:

$$\Delta S_1 = \frac{m \cdot l}{T_1} = \frac{1\ g \cdot 80\ cal/g \cdot 4{,}1855\ J/cal}{273\ K} = 1{,}226\ J/K$$

b) Calentamiento del agua líquida:

$$\Delta S_2 = m \cdot c \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} = 1 g \cdot 1 \frac{cal}{g \cdot °C} \cdot \frac{4{,}1855\ J}{1\ cal} \cdot \ln \frac{373}{273} \cdot 1 \frac{°C}{K} = 1{,}306\ J/K$$

c) Vaporización del agua líquida:

$$\Delta S_3 = \frac{m \cdot l}{T_2} = \frac{1\ g \cdot 540\ cal/g \cdot 4{,}1855\ J/cal}{373\ K} = 6{,}059\ J/K$$

La variación total de entropía será:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = 1{,}226\ J/K + 1{,}306\ J/K + 6{,}059\ J/K =$$

$$= \boxed{8{,}59\ J/K}$$

12.18. ***10 moles de un gas ideal se expansionan isotérmicamente a 27 °C, desde 50 litros a 100 litros de volumen. Calcular la variación de entropía que experimenta el gas.***

Solución:

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = 10\ moles \cdot 8{,}31\ \frac{J}{K \cdot mol} \cdot \ln \frac{100}{50} = \boxed{57{,}6\ J/K}$$

12.19. ***¿Cuánto aumenta la entropía de 1 mol de un gas ideal al dilatarse isotérmicamente desde 25 litros a 125 litros?***

Solución:

$$\Delta S = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = 1\ mol \cdot 8{,}31\ \frac{J}{K \cdot mol} \cdot \ln \frac{125}{25} = \boxed{13{,}37\ J/K}$$

12.20. ***Calcular la variación de entropía que tiene lugar cuando se mezclan 200 gramos de agua a 30 °C con 400 g de agua a 0 °C.***

Solución: Hallemos, en primer lugar, la temperatura final de la mezcla:

$$200\ g \cdot 1\ \frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (30 - t)\ °C = 400\ g \cdot 1\ \frac{cal}{g \cdot °C} \cdot (t - 0)\ °C$$

$$t = 10\ °C$$

La variación de entropía que tiene lugar al enfriarse el agua caliente es:

$$\Delta S_1 = m_1 \cdot c \cdot \ln \frac{T}{T_2} = 200 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot 4{,}1855 \frac{\text{J}}{\text{cal}} \cdot \ln \frac{283}{303} \cdot 1 \frac{°\text{C}}{\text{K}} = -57{,}16 \text{ J/K}$$

y la que experimenta el agua fría cuando se calienta:

$$\Delta S_2 = m_2 \cdot c \cdot \ln \frac{T}{T_1} = 400 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot 4{,}1855 \frac{\text{J}}{\text{cal}} \cdot \ln \frac{283}{273} \cdot 1 \frac{°\text{C}}{\text{K}} = 60{,}23 \text{ J/K}$$

Por tanto, la variación de entropía en el proceso de mezcla valdrá:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -57{,}16 \frac{\text{J}}{\text{K}} + 60{,}23 \frac{\text{J}}{\text{K}} = \boxed{3{,}07 \frac{\text{J}}{\text{K}}}$$

12.21. *Se mezclan 45 gramos de hielo a 0 °C con 100 gramos de agua a 60 °C. ¿Cuál es la variación de entropía del sistema cuando se alcanza el estado de equilibrio?*

Solución: Calcularemos, en primer lugar, la temperatura final de equilibrio, teniendo en cuenta el principio de la igualdad de los intercambios de calor:

$$45 \text{ g} \cdot 80 \frac{\text{cal}}{\text{g}} + 45 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot t \text{ °C} = 100 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot (60 - t) \text{ °C}$$

de donde:

$$t = 16{,}55 \text{ °C}$$

La variación de entropía que experimenta el hielo cuando se funde y se eleva posteriormente su temperatura hasta la de equilibrio será:

$$\Delta S_1 = \frac{m_1 \cdot l}{T_1} + m_1 \cdot c \cdot \ln \frac{T}{T_1} = \frac{45 \text{ g} \cdot 80 \text{ cal/g} \cdot 4{,}1855 \text{ J/cal}}{273 \text{ K}} + 45 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot \frac{4{,}1855 \text{ J}}{\text{cal}} \cdot \ln \frac{289{,}55}{273} \cdot 1 \frac{°\text{C}}{\text{K}} = 66{,}28 \text{ J/K}$$

y la del agua cuando se enfría de 60 °C a 16,55 °C:

$$\Delta S_2 = m_2 \cdot c \cdot \ln \frac{T}{T_2} = 100 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot 4{,}1855 \frac{\text{J}}{\text{cal}} \cdot \ln \frac{289{,}55}{333} \cdot 1 \frac{°\text{C}}{\text{K}} = -58{,}52 \text{ J/K}$$

Por consiguiente, la variación total de entropía del sistema será:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 66{,}28 \text{ J/K} - 58{,}52 \text{ J/K} = \boxed{7{,}76 \text{ J/K}}$$

12.22. ***Un recipiente que contiene 100 cm³ de agua a 80 °C se deja enfriar en el medio ambiente (25 °C), hasta que sus temperaturas se igualen.***

a) ***Razonar si el proceso es reversible o irreversible.***
b) ***¿Cuál es la variación de entropía que experimenta el agua?***
c) ***¿Qué variación de entropía sufre el universo en este caso?***
d) ***¿Cuál sería la variación de entropía del universo si el proceso se realizase reversiblemente?***

Solución:

a) Ya que la diferencia de temperatura entre el agua y el medio ambiente es muy elevada, **el proceso es irreversible.**

b) Imaginemos que el agua se enfría reversiblemente desde 80 °C a 25 °C. La variación de entropía del agua será:

$$\Delta S = m \cdot c \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} = 100 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot \ln \frac{298}{353} \cdot 1 \frac{{}^\circ\text{C}}{\text{K}} =$$

$$= -16{,}94 \frac{\text{cal}}{\text{K}} = \boxed{\mathbf{-70{,}88} \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{K}}}$$

Esta misma variación de entropía será la que experimenta el agua en su enfriamiento irreversible.

c) Calculemos la variación de entropía del ambiente. Aunque éste recibe calor procedente del agua al enfriarse, su temperatura prácticamente no varía, ya que su capacidad térmica es muy elevada. El calor que absorbe el ambiente es:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T = 100 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot 55 \text{ °C} = 5\,500 \text{ cal} = 23\,020{,}5 \text{ J}$$

Por consiguiente:

$$(\Delta S)_{\text{alrededores}} = \frac{Q}{T} = \frac{23\,020{,}5 \text{ J}}{298 \text{ K}} = 77{,}25 \text{ J/K}$$

La variación de entropía del universo en este proceso se obtiene sumando las variaciones de entropía del agua y del medio ambiente. Por tanto:

$$(\Delta S)_{\text{universo}} = -70{,}88 \text{ J/K} + 77{,}25 \text{ J/K} = \boxed{\mathbf{6{,}37 \text{ J/K}}}$$

Esta variación es positiva, por tratarse de un proceso irreversible.

d) En este caso,

$$\boxed{\mathbf{(\Delta S)_{universo} = 0}}$$

12.23. ***¿Cuál es la mejor manera de aumentar el rendimiento de una máquina de Carnot: aumentar T_1 manteniendo constante T_2, o disminuir T_2 manteniendo T_1 constante?***

Solución: El rendimiento de una máquina de Carnot viene dado por:

$$R = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Si aumentamos T_1 manteniendo constante T_2:

$$R_1 = \frac{T_1 + t - T_2}{T_1 + t}$$

mientras que si disminuimos T_2 manteniendo T_1 constante:

$$R_2 = \frac{T_1 - T_2 + t}{T_1}$$

Al comparar las expresiones de R_1 y R_2 vemos que los numeradores son iguales. Por lo tanto, será mayor aquella fracción que tenga menor denominador, concretamente R_2.

En consecuencia, **la mejor manera de aumentar el rendimiento de una máquina de Carnot consiste en disminuir T_2 manteniendo T_1 constante.**

12.24. ***Una máquina de Carnot trabaja entre las temperaturas de 187 °C y 37 °C. ¿Cuál es su rendimiento?***

Solución: Las temperaturas absolutas de ambos focos son:

$$T_1 = 187\ °C = 460\ K \quad ; \quad T_2 = 37\ °C = 310\ K$$

Por consiguiente:

$$R = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{460\ K - 310\ K}{460\ K} = \boxed{0{,}326}$$

12.25. ***Una máquina reversible trabaja con un rendimiento de 0,3, absorbiendo del foco caliente 150 calorías en cada ciclo. ¿Qué calor cede al refrigerante y qué trabajo produce la máquina?***

Solución: El rendimiento de una máquina reversible viene dado por:

$$R = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

Como en este caso $Q_1 = 150$ cal, sustituyendo resulta:

$$0{,}3 = \frac{150\ cal - Q_2}{150\ cal}$$

de donde:

$$\boxed{Q_1 = 105 \text{ cal}}$$

El trabajo que produce la máquina valdrá:

$$W = Q_1 - Q_2 = 150 \text{ cal} - 105 \text{ cal} = 45 \text{ cal} = 45 \text{ cal} \cdot \frac{4{,}1855 \text{ J}}{1 \text{ cal}} =$$

$$= \boxed{183{,}3 \text{ J}}$$

12.26. ***Una máquina térmica cuyo foco caliente tiene una temperatura de 127 °C toma 100 calorías a esta temperatura en cada ciclo y cede 80 calorías al foco frío. Calcular la temperatura de este foco frío.***

Solución: Como:

$$R = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

sustituyendo, tenemos:

$$\frac{100 \text{ cal} - 80 \text{ cal}}{100 \text{ cal}} = \frac{400 \text{ K} - T_2}{400 \text{ K}}$$

de donde resulta:

$$\boxed{T_2 = 320 \text{ K} = 47 \text{ °C}}$$

12.27. ***Hallar el rendimiento ideal de una máquina térmica que funciona entre 200 °C y 50 °C. ¿Cuál debe ser la temperatura del foco caliente para que el rendimiento sea del 50 %?***

Solución: El rendimiento viene dado por:

$$R = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Las temperaturas absolutas de ambos focos son:

$$T_1 = 200 \text{ °C} = 473 \text{ K} \quad ; \quad T_2 = 50 \text{ °C} = 323 \text{ K}$$

Por tanto:

$$R = \frac{473 \text{ K} - 323 \text{ K}}{473 \text{ K}} = 0{,}317 = \boxed{31{,}7 \text{ \%}}$$

Para que el rendimiento sea del 50 %: $0{,}5 = \dfrac{T_1 - 323 \text{ K}}{T_1}$, de donde:

$$\boxed{T_1 = 646 \text{ K} = 373 \text{ °C}}$$

12.28. ***Hace años la temperatura promedio de las calderas en las grandes máquinas térmicas era del orden de 227 °C. En la actualidad es de aproximadamente 327 °C. Suponiendo que la temperatura del foco frío es, en ambos casos, de 27 °C, ¿cuáles son los rendimientos correspondientes?***

Solución: En el primer caso:

$$T_1 = 227\ °C = 500\ K \quad ; \quad T_2 = 27\ °C = 300\ K$$

$$R_1 = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{500\ K - 300\ K}{500\ K} = 0{,}4 = \boxed{\mathbf{40\ \%}}$$

y en el segundo:

$$T_1 = 327\ °C = 600\ K \quad ; \quad T_2 = 27\ °C = 300\ K$$

$$R_2 = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{600\ K - 300\ K}{600\ K} = 0{,}5 = \boxed{\mathbf{50\ \%}}$$

12.29. ***Un motor cuyo foco frío está a la temperatura de 7 °C tiene un rendimiento termodinámico del 40 %.***

a) ¿A qué temperatura está el foco caliente?
b) ¿En cuántos grados ha de aumentarse la temperatura de este foco caliente para que el rendimiento sea del 50 %?

Solución:

a) Como:

$$R = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad y \quad T_2 = 7\ °C = 280\ K$$

sustituyendo, tenemos:

$$0{,}4 = \frac{T_1 - 280\ K}{T_1}$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{T_1 = 466{,}7\ K = 193{,}7\ °C}}$$

b) Llamemos Δt al aumento de temperatura pedido. Como $R = 0{,}5$, resulta

$$0{,}5 = \frac{(466{,}7 + \Delta t)\ K - 280\ K}{(466{,}7 + \Delta t)\ K}$$

de donde se obtiene:

$$\boxed{\mathbf{\Delta t = 93{,}3\ °C}}$$

12.30. ***En un día de invierno, cuando la temperatura de la calle es de 0 °C, se desea calentar una habitación hasta 15 °C mediante una máquina frigorífica de Carnot. ¿Cuál es la eficiencia de la máquina?***

Solución: Ya que la eficiencia de una máquina frigorífica viene dada por:

$$R = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

sustituyendo, tenemos:

$$R = \frac{273 \text{ K}}{288 \text{ K} - 273 \text{ K}} = \boxed{18{,}2}$$

12.31. ***Una máquina de Carnot trabaja entre dos temperaturas fijas con un rendimiento de 0,2, pero si disminuimos la temperatura inferior en 73 °C, el rendimiento de la máquina se hace el doble. Hallar las dos temperaturas fijas.***

Solución: Aplicando la fórmula del rendimiento en los dos casos del problema, tenemos;

$$\left.\begin{aligned} 0{,}2 &= \frac{T_1 - T_2}{T_1} \\ 0{,}4 &= \frac{T_1 - (T_2 - 73)}{T_1} \end{aligned}\right\}$$

La resolución de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas conduce a:

$$\boxed{T_1 = 365 \text{ K}; T_2 = 292 \text{ K}}$$

12.32. ***Una máquina de Carnot trabaja entre 327 °C y 27 °C y produce 7 000 calorías por ciclo. Calcular su rendimiento y las cantidades de calor absorbido y cedido en cada ciclo.***

Solución: Las temperaturas absolutas de los dos focos son:

$$T_1 = 327 \text{ °C} = 600 \text{ K} \quad ; \quad T_2 = 27 \text{ °C} = 300 \text{ K}$$

El rendimiento de la máquina valdrá:

$$R = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{600 \text{ K} - 300 \text{ K}}{600 \text{ K}} = 0{,}5 = \boxed{50 \text{ \%}}$$

Calculemos ahora las cantidades de calor absorbido y cedido. Como:

$$R = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \text{y} \quad Q_1 - Q_2 = 7\,000 \text{ cal}$$

resulta:

$$Q_1 = \frac{7\ 000\ \text{cal}}{R} = \frac{7\ 000\ \text{cal}}{0{,}5} = \boxed{\mathbf{14\ 000\ cal}}$$

$$Q_2 = Q_1 - 7\ 000\ \text{cal} = 14\ 000\ \text{cal} - 7\ 000\ \text{cal} = \boxed{\mathbf{7\ 000\ cal}}$$

12.33. ***¿Por qué en el ciclo de Rankine las isotermas son horizontales y, en cambio, no lo son en el ciclo de Carnot?***

Solución: En el ciclo de Rankine las isotermas corresponden a los procesos de vaporización y condensación del combustible, los cuales se verifican a presión constante.

12.34. ***¿Por qué en los motores Diesel no se utilizan bujías?***

Solución: Porque el encendido de la mezcla explosiva se verifica espontáneamente, a medida que el combustible se inyecta en el cilindro que contiene aire sometido a una elevada compresión.

12.35. ***Explicar cómo se cumple el principio de conservación de la energía en una máquina térmica y en una máquina frigorífica.***

Solución: En la máquina térmica el calor suministrado por el foco caliente es igual a la suma del trabajo realizado por la máquina más el calor absorbido por el foco frío.

En la máquina frigorífica el calor suministrado por el foco frío (refrigerador) más el trabajo suministrado por el motor es igual al calor absorbido por el foco caliente (ambiente).

13. CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

FORMULARIO-RESUMEN

Circulación, C, de un vector $\vec{a}$ a lo largo de una línea, entre los puntos 1 y 2:

$$C = \int_1^2 \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

Si la curva es cerrada:

$$C = \oint \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

($d\vec{s}$ = vector desplazamiento infinitesimal sobre la línea).

Flujo, Φ, de un vector $\vec{a}$ a través de una superficie S:

$$\Phi = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

Si la superficie es cerrada:

$$\Phi = \oint \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

Gradiente de un escalar ∅:

$$\overrightarrow{grad}\, \varnothing = \frac{d\varnothing}{dn}\, \vec{u}_n \, ; \quad d\varnothing = \overrightarrow{grad}\, \varnothing \cdot d\vec{s}$$

($\vec{u}_n$ = vector unitario en la dirección del gradiente).

Vector gradiente en función de las coordenadas.

$$\overrightarrow{grad}\, \varnothing = \nabla \varnothing = \frac{\delta \varnothing}{\delta x}\, \vec{i} + \frac{\delta \varnothing}{\delta y}\, \vec{j} + \frac{\delta \varnothing}{\delta z}\, \vec{k}$$

(∇ = operador nabla).

Campos de fuerzas: $\vec{F} = A \cdot \vec{E}$

(A = magnitud activa; $\vec{E}$ = intensidad de campo).

Relación entre trabajo y energía potencial:

$$E_{p(\vec{s})} = E_{p(x,y,z)} = -\int_O^P \vec{F} \cdot d\vec{s} = -W_O^P$$

Relación entre trabajo y diferencia de energía potencial:

$$\triangle E_p = E_{p_2} - E_{p_1} = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = -W_1^2$$

Potencial de campo en un punto:

$$V = \frac{E_p}{A}$$

Relación entre el trabajo y el potencial:

$$W_1^2 = A \cdot (V_1 - V_2)$$

Relación entre la fuerza y la energía potencial:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

Relación entre el campo y el potencial:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

13. CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

13.1. *Cita cuatro ejemplos de campos escalares y otros cuatro de campos vectoriales.*

Solución: Los campos de temperatura, presión, potencial y energía potencial son ejemplos de campos escalares; mientras que son campos vectoriales, el eléctrico, el magnético, los de velocidad, los de fuerzas, etc.

13.2. *¿Cuántas superficies equipotenciales, como máximo, pueden pasar por un punto dado?*

Solución: Dado que cada superficie equipotencial corresponde a un valor determinado de la magnitud escalar que representa, por un punto dado solamente puede pasar una **superficie equipotencial.**

13.3. *¿Qué podemos decir de un punto de un campo vectorial en el que confluyen líneas de fuerza? ¿Y de otro del que salen líneas de fuerza?*

Solución: El primero es un **sumidero;** el segundo, una **fuente.**

13.4. *Hallar la circulación del vector* $\vec{a} = 2y\,\vec{i} + 3x^2\,\vec{j} + 3xz\,\vec{k}$*, entre los puntos (1,1,1) y (2,4,1), a lo largo de la curva:* $y = x^2$*;* $z = 1$*.*

Solución:

$$C = \int_1^2 \vec{a}\cdot d\vec{s} = \int_{(1,1,1)}^{(2,4,1)} (2y\,dx + 3x^2\,dy + 3xz\,dz) =$$

$$= \int_1^2 2y\,dx + \int_1^4 3x^2\,dy + \int_1^1 3xz\,dz$$

Como $y = x^2$; $dy = 2x\,dx$; $z = 1$; $dz = 0$, resulta:

$$C = \int_1^2 2x^2\,dx + \int_1^4 3y\,dy = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_1^2 + \left[\frac{3y^2}{2}\right]_1^4 = \boxed{\frac{163}{6}}$$

13.5. *Hallar la circulación del vector:* $\vec{a} = x^2y\,\vec{i} - (x-1)\,\vec{j} + x^2z\,\vec{k}$*, a lo largo de la curva* $z = x^2$*;* $y = 2x + 2$*, entre los puntos (0,2,0) y (1,4,1).*

Solución:

$$C = \int_{P_1}^{P_2} \vec{a}\cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} (a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz)$$

Como:

$$a_x = x^2\, y; \quad a_y = -(x - 1); \quad a_z = x^2\, z$$

y además:

$$y = 2x + 2; \quad z = x^2$$

tenemos:

$$dy = 2\, dx; \quad dz = 2x\, dx$$

Sustituyendo en la expresión de la circulación:

$$C = \int_{P_1}^{P_2} [x^2\, y\, dx - (x - 1)\, dy + x^2\, z\, dz] =$$

$$= \int_0^1 [x^2\,(2x + 2)\, dx - (x - 1)\, 2\, dx + x^2 \cdot x^2 \cdot 2x\, dx] =$$

$$= \int_0^1 (2x^5 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 2)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^6}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_0^1 = \boxed{\frac{5}{2} = 2{,}5}$$

13.6. ***¿Qué relación hay entre derivada direccional y gradiente de un campo escalar?***

Solución: El vector gradiente tiene la dirección de la máxima variación de la función que define el campo. Su módulo, por tanto, es una derivada direccional.

13.7. ***Dados los vectores: $\vec{A} = 3x\,\vec{i} + z\,\vec{j} + 2y\,\vec{k}$ y $\vec{B} = 2\,\vec{i} + y\,\vec{j} - 3x\,\vec{k}$, hallar el gradiente de su producto escalar en el punto (2,1,2).***

Solución: El producto escalar de ambos vectores es:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 6x + y\,z - 6x\,y$$

y el gradiente de dicho producto:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{\delta\,(\vec{A} \cdot \vec{B})}{\delta x}\,\vec{i} + \frac{\delta\,(\vec{A} \cdot \vec{B})}{\delta y}\,\vec{j} + \frac{\delta\,(\vec{A} \cdot \vec{B})}{\delta z}\,\vec{k} =$$

$$= (6 - 6y)\,\vec{i} + (z - 6x)\,\vec{j} + y\,\vec{k}$$

Por tanto:

$$\boxed{\overrightarrow{\textbf{grad}}\,(\vec{A} \cdot \vec{B})_{(2,1,2)} = -10\,\vec{j} + \vec{k}}$$

13.8. *Sabiendo que $\vec{A} = 3x^2y\ \vec{i} - 4x^3z\ \vec{j} + 8xy^2z\ \vec{k}$ y $V = 3xy^2 - 6y^3z^2$, obtener los valores de $\vec{A} \cdot \nabla V$ y $\vec{A} \wedge \nabla V$ en el punto (2,1,1).*

Solución: Como:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \nabla V = \frac{\delta V}{\delta x}\ \vec{i} + \frac{\delta V}{\delta y}\ \vec{j} + \frac{\delta V}{\delta z}\ \vec{k} =$$
$$= 3y^2\ \vec{i} + (6xy - 18y^2z^2)\ \vec{j} - 12y^3z\ \vec{k}$$

tenemos que:

$$\vec{A}_{(2,1,1)} = 12\ \vec{i} - 32\ \vec{j} + 16\ \vec{k}$$
$$\nabla V_{(2,1,1)} = 3\ \vec{i} - 6\ \vec{j} - 12\ \vec{k}$$

Por lo tanto:

$$(\vec{A} \cdot \nabla V)_{(2,1,1)} = 12 \cdot 3 + (-32) \cdot (-6) + 16 \cdot (-12) = \boxed{36}$$

$$(\vec{A} \wedge \nabla V)_{(2,1,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 12 & -32 & 16 \\ 3 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \boxed{480\ \vec{i} + 192\ \vec{j} + 24\ \vec{k}}$$

13.9. *Calcular:*

$$\frac{\delta}{\delta t}\ \overrightarrow{grad}\ \varnothing$$

siendo:

$$\varnothing = x^2 + y^3 - z + 3t^2 + 2tx - t + 5$$

Solución: Calcularemos, en primer lugar, el vector $\overrightarrow{\text{grad}}\ \varnothing$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ \varnothing = \frac{\delta \varnothing}{\delta x}\ \vec{i} + \frac{\delta \varnothing}{\delta y}\ \vec{j} + \frac{\delta \varnothing}{\delta z}\ \vec{k} =$$
$$= (2x + 2t)\ \vec{i} + 3y^2\ \vec{j} - \vec{k}$$

Por último:

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta t}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \varnothing = 2\ \vec{i}}$$

13.10. *Calcular la circulación del gradiente de la magnitud escalar $\varnothing = x^3 + y^2 + z$, desde el extremo inferior al superior del diámetro vertical de la circunferencia de radio $r = 4$, que tiene como centro el punto P (3,3,2) y está situada en el plano determinado por su centro y el eje OZ.*

Solución: Calcularemos en primer lugar $\overrightarrow{\text{grad}}\ \varnothing$ (véase problema anterior):

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ \varnothing = 3x^2\ \vec{i} + 2y\ \vec{j} + \vec{k}$$

La circulación de este vector vendrá dada por:

$$C = \int_{P_1}^{P_2} \overrightarrow{\text{grad}}\, \varnothing \cdot d\vec{s} = \int_{P_1}^{P_2} (3x^2\, dx + 2y\, dy + dz) =$$

$$= \int_{-2}^{6} dz = [z]_{-2}^{6} = \boxed{8}$$

13.11. *¿Qué diferencia hay entre un sistema de fuerzas y un campo de fuerzas?*

Solución: Sistema de fuerzas es el conjunto de fuerzas que actúan simultáneamente sobre un cuerpo, mientras que un campo de fuerzas es la región del espacio en cada uno de cuyos puntos se ponen de manifiesto valores iguales o distintos de una fuerza.

13.12. ***Calcular el flujo total que atraviesa la superficie de un cubo de arista la unidad, situado como indica la figura 13.1, en el campo vectorial*** $\vec{a} = 2y\,\vec{j}$.

Solución: Dado que la dirección del vector $\vec{a}$ es la del eje OY, el flujo sólo atraviesa las caras de la izquierda y la derecha del cubo. Para la cara de la izquierda y = 1 y, en consecuencia:

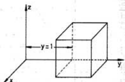


Fig. 13.1

$$\Phi_1 = \int \vec{a}_1 \cdot d\vec{s} = \vec{a}_1 \cdot \int d\vec{s} = 2\,\vec{j} \cdot (-\vec{j}) = -2 \text{ unidades}$$

Para la de la derecha, y = 2, y por lo tanto:

$$\Phi_2 = \int \vec{a}_2 \cdot d\vec{s} = \vec{a}_2 \cdot \int d\vec{s} = 4\,\vec{j} \cdot \vec{j} = 4 \text{ unidades}$$

Por consiguiente, el flujo total valdrá:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \boxed{\textbf{2 unidades}}$$

Ya que el flujo es positivo, dentro de la superficie del cubo habrá más fuentes que sumideros.

13.13. ***Dada la magnitud escalar*** $V = x^3 + 2y^2 + z$***, hallar el momento de su gradiente en el punto (1,1,1) respecto al origen de coordenadas.***

Solución: El vector $\overrightarrow{\text{grad}}$ V (véanse ejercicios anteriores) será:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = 3x^2\,\vec{i} + 4y\,\vec{j} + \vec{k};\ \overrightarrow{\text{grad}}\, V_{(1,1,1)} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + \vec{k}$$

El momento de este vector respecto al origen de coordenadas es:

$$\vec{M}_o = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{grad}\, V_{(1,1,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}}$$

13.14. ***Obtener el valor máximo de la derivada de la función $V = x^2\, y\, z^2$ en el punto (1,1,2) y calcular la dirección en que tiene lugar esta variación.***

Solución: Como la dirección de máxima variación de una función es la del vector gradiente, tenemos:

$$\overrightarrow{grad}\, V = \frac{\delta V}{\delta x}\, \vec{i} + \frac{\delta V}{\delta y}\, \vec{j} + \frac{\delta V}{\delta z}\, \vec{k} = 2xy\, z^2\, \vec{i} + x^2 z^2\, \vec{j} + 2x^2 yz\, \vec{k}$$

En el punto (1,1,2):

$$\overrightarrow{grad}\, V_{(1,1,2)} = 8\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$$

El módulo del vector gradiente en el punto considerado es:

$$\left|\overrightarrow{grad}\, V\right| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 4^2} = \boxed{9{,}8}$$

y sus cosenos directores:

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{8}{9{,}8} = 0{,}82; \quad \cos \beta = \frac{4}{9{,}8} = 0{,}41; \quad \cos \gamma = \frac{4}{9{,}8} = 0{,}41}$$

13.15. ***¿Hay alguna relación entre una fuerza conservativa y la energía potencial?***

Solución: $\vec{F} = \overrightarrow{grad}\, E_p$.

¿Puede no ser nula la circulación de un vector a lo largo de una curva cerrada?

Solución: En el caso de campos no conservativos.

13.16. ***Determinar el vector gradiente del campo escalar:***

$$V = 2xz + 4y - 5$$

¿Es conservativo este campo?

Solución: El gradiente de V viene dado por:

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, V = 2z\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 2x\,\vec{k}}$$

Puesto que:

$$E_x = -2z; \quad E_y = -4; \quad E_z = -2x$$

se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\delta E_x}{\delta y} = 0 \\ \dfrac{\delta E_y}{\delta x} = 0\end{array}\right\} \quad \frac{\delta E_x}{\delta y} = \frac{\delta E_y}{\delta x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\delta E_x}{\delta z} = -2 \\ \dfrac{\delta E_z}{\delta x} = -2\end{array}\right\} \quad \frac{\delta E_x}{\delta z} = \frac{\delta E_z}{\delta x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\delta E_y}{\delta z} = 0 \\ \dfrac{\delta E_z}{\delta y} = 0\end{array}\right\} \quad \frac{\delta E_y}{\delta z} = \frac{\delta E_z}{\delta y}$$

Por lo tanto, **el campo es conservativo.**

13.17. ***Obtener la expresión del gradiente del campo escalar:***

$$V = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

¿Es conservativo ese campo?

Solución: Como:

$$E_x = -\frac{\delta V}{\delta x} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_y = -\frac{\delta V}{\delta y} = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = -\frac{\delta V}{\delta z} = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

resulta:

$$\boxed{\overrightarrow{\textbf{grad}}\ \mathbf{V} = \nabla \mathbf{V} = -\frac{\mathbf{x}\,\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\,\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z}\,\vec{\mathbf{k}}}{(\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2)^{3/2}}}$$

Por otra parte:

$$\frac{\delta E_x}{\delta y} = \frac{-3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{\delta E_y}{\delta x}$$

$$\frac{\delta E_x}{\delta z} = \frac{-3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{\delta E_z}{\delta x}$$

$$\frac{\delta E_y}{\delta z} = \frac{-3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{\delta E_z}{\delta y}$$

Por lo tanto, **el campo es conservativo.**

13.18. *¿Es conservativo el siguiente campo de fuerzas?:*

$$\vec{F} = 2xy^2z\,\vec{i} + (2x - y^2)\,\vec{j} + (xz - y^2)\,\vec{k}$$

Solución: Como:

$$F_x = 2xy^2z; \quad F_y = 2x - y^2; \quad F_z = xz - y^2$$

se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta F_x}{\delta y} &= 4xyz \\ \frac{\delta F_y}{\delta x} &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \frac{\delta F_x}{\delta y} \neq \frac{\delta F_y}{\delta x}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta F_x}{\delta z} &= 2xy^2 \\ \frac{\delta F_z}{\delta x} &= z \end{aligned}\right\} \quad \frac{\delta F_x}{\delta z} \neq \frac{\delta F_z}{\delta x}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta F_y}{\delta z} &= 0 \\ \frac{\delta F_z}{\delta y} &= -2y \end{aligned}\right\} \quad \frac{\delta F_y}{\delta z} \neq \frac{\delta F_z}{\delta y}$$

En consecuencia, **el campo no es conservativo.**

13.19. *Hallar el valor del campo conservativo cuyo potencial viene dado por la expresión:*

$$V = 3\,e^{2x} - 2\cos y + x^2$$

Solución:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\frac{\delta V}{\delta x}\,\vec{i} - \frac{\delta V}{\delta y}\,\vec{j} - \frac{\delta V}{\delta z}\,\vec{k} =$$

$$= \boxed{(6\,e^{2x} + 2x)\,\vec{i} - 2\,\text{sen}\,y\,\vec{j}}$$

13.20. *¿Existe alguna relación geométrica entre las líneas de fuerza de un campo conservativo y las superficies escalares de la energía potencial?*

Solución: Las líneas de fuerza son perpendiculares a las superficies equipotenciales. En efecto, al desplazar un cuerpo sobre una superficie equipotencial, el trabajo realizado:

$$W_1^2 = (V_2 - V_1)$$

será nulo, ya que $V_1 = V_2$. De aquí se deduce, por propia definición del trabajo, que las líneas de fuerza, cuya dirección viene dada por la del vector intensidad de campo, han de ser perpendiculares a las superficies equipotenciales.

Como $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$; si W es nulo, **$\vec{F}$ y $\vec{s}$ habrán de ser perpendiculares.**

13.21. *¿Es conservativa la fuerza que al actuar sobre un muelle lo alarga rebasando el límite de elasticidad?*

Solución: Una vez rebasado el límite de elasticidad, el trabajo realizado por la fuerza se manifiesta como «trabajo de deformación no recuperable». Por tanto, la fuerza no es conservativa.

¿Producen variación de energía cinética las fuerzas conservativas?

Solución: En efecto. Dicha variación es igual y de signo contrario a la variación de energía potencial que experimenta el cuerpo sobre el que actúan las fuerzas conservativas.

13.22. *Calcular el campo de fuerzas asociado a la magnitud escalar:*

$$E_p = 3xy + 2z^2 - 2yz^2$$

así como el trabajo necesario para llevar una masa puntual desde el punto (0,0,3) al punto (0,0,1).

Solución: Los valores de F_x, F_y y F_z son:

$$F_x = -\frac{\delta E_p}{\delta x} = -3y$$

$$F_y = -\frac{\delta E_p}{\delta y} = -(3x - 2z^2) = 2z^2 - 3x$$

$$F_z = -\frac{\delta E_p}{\delta z} = -(4z - 4yz) = 4yz - 4z$$

Por tanto:

$$\boxed{\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k} = -3y\,\vec{i} + (2z^2 - 3x)\,\vec{j} + (4yz - 4z)\,\vec{k}}$$

El trabajo realizado para llevar una masa puntual desde el punto (0,0,3) al punto (0,0,1) viene dado por:

$$W = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz) =$$

$$= \int_3^1 -4z\, dz = \left[-2z^2\right]_3^1 = \boxed{\textbf{16 unidades de trabajo}}$$

También, dado que el campo es conservativo:

$$W = -\triangle E_P = E_{p_1} - E_{p_2} = (0 + 18 + 0) - (0 + 2 + 0) = \boxed{\textbf{16 unidades}}$$

13.23. ***Hallar los vectores unitarios perpendiculares en el punto (6,4,3) a las superficies: $x^2 + y^2 + z^2 = 61$; $xy + yz + xz = 54$ y el ángulo que forman ambas superficies en ese punto.***

Solución: Los vectores gradiente correspondientes a ambas superficies son perpendiculares a ellas:

$$\overrightarrow{grad}_1 = 2x\, \vec{i} + 2y\, \vec{j} + 2z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}_2 = (y + z)\, \vec{i} + (x + z)\, \vec{j} + (x + y)\, \vec{k}$$

Sus valores en el punto (6,4,3);

$$\overrightarrow{grad}_1 = 12\, \vec{i} + 8\, \vec{j} + 6\, \vec{k}$$

$$\overrightarrow{grad}_2 = 7\, \vec{i} + 9\, \vec{j} + 10\, \vec{k}$$

Como el vector unitario es el cociente de dividir el vector por su módulo:

$$\vec{u}_1 = \frac{12\, \vec{i} + 8\, \vec{j} + 6\, \vec{k}}{\sqrt{244}} = \boxed{\frac{\mathbf{6\, \vec{i} + 4\, \vec{j} + 3\, \vec{k}}}{\sqrt{\mathbf{61}}}}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{u}}_2 = \frac{\mathbf{7\, \vec{i} + 9\, \vec{j} + 10\, \vec{k}}}{\sqrt{\mathbf{230}}}}$$

El ángulo que forman ambas superficies en el punto (6,4,3) es el mismo que el que forman los vectores unitarios correspondientes en dicho punto.

Recordando el concepto de producto escalar:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{u_1 \cdot u_2} = \frac{\dfrac{42 + 36 + 30}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{230}}}{1 \cdot 1} = 0{,}9118$$

De donde:

$$\boxed{\alpha = \mathbf{24{,}25°}}$$

13.24. ***Hallar el vector gradiente del campo escalar:***

$$E_p\ (x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$$

¿Es conservativo este campo? Calcular el trabajo necesario para trasladar, en dicho campo, una masa puntual desde el punto P_1 (3,2,3) al P_2 (1,0,1).

Solución: Como:

$$F_x = -\frac{\delta E_p}{\delta x} = -3x^2;\quad F_y = -\frac{\delta E_p}{\delta y} = -3y^2;\quad F_z = -\frac{\delta E_p}{\delta z} = -3z^2$$

resulta:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{grad}}\ \mathbf{E_p} = \nabla \mathbf{E_p} = \frac{\delta \mathbf{E_p}}{\delta \mathbf{x}}\ \vec{\mathbf{i}} + \frac{\delta \mathbf{E_p}}{\delta \mathbf{y}}\ \vec{\mathbf{j}} + \frac{\delta \mathbf{E_p}}{\delta \mathbf{z}}\ \vec{\mathbf{k}} = \mathbf{3x^2}\ \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{3y^2}\ \vec{\mathbf{j}} + \mathbf{3z^2}\ \vec{\mathbf{k}}}$$

Se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta F_x}{\delta y} = 0 \\ \dfrac{\delta F_y}{\delta x} = 0 \end{array}\right\} \quad \frac{\delta F_x}{\delta y} = \frac{\delta F_y}{\delta x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta F_z}{\delta x} = 0 \\ \dfrac{\delta F_x}{\delta z} = 0 \end{array}\right\} \quad \frac{\delta F_z}{\delta x} = \frac{\delta F_x}{\delta z}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta F_y}{\delta z} = 0 \\ \dfrac{\delta F_z}{\delta y} = 0 \end{array}\right\} \quad \frac{\delta F_y}{\delta z} = \frac{\delta F_z}{\delta y}$$

Por consiguiente, **el campo es conservativo.**

$$W = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(z_2,y_2,z_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) =$$

$$= \int_3^1 -3x^2\ dx + \int_2^0 -3y^2\ dy + \int_3^1 -3z^2\ dz =$$

$$= \left[-x^3\right]_3^1 + \left[-y^3\right]_2^0 + \left[-z^3\right]_3^1 = \boxed{\mathbf{60\ unidades\ de\ trabajo}}$$

También, dado que el campo es conservativo:

$$W = -\triangle E_p = E_{p_1} - E_{p_2} = 27 + 8 + 27 - (1 + 0 + 1) =$$

$$= \boxed{\mathbf{60\ unidades\ de\ trabajo}}$$

13.25. *Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = 3xy\ \vec{i} - 2y^2\ \vec{j}$ (SI) cuando, al actuar sobre una partícula material, la obliga a recorrer la trayectoria definida por el trapecio OABCO, situado (véase fig. 13.2) en el plano XY. Las coordenadas de posición de cada uno de los vértices están expresadas en metros. ¿Será conservativa dicha fuerza?*

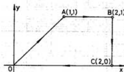


Fig. 13.2

Solución: En primer lugar, considerando que $\vec{F} = 3xy\ \vec{i} - 2y^2\ \vec{j}$ y $d\vec{s} = dx\ \vec{i} + dy\ \vec{j}$, tenemos:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint (3xy \cdot dx - 2y^2 \cdot dy)$$

Tras esto, vamos a calcular el trabajo realizado cuando la partícula se desplaza a lo largo de cada uno de los lados del trapecio.

Para la recta OA, y = x, dy = dx, y, por lo tanto:

$$W_O^A = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (3xy \cdot dx - 2y^2 \cdot dy) = \int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ \text{J}$$

En la recta AB, y = 1, dy = 0. En consecuencia:

$$W_A^B = \int_{(1,1)}^{(2,1)} (3xy \cdot dx - 2y^2 \cdot dy) = \int_1^2 3x \cdot dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{9}{2}\ \text{J}$$

Siguiendo ahora la trayectoria BC, x = 2, dx = 0; luego:

$$W_B^C = \int_{(2,1)}^{(2,0)} (3xy \cdot dx - 2y^2 \cdot dy = \int_1^0 -2y^2\, dy = -\left[\frac{2y^3}{3}\right]_1^0 = \frac{2}{3}\ \text{J}$$

Por último, en la recta CO, y = 0, dy = 0, F = 0, y por lo tanto:

$$W_C^O = 0\ \text{J}$$

El trabajo total que la fuerza realiza sobre la partícula material a lo largo del perímetro del trapecio es la suma de los trabajos parciales efectuados en cada uno de los lados:

$$W = W_O^A + W_A^B + W_B^C + W_C^O = \frac{1}{3}\ \text{J} + \frac{9}{2}\ \text{J} + \frac{2}{3}\ \text{J} + 0\ \text{J} = \boxed{\frac{11}{2}\ \text{J}}$$

Dado que $W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0$, **la fuerza $\vec{F} = 3xy\ \vec{i} - 2y^2\ \vec{j}$ no es conservativa.**

14. CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

FORMULARIO-RESUMEN

LEY DE NEWTON DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

$$\vec{F} = -G\,\frac{m \cdot m'}{r^3} \cdot \vec{r} \quad ; \quad F = G\,\frac{m \cdot m'}{r^2}$$

G (constante de gravitación universal) = $6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$

TERCERA LEY DE KEPLER

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} = \ldots = cte$$

$T_1, T_2, \ldots$ = períodos de revolución de cada planeta.

$R_1, R_2, \ldots$ = semiejes mayores de sus órbitas respectivas.

PERÍODO DE REVOLUCIÓN DE UN PLANETA

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{G \cdot M}}$$

M = masa del Sol.

R = distancia entre los centros del Sol y del planeta.

INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO

$$\vec{g} = -G\,\frac{M}{r^3} \cdot \vec{r} \quad ; \quad g = G\,\frac{M}{r^2}$$

VARIACIONES DE g

Con pequeñas alturas: $g = g_o \cdot \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)$

Con grandes alturas: $g = \frac{g_o}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2}$

Con la profundidad: $g = g_o \cdot \left(1 - \frac{h}{R_T}\right)$

h = altura o profundidad.
R_T = radio de la Tierra.
g_o = valor de la gravedad en la superficie de la Tierra.

POTENCIAL EN UN PUNTO DEL CAMPO GRAVITATORIO

$$V = -G \cdot \frac{M}{r}$$

COHETES Y SATÉLITES ARTIFICIALES

Velocidad orbital: $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}$

Velocidad de escape: $v = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{R}}$

14. CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

14.1. ***Hace años publicó la prensa que los astronautas, en su viaje espacial, habían salido del campo gravitatorio terrestre. ¿Es totalmente correcta esta expresión? ¿Por qué?***

Solución: El campo gravitatorio, al igual que el campo eléctrico, es **ilimitado;** de ahí que no sea del todo correcta la expresión utilizada. Lo que sucede es que a una distancia suficientemente alejada de la Tierra la intensidad del campo gravitatorio terrestre es pequeñísima y prácticamente no se dejan sentir sus efectos.

Por otra parte, el campo gravitatorio terrestre se ve afectado por la acción de otros campos gravitatorios (ejemplo: el lunar), y puede darse el caso de que ambos campos anulen sus efectos sobre un tercer cuerpo (en este ejemplo, los astronautas) al ser las intensidades de campo, en un determinado punto, iguales en su valor y de sentidos contrarios.

14.2. ***La Luna y la Tierra crean, respectivamente, su propio campo gravitatorio. ¿Qué debiera cumplirse para que un cuerpo situado entre ambos cuerpos celestes no estuviese sometido a fuerza alguna?***

Solución: La intensidad debida al campo gravitatorio terrestre y la debida al campo gravitatorio lunar, en ese punto, han de ser iguales en valor, pero de sentidos contrarios. Entonces se cumplirá que:

$$E_T - E_L = 0$$

14.3. ***El peso de un cuerpo viene dado por la expresión $P = m \cdot g$, y su valor se determina experimentalmente con un dinamómetro.***

Si se dispone de una balanza y de un dinamómetro muy sensibles y con aquélla se mide la masa de un objeto que resulta ser de 25 kg en la Tierra, ¿qué señalarán la balanza y el dinamómetro si la medida se efectúa a 2 000 m de altitud sobre la superficie terrestre?

Solución: La balanza señalaría el mismo valor en cualquier punto, puesto que la masa es una propiedad constante del cuerpo. En este caso: **25 kg.**

Para saber lo que indicaría el dinamómetro hemos de conocer previamente el valor de g en los puntos considerados:

a) En la superficie terrestre:

$$g_o = 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 9{,}81\ \text{N/kg}$$

b) A 2 000 metros de altura:

$$g = \frac{g_o}{(1 + h/R_T)^2} = \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{\left(1 + \dfrac{2\ 000\ \text{m}}{6\ 370\ 000\ \text{m}}\right)^2} = 9{,}8038\ \text{m/s}^2 = 9{,}8038\ \text{N/kg}$$

Por consiguiente, el dinamómetro señalará:

a) En la superficie terrestre:

$$P = m \cdot g = 25 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ N/kg} = \boxed{245{,}25 \text{ N}}$$

b) A 2 000 m de altura:

$$P = m \cdot g = 25 \text{ kg} \cdot 9{,}8038 \text{ N/kg} = \boxed{245{,}096 \text{ N}}$$

14.4. ***El valor promedio del radio terrestre es 6 370 km. Calcular la intensidad del campo gravitatorio:***

a) En un punto situado a una altura igual a la mitad del radio terrestre.
b) A una altura doble de la anterior.

Solución: Aplicando la fórmula que relaciona g_o (valor de g en la superficie terrestre) con la altura:

$$g = \frac{g_o}{(1 + h/R_T)^2}$$

y sustituyendo datos en cada caso, se tiene:

a)

$$g = \frac{9{,}81 \text{ m/s}^2}{(1 + 0{,}5\ R_T/R_T)^2} = 4{,}36 \text{ m/s}^2 = \boxed{4{,}36 \text{ N/kg}}$$

b)

$$g = \frac{9{,}81 \text{ m/s}^2}{(1 + R_T/R_T)^2} = 2{,}45 \text{ m/s}^2 = \boxed{2{,}45 \text{ N/kg}}$$

14.5. ***¿Cuánto vale la masa de la Tierra si su radio es 6 370 km y un dinamómetro colocado en la superficie terrestre indica que el peso de un cuerpo cuya masa es 80 kg, vale 800 N?***

Solución: Aplicando la ley general de la gravitación universal de Newton:

$$F = G\ \frac{M_T \cdot m'}{R_T^2}$$

y sustituyendo datos:

$$800 \text{ N} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{M_T \cdot 80 \text{ kg}}{(6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}$$

se tiene para M_T (masa de la Tierra) el valor de $\mathbf{6{,}0835 \cdot 10^{24}}$ **kg.**

14.6. ***Si un satélite artificial está a 500 km de altura y describe una órbita circular perfecta, ¿qué velocidad debe poseer?***

Solución: La velocidad lineal del satélite habrá de ser tal que la fuerza centrípeta que le obligue a describir la órbita sea el peso del satélite en esa altura.

El valor de g a 500 km de altura es:

$$g = \frac{9{,}81 \text{ N/kg}}{(1 + 5 \cdot 10^5 \text{ m}/6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 8{,}434 \text{ N/kg}$$

Como el peso del cuerpo (satélite) ha de ser igual a la fuerza centrípeta:

$$mg = \frac{v^2}{r}$$

donde r = 6 370 km + 500 km = 6 870 km = $6{,}87 \cdot 10^6$ m, despejando v y sustituyendo datos se tiene:

$$\boxed{\mathbf{v = 7\,612\ m/s}}$$

14.7. ***Un bloque de 5 toneladas dista de otro, de masa 1 tonelada, una distancia de 5 m. Este segundo bloque se apoya sobre un suelo horizontal, cuyo coeficiente de rozamiento contra él vale 0,02. Explicar razonadamente por qué el segundo bloque no se mueve hacia el primero.***

Solución: La fuerza gravitatoria con que el primer bloque atrae hacia sí el segundo viene dada por:

$$F = G \cdot m \cdot m'/r^2 = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot$$
$$\cdot\ 5\,000 \text{ kg} \cdot 1\,000 \text{ kg}/5^2 \text{ m}^2 = 1{,}33 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

La fuerza de rozamiento que impide el movimiento del segundo bloque hacia el primero vale:

$$F_r = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g = 0{,}02 \cdot 1\,000 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 196 \text{ N}$$

que es $1{,}47 \cdot 10^7$ veces mayor que la fuerza gravitatoria que favorece dicho movimiento.

14.8. ***La masa del Sol, es aproximadamente, 1,98 · 10³⁰ kg y el radio de la órbita, supuesta circular, que describe Júpiter alrededor del Sol mide 7,78 · 10¹¹ m. Deducir el período del movimiento orbital de Júpiter.***

Solución:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{G \cdot M}} = 2\pi \sqrt{\frac{(7{,}78 \cdot 10^{11})^3 \text{ m}^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 1{,}98 \cdot 10^{30} \text{ kg}}} =$$
$$= \boxed{\mathbf{3{,}75 \cdot 10^8\ s = 11{,}89\ años}}$$

14.9. ***Si un cuerpo pesa 100 N cuando está en la superficie terrestre, ¿a qué altura pesará la mitad?***

Solución: El cuerpo pesará la mitad (50 N) en aquel punto donde:

$$g = \frac{9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{2} = 4{,}905 \text{ m/s}^2 = 4{,}905 \text{ N/kg}$$

y como:

$$g = \frac{g_o}{(1 + h/R_T)^2}$$

se ha de cumplir que:

$$\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2 = 2$$

Por tanto:

$$1 + \frac{h}{R_T} = 1{,}4142$$

de donde:

$$h = R_T \cdot 0{,}4142 = 6\ 370 \text{ km} \cdot 0{,}4142 = \boxed{\mathbf{2\ 638{,}45\ km}}$$

14.10. ***La masa de la Luna es 0,0123 veces la masa de la Tierra, y su radio es 0,25 veces el radio terrestre. ¿Qué masa habría que colocar en la luna para que pesase lo mismo que pesa en la Tierra un cuerpo de masa 500 gramos?***

Solución: El peso en la Tierra de un cuerpo de masa 500 g es:

$$P = mg = 0{,}5 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ N/kg} = 4{,}905 \text{ N}$$

El valor de g en la Tierra es:

$$g_{Tierra} = G\ \frac{M_T}{R_T^2}$$

y en la Luna:

$$g_{Luna} = G\ \frac{M_L}{R_L^2} = G\ \frac{0{,}0123\ M_T}{(0{,}25\ R_L)^2}$$

Dividiendo miembro a miembro ambas expresiones y despejando g_{Luna}, se tiene:

$$g_{Luna} = 1{,}93 \text{ N/kg}$$

Como el peso del cuerpo de masa m en la Luna ha de ser igual al peso de una masa de 500 g en la Tierra, se tiene:

$$4{,}905 \text{ N} = \text{m} \cdot 1{,}93 \text{ N/kg}$$

de donde:

$$\text{m} = 4{,}905 \text{ N}/1{,}93 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1} = \boxed{\mathbf{2{,}54\ kg}}$$

14.11. ***La masa de la Luna es 1/81 la masa de la Tierra, y su radio es 1/4 el radio terrestre. ¿Cuánto vale g en la Luna?***

Solución: La expresión general que permite calcular el valor de g es:

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

Como:

a) La masa de la Tierra es 81 veces mayor que la de la Luna:

$$M_T = 81\ M_L$$

b) El radio de la Tierra es 4 veces mayor que el lunar:

$$R_T = 4\ R_L$$

El valor de g en la superficie de la Tierra es:

$$9{,}81 \text{ m/s}^2 = G \frac{M_T}{R_T^2} = G \frac{81\ M_L}{(4\ R_L)^2} \qquad [1]$$

y en la superficie lunar:

$$g = G \frac{M_L}{R_L^2} \qquad [2]$$

Dividiendo miembro a miembro las expresiones [1] y [2], resulta:

$$\frac{9{,}81 \text{ m/s}^2}{g} = \frac{81\ M_L/16\ R_L^2}{M_L/R_L^2} = \frac{81}{16}$$

de donde:

$$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{16}{81} = \boxed{\mathbf{1{,}94\ m/s^2 = 1{,}94\ N/kg}}$$

14.12. ***La masa del Sol es 324 440 veces mayor que la masa de la Tierra y su radio 108 veces mayor. Si fuera posible lanzar un proyectil verticalmente hacia arriba desde la superficie solar y se disparase con una velocidad de 200 m/s, ¿qué altura máxima alcanzaría?***

Solución: Habrá que calcular previamente el valor de g en el Sol. Para ello seguiremos un razonamiento análogo al del problema anterior:

$$9{,}81\ \text{m/s}^2 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \qquad [1]$$

$$g_{Sol} = G \cdot \frac{324\,440\ M_T}{(108\ R_T)^2} \qquad [2]$$

Dividiendo miembro a miembro las expresiones [1] y [2] y despejando g_{Sol}, se tiene:

$$g_{Sol} = 272{,}87\ \text{m/s}^2$$

El problema se reduce ahora al caso de un tiro vertical hacia arriba con velocidad inicial de 200 m/s y aceleración negativa de $-272{,}87$ m/s².

La altura máxima que alcanza el proyectil viene dada por:

$$Y = \frac{v^2 - v_o^2}{2\ g} = \frac{0 - (200\ \text{m/s})^2}{2\ (-272{,}87\ \text{m/s}^2)} = \boxed{73{,}3\ \text{m}}$$

Lógicamente también se llegaría al mismo resultado aplicando las ecuaciones generales del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$v = v_o + a \cdot t$$

$$s = s_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2}\ a \cdot t^2$$

en las que, en este caso: $v = 0$, $v_o = 200$ m/s y $a = -272{,}87$ m/s².

14.13. ***Un satélite meteorológico artificial gira a 10 000 km de altura sobre la superficie de la Tierra. ¿Cuál es el período de su rotación? (Tómese como valor del radio de la Tierra, $R_T = 6{,}3 \cdot 10^6$ m.)***

Solución: Sea m la masa del satélite, h = 10 000 km la altura sobre la superficie de la Tierra a la que gira, T su período de rotación y $g_0 = 9{,}8\ \text{ms}^{-2}$ el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre. El peso del satélite ($F = m \cdot g_o \left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)^2$) le comunica una aceleración centrípeta, de valor: $a_c = \omega^2\ (R_T + h)$. Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica, tenemos:

$$m \cdot g_o \cdot \left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)^2 = m \cdot \omega^2 \cdot (R_T + h) = \frac{4\pi^2}{T^2}\ m \cdot (R_T + h)$$

de donde:

$$T = \frac{2\pi}{R_T} \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_o}}$$

De acuerdo con los datos del enunciado del problema, sustituyendo en la expresión anterior, resulta:

$$T = \frac{6,28}{6,3 \cdot 10^6 \text{ m}} \sqrt{\frac{(6,3 \cdot 10^6 \text{ m} + 10 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} =$$

$$= \boxed{20\,970 \text{ s} = 5 \text{ h } 49 \text{ min } 30 \text{ s}}$$

14.14. ***La masa de la Luna es, aproximadamente, 6,7 · 10²² kg y su distancia a la Tierra, unas 200 000 millas.***

¿Con qué fuerza, medida en toneladas peso, se atraen la Tierra y la Luna?

Solución: Recordemos, pues ya se explicó en problemas anteriores, que la masa de la Tierra es $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg y que una milla equivale a 1 852 m.

La fuerza de atracción entre la Tierra y la Luna se obtiene por aplicación de la ley de la gravitación universal de Newton:

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 6,7 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(2 \cdot 10^5 \cdot 1,852 \cdot 10^3 \text{ m})^2} =$$

$$= 1,9 \cdot 10^{20} \text{ N} = \boxed{1,9 \cdot 10^{16} \text{ toneladas peso}}$$

14.15. *La masa de la Luna es 6,7 · 10²² kg y su radio 1,6 · 10⁶ m.*

a) ¿Qué distancia recorrerá en caída libre, durante un segundo, un cuerpo que se abandone en las proximidades de la superficie lunar?

b) Si un hombre es capaz de elevar su centro de gravedad 1,2 m en un salto efectuado en la superficie terrestre, ¿qué altura alcanzará en la Luna con el mismo impulso?

Solución: Calcularemos el valor de g en la Luna según el método explicado en ejercicios anteriores:

$$g_{Luna} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6,7 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(16 \cdot 10^5 \text{ m})^2} = 1,74 \text{ m/s}^2$$

a) Aplicando la fórmula correspondiente a la caída libre de los cuerpos:

$$h = v_o \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,74 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1 \text{ s})^2 = \boxed{0,87 \text{ m}}$$

b) Si el impulso del hombre en la Tierra y en la Luna es el mismo, también será la misma la velocidad inicial v_o del salto.

Como:

$$v_o^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

se cumplirá que:

$$2\, g_T \cdot h_T = 2 \cdot g_L \cdot h_L$$

de donde:

$$h_L = \frac{g_T \cdot h_T}{g_L} = \frac{9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 1{,}2 \text{ m}}{1{,}74 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = \boxed{6{,}8 \text{ m}}$$

14.16. *¿A qué distancia del centro de la Tierra la intensidad del campo gravitatorio es igual a su valor en un punto del interior de la Tierra equidistante del centro y de la superficie?*

Solución: En un punto del interior de la Tierra equidistante del centro y de la superficie:

$$g = g_o \frac{R_T - h}{R_T} = g_o \frac{R_T - R_T/2}{R} = \frac{g_o}{2}$$

y en un punto exterior a la Tierra, cuya distancia a la superficie terrestre llamamos h:

$$g = \frac{g_o}{(1 + h/R_T)^2} = \frac{g_o}{\left(1 + \frac{r - R_T}{R_T}\right)^2} = g_o\,(R_T/r)^2$$

siendo r la distancia del punto al centro de la Tierra:

$$r = R_T + h$$

y, por tanto:

$$h = r - R_T$$

De acuerdo con el enunciado del problema:

$$\frac{g_o}{2} = g_o\,(R_T/r)^2$$

de donde:

$$r = R_T\,\sqrt{2} = 6\,400 \text{ km} \cdot 0{,}4142 = \boxed{9\,050 \text{ km}}$$

14.17. ***Considerando que el radio terrestre mide 6 400 km, ¿qué velocidad debe llevar un satélite para recorrer una órbita circular a 320 km de altura sobre la Tierra?***

Solución: La velocidad lineal del satélite habrá de ser tal, que la fuerza centrípeta que le obligue a describir la órbita sea el peso del satélite a esa altura.

El valor de g a 320 km de altura es:

$$g = \frac{9{,}81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}}{(1 + 3{,}2\ 10^5 \text{ m}/6{,}4 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 8{,}898 \text{ N/kg}$$

Igualando las expresiones del peso y de la fuerza centrípeta:

$$mg = \frac{mv^2}{r}$$

donde:

$$r = 6\,400 \text{ km} + 320 \text{ km} = 6\,720 \text{ km} = 6{,}72 \cdot 10^6 \text{ m}$$

y despejando v, se tiene:

$$\boxed{v = 7{,}7 \cdot 10^3 \text{ m/s}}$$

14.18. ***La masa de Marte es la décima parte de la masa de la Tierra, y su radio la mitad del terrestre. ¿Cuál es el valor de g en Marte?***

Solución: El valor de g en la Tierra es:

$$9{,}81 \text{ m/s}^2 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \qquad [1]$$

y en Marte, teniendo en cuenta los datos del problema:

$$g = G \cdot \frac{0{,}1 \cdot M_T}{(0{,}5 \cdot R_T)^2} \qquad [2]$$

Dividiendo miembro a miembro las expresiones [1] y [2] y despejando g, se tiene:

$$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{4}{10} = \boxed{3{,}92 \text{ m/s}^2 = 3{,}92 \text{ N/kg}}$$

14.19. ***La masa de Júpiter es aproximadamente $2{,}25 \cdot 10^{27}$ kg y su radio $7{,}2 \cdot 10^7$ m. ¿Qué peso tendrá en Júpiter un cuerpo cuya masa en la Tierra sea de 80 kg? ¿Cuál será su masa en Júpiter?***

Solución: El valor de g en la superficie de Júpiter se deduce a partir de la expresión:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{2{,}25 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{(7{,}2 \cdot 10^7 \text{ m})^2} = 28{,}95 \text{ N/kg}$$

El peso, en Júpiter, de un cuerpo cuya masa sea 80 kg será:

$$P = m \cdot g = 80 \text{ kg} \cdot 28{,}95 \text{ N/kg} = \boxed{2{,}3 \cdot 10^3 \text{ N}}$$

14.20. ***¿Cuál será el período de oscilación de un péndulo simple en la superficie lunar si su período de oscilación en la Tierra es de un segundo?***

Solución: La expresión general del período de oscilación de un péndulo es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Si el péndulo oscila en la Tierra (en las condiciones del problema):

$$1\ s = 2\pi \sqrt{\frac{l}{9{,}81\ m/s^2}} \qquad [1]$$

y cuando oscila en la Luna:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{1{,}94\ m/s^2}} \qquad [2]$$

Recuérdese que el valor de g en la Luna fue deducido en ejercicios anteriores.

Dividiendo miembro a miembro las expresiones [1] y [2] y despejando T:

$$T = 1\ s \sqrt{\frac{9{,}81\ m/s^2}{1{,}94\ m/s^2}} = \boxed{\mathbf{2{,}25\ s}}$$

14.21. ***Deducir la distancia que separa al Sol de Júpiter sabiendo:***

a) El tiempo que tarda Júpiter en dar una vuelta alrededor del Sol es 12 veces mayor que el que tarda la Tierra.
b) La distancia de la Tierra al Sol es $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

Solución: De acuerdo con la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}$$

resulta:

$$R_2 = R_1 \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ m\ \sqrt[3]{12^2} = \boxed{\mathbf{7{,}86 \cdot 10^8\ km}}$$

14.22. ***¿Cuál será la masa del Sol si el radio medio de la órbita terrestre es $1{,}49 \cdot 10^8$ km y se supone que tarda exactamente 365 días en recorrerla?***

Solución: La fuerza gravitatoria entre el Sol y la Tierra comunica a ésta una aceleración centrípeta de valor:

$$a_c = \omega^2 \cdot R = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R$$

Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica, tenemos:

$$G \cdot \frac{M_S \cdot M_T}{R^2} = M_T \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R$$

de donde:

$$M_S = \frac{4\pi^2 R^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 (1{,}49 \cdot 10^{11}\ m)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} (365 \cdot 86\,400\ s)^2} =$$

$$= \boxed{1{,}97 \cdot 10^{30}\ kg}$$

14.23. ***(*) La Luna dista de la Tierra 384 000 km y su período de revolución alrededor de ésta es 27,32 días.***

¿Cuál será su período de revolución si se encontrase a 100 000 km de la Tierra?

Solución: De acuerdo con la tercera ley de Kepler y mediante un razonamiento análogo al explicado en el problema 14.21, tenemos:

$$T_2 = T_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} = 27{,}32\ \text{días} \cdot \sqrt{\left(\frac{100\,000\ km}{384\,000\ km}\right)^3} =$$

$$= \boxed{3{,}63\ \text{días}}$$

14.24. ***En la superficie de cierto planeta la aceleración debida a la gravedad vale 10 m/s², siendo el radio del planeta 2,58 · 10⁶ m. Deducir:***

a) La intensidad del campo gravitatorio en su superficie.
b) La masa del planeta.

Solución:

a) La intensidad en un punto de un campo gravitatorio coincide numéricamente con el valor de la aceleración debida a la gravedad en ese punto. Por tanto:

$$\boxed{E = 10\ N/kg}$$

b) Como:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

resulta:

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{10\ N/kg \cdot (2{,}58 \cdot 10^6\ m)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}} = \boxed{10^{24}\ kg}$$

14.25. *El valor de g en la Luna es 1,96 m/s², aproximadamente. Se sabe, además, que el radio terrestre es 4 veces mayor que el lunar. ¿En qué relación están, respectivamente, las masas de la Tierra y de la Luna?*

Solución: En la Luna:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2} = G \cdot \frac{M_L}{(R_T/4)^2} = G \cdot \frac{16 \cdot M_L}{R_T^2} \qquad [1]$$

En la Tierra:

$$g_T = G\,\frac{M_T}{R_T^2} \qquad [2]$$

Dividiendo miembro a miembro las expresiones [1] y [2], y despejando la relación M_T/M_L, se tiene:

$$\frac{M_T}{M_L} = 16 \cdot \frac{g_T}{g_L} = 16 \cdot \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{1{,}96\ \text{m/s}^2} = 80$$

La masa de la Tierra es 80 veces mayor que la masa de la Luna.

14.26. *Se pretende situar un satélite artificial de masa 50 kg en una órbita circular a 500 km de altura sobre la superficie terrestre. Calcular:*

a) La velocidad que ha de poseer el satélite para girar en esa órbita.
b) La energía cinética que posee en ella.
c) La energía que fue preciso comunicarle para situarlo a esa altura.
d) La energía total comunicada al satélite.

Solución:

a)

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R_T + h}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6\,370 + 500) \cdot 10^3\ \text{m}}} = \boxed{7{,}632 \cdot 10^3\ \text{m/s}}$$

b)

$$E_c = \frac{1}{2}\ mv^2 = \frac{1}{2}\ 50\ \text{kg} \cdot (7{,}6 \cdot 10^3)^2\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = \boxed{14{,}56 \cdot 10^8\ \text{J}}$$

c) La energía que es preciso comunicar para trasladar un cuerpo desde un punto A hasta otro punto B del campo gravitatorio terrestre (trabajo que hay que realizar contra las fuerzas del campo) viene dada por:

$$W = \int_A^B P \cdot dr = \int_A^B mg' \cdot dr$$

Si A es un punto de la superficie terrestre, el valor de g en él viene dado por:

$$g = G \cdot M/R_T^2$$

En otro punto exterior a la superficie terrestre:

$$g' = G \cdot M/R^2$$

Dividiendo miembro a miembro estas expresiones:

$$g'/g = R_T^2/R^2$$

De donde:

$$g' = g \cdot \frac{R_T^2}{R^2}$$

que, sustituido en la expresión del trabajo:

$$W = \int_A^B mg \frac{R_T^2}{R^2} dR = mg R_T^2 \int_A^B \frac{1}{R^2} dR = mg R_T^2 \left[-\frac{1}{R} \right]_A^B$$

Si el punto A está en la superficie terrestre y B es el que corresponde al punto donde se encuentra el satélite:

$$R_A = R_T; \quad R_B = R_T + h$$

Resultando, finalmente:

$$W = mg R_T \left(1 - \frac{R_T}{R_B}\right)$$

Sustituyendo en esta expresión los datos del problema:

$$W = 50 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m} \left(1 - \frac{6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m}}{6{,}87 \cdot 10^6 \text{ m}}\right) =$$

$$= 227{,}4 \cdot 10^6 \text{ J} = \boxed{2{,}274 \cdot 10^8 \text{ J}}$$

d) La energía total comunicada al satélite será la suma de la potencial gravitatoria y la cinética que posee:

$$E = 2{,}274 \cdot 10^8 \text{ J} + 14{,}56 \cdot 10^8 \text{ J} = \boxed{16{,}834 \cdot 10^8 \text{ J}}$$

14.27. ***¿Cuál habría de ser la duración de un día en nuestro planeta para que el peso de los cuerpos fuese nulo en el ecuador?***

Solución: Para que el peso de los cuerpos sea nulo en el ecuador terrestre se tiene que cumplir que:

$$g = \omega^2 \cdot R = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R$$

de donde:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 6{,}28 \sqrt{\frac{6{,}4 \cdot 10^6 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} =$$

$$= \boxed{\mathbf{5\,077\ s = 1\ h\ 24\ min\ 37\ s}}$$

14.28. ***Deducir de qué factores depende el flujo que atraviesa una superficie cerrada si la masa que crea el campo está encerrada en su interior.***

Solución: Supongamos (fig. 14.1) una masa m situada en un punto A en el interior de una superficie S. Si designamos por r la distancia que separa a A de cada punto de la superficie, la intensidad del campo en cada uno de esos puntos será un vector dirigido hacia A, cuyo valor vendrá dado por:

$$g = G \cdot \frac{m}{r^2}$$

Este vector $\vec{g}$ formará un cierto ángulo φ con el vector axial representativo de la superficie, perpendicular a ella y de sentido hacia afuera. Por tanto:

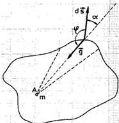


Fig. 14.1

$$\Phi = \int G \cdot \frac{m}{r^2} \quad dS \cos \varphi = -G \cdot m \int \frac{dS \cos \alpha}{r^2}$$

puesto que φ y α son ángulos suplementarios.

La expresión $\dfrac{dS \cdot \cos \alpha}{r^2}$ es el ángulo sólido elemental $d\Omega$, bajo el que se ve dS desde el punto A; la integral de esa expresión corresponde al ángulo sólido Ω, bajo el que se ve toda la superficie cerrada S.

En consecuencia, tendremos que $\Phi = -G \cdot m \cdot \Omega$.

Y como $\Omega = 4\pi$ para un punto situado en el interior de la superficie, nos queda, finalmente, que:

$$\boxed{\Phi = -4\pi \cdot G \cdot m}$$

Es decir: **el flujo gravitatorio a través de una superficie cerrada es directamente proporcional a la masa encerrada en el interior de dicha superficie.** La razón del signo menos (−) que aparece en la fórmula, nos indica que el interior de la superficie se comporta como un sumidero.

14.29. ***(*) Queremos colocar un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra, con un período de 2 horas. ¿A qué altura sobre su superficie debe de estar? Radio de la Tierra = 6,4 · 10⁶ m.***

Solución: Sea m la masa del satélite, h la altura sobre la superficie a la que debe estar, R_T el radio de la Tierra y $g_o = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre. La fuerza gravitatoria de Newton (que es realmente el peso del satélite a una altura h sobre la superficie: $F = m \cdot g_o \cdot \left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)^2$) le comunica a dicho satélite una aceleración centrípeta: $a_c = \omega^2 \cdot (R_T + h)$. Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica, tenemos:

$$m \cdot g_o \cdot \left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)^2 = m \cdot \omega^2 (R_T + h)$$

de donde:

$$h = \sqrt[3]{g_o \frac{R_T^2}{\omega^2}} - R_T = \sqrt[3]{\frac{g_o \cdot R_T^2 \cdot T^2}{4\pi^2}} - R_T =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (6,4 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot (7,2 \cdot 10^3 \text{ s})^2}{4\pi^2}} - 6,4 \cdot 10^6 \text{ m} =$$

$$= 1,68 \cdot 10^6 \text{ m} = \boxed{\mathbf{1\ 680\ km}}$$

14.30. ***(*) La masa de la Tierra es 80 veces la de la Luna y su radio 4 veces mayor. Calcular el valor de la aceleración del campo gravitatorio en la superficie lunar. Dato: $g_T = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.***

Solución: La aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es:

$$g_T = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

y en la de la Luna:

$$g_L = G \frac{M_L}{R_L^2}$$

Al dividir entre sí las dos expresiones anteriores se obtiene:

$$g_L = g_T \cdot \frac{M_L}{M_T} \cdot \left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2$$

Sustituyendo valores numéricos en la anterior igualdad, llegamos a:

$$g_L = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \frac{1}{80} \cdot 4^2 = \boxed{\mathbf{1,962\ m \cdot s^{-2}}}$$

14.31. *(*) Desde un lugar situado a una distancia del centro de la Tierra igual a las 5/4 partes del radio terrestre se desea poner en órbita un satélite terrestre. ¿Qué velocidad inicial hay que comunicarle, cuál será su período y cuál será el valor de la aceleración de la gravedad en su interior? ($g_o = 10\ m/s^2$; $R_T = 6\ 400\ km$).*

Solución: Para calcular la velocidad orbital del satélite (primera velocidad cósmica) no tenemos más que igualar la fuerza gravitatoria newtoniana de la Tierra y la fuerza centrífuga:

$$G \cdot \frac{M_T m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

De la igualdad anterior se deduce que:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Ya que, según el enunciado del problema, $r = \frac{5}{4} R_T$, y, como, además: $\frac{G \cdot M_T}{R_T^2} = g_o$, se concluye finalmente:

$$v = \sqrt{\frac{4}{5} g_o \cdot R_T} = \sqrt{\frac{4}{5} 10\ m/s^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ m} = \boxed{7\ 155\ m/s}$$

Calculemos ahora el período del satélite:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{5\pi R_T}{2v} = \frac{5 \cdot \pi \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ m}{2 \cdot 7{,}155 \cdot 10^3\ m/s} = \boxed{7\ 025\ s = 1\ h\ 57\ min\ 5\ s}$$

La aceleración de la gravedad en el interior del satélite es nula, por existir equilibrio entre las fuerzas gravitatoria y centrífuga.

14.32. *(*) En la superficie de cierto planeta, muy parecido a nuestra Tierra, la aceleración de la gravedad vale 10 m/s^2. El radio del planeta es $\sqrt{6{,}67} \cdot 10^3$ km. Se desea saber, razonadamente:*

a) La intensidad del campo gravitatorio, en N/kg, en su superficie.
b) La masa del planeta.
c) La fuerza de atracción del planeta sobre un astronauta de 100 kg que se encuentre a $\sqrt{6{,}67} \cdot 10^3$ km por encima de la superficie del planeta. Dato: Cte de gravitación universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

Solución:

a) Ya que la aceleración de la gravedad coincide numéricamente con la intensidad del campo gravitatorio, medidas ambas en el mismo punto, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie del planeta vale:

$$\boxed{E = 10\ N/kg}$$

b) Como $E = G \cdot \frac{M}{R^2}$, se deduce que:

$$M = \frac{E \cdot R^2}{G} = \frac{10\ N/kg \cdot (\sqrt{6{,}67} \cdot 10^6\ m)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}} = \boxed{10^{24}\ kg}$$

c) Aplicando la ley de Newton de la gravitación universal, tenemos:

$$F = G\,\frac{M \cdot m}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}\,\frac{10^{24}\ kg \cdot 10^2\ kg}{(2\sqrt{6{,}67} \cdot 10^6\ m)^2} = \boxed{250\ N}$$

14.33. ***a) Dibujar una gráfica de las variaciones de la aceleración de la gravedad, g, en función de la distancia, r, al centro de la Tierra.***

b) ¿A qué profundidad, x, hay que descender por debajo de la superficie terrestre para que un cuerpo pese lo mismo que a una altura h sobre ella?

Solución:

a) Designemos por R_T el radio de la Tierra y sea g_o el valor de la aceleración de la gravedad en un punto de su superficie.

Para un punto situado a una altura h sobre la superficie terrestre, y por consiguiente a una distancia $r = R_T + h$ de su centro:

$$g = g_o \cdot \left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)^2 = g_o \cdot \left(\frac{R_T}{r}\right)^2 \qquad [1]$$

Por el contrario, para un punto situado dentro de la Tierra, a una profundidad x por debajo de su superficie y a una distancia $r = R_T - x$ del centro, el valor de la aceleración de la gravedad es:

$$g = g_o \cdot \frac{R_T - x}{R_T} = g_o \cdot \frac{r}{R_T} \qquad [2]$$

Por lo tanto, la representación gráfica pedida es la que vemos en el diagrama de la figura 14.2, donde puede apreciarse que la aceleración de la gravedad tiene su valor máximo en la superficie de la Tierra.

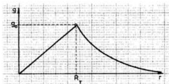


Fig. 14.2

b) Igualando los segundos miembros de [1] y [2] se tiene:

$$\left(\frac{R_T}{R_T + h}\right)^2 = \frac{R_T - x}{R_T}$$

de donde:

$$\boxed{x = R_T - \frac{R_T^3}{(R_T + h)^2}}$$

14.34. ***Supongamos que se pudiese perforar un túnel que atravesase la Tierra de extremo a extremo, pasando por su centro. Si se deja caer una partícula de masa m a través del túnel:***

a) ***Demostrar que su movimiento es armónico simple.***
b) ***Calcular el período de dicho movimiento.***
c) ***Determinar la velocidad de la partícula cuando pase por el centro de la Tierra.***

Solución:

a) Sea R_T el radio de la Tierra. Cuando la partícula se encuentra a una distancia r del centro la fuerza que actúa sobre ella es:

$$\vec{F} = -\frac{m \cdot g_o}{R_T} \cdot \vec{r} \qquad [1]$$

Analizando la expresión [1] podemos comprobar que la fuerza es proporcional y de signo contrario a $\vec{r}$, y ésta es la condición necesaria para que se trate de un movimiento armónico simple.

b) Este movimiento armónico simple tiene como constante recuperadora:

$$k = \frac{m \cdot g_o}{R_T}$$

En consecuencia, su período será:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m \cdot R_T}{m \cdot g_o}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g_o}}$$

Podemos expresar también el período en función de la densidad de la Tierra, ρ_T, y de la constante de gravitación universal, G, teniendo en cuenta que:

$$g_o = G \frac{M_T}{R_T^2} = G \frac{V_T \cdot \rho_T}{R_T^2} = G \frac{\frac{4}{3} \pi R_T^3 \cdot \rho_T}{R_T^2} = \frac{4\pi G \cdot \rho_T \cdot R_T}{3}$$

de donde:

$$\frac{R_T}{g_o} = \frac{3}{4\pi \cdot G \cdot \rho_T}$$

y, por consiguiente:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G \cdot \rho_T}}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g_o}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G \cdot \rho_T}}}$$

c) La velocidad de la partícula cuando pasa por el centro de la Tierra será la velocidad máxima del movimiento armónico:

$$v_c = v_{máx} = R_T \cdot \omega =$$

$$= R_T \cdot \frac{2\pi}{T} = R_T \cdot \frac{2\pi}{2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g_o}}} = R_T \sqrt{\frac{g_o}{R_T}} = \sqrt{R_T \cdot g_o}$$

O también:

$$v_c = v_{máx} = R_T \cdot \omega = R_T \cdot \frac{2\pi}{T} = R_T \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3\pi}{G \cdot \rho_T}}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T}}$$

$$\boxed{v_c = \sqrt{R_T \cdot g_o} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T}}}$$

14.35. ***(*) Calcúlese el potencial gravitatorio creado por una masa esférica de 100 kg y 2 m de diámetro, en un punto situado a 9 m de su superficie. ¿Cuál es la energía potencial de una masa de 1 kg situada en ese punto?*** ***($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²).***

Solución: El problema se puede enfocar desde dos puntos de vista diferentes, según cuál sea el origen de potenciales que se elija.

a) Si tomamos como origen de potenciales el infinito, el potencial gravitatorio en el punto considerado será:

$$V = -G \frac{M}{r} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{100\ \text{kg}}{10\ \text{m}} =$$

$$= \boxed{-6{,}67 \cdot 10^{-10}\ \text{J/kg}}$$

Calculemos ahora la energía potencial de una masa de 1 kg situada en ese punto:

$$E_p = m \cdot V = 1\ \text{kg} \cdot (-6{,}67 \cdot 10^{-10}\ \text{J/kg}) = \boxed{-6{,}67 \cdot 10^{-10}\ \text{J}}$$

b) Tomando como origen de potenciales la superficie de la masa esférica, tenemos:

$$V = -GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o}\right) =$$

$$= -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2 \cdot 100\ kg \left(\frac{1}{10\ m} - \frac{1}{1\ m}\right) = \boxed{\mathbf{6 \cdot 10^{-9}\ J/kg}}$$

$$E_p = m \cdot V = 1\ kg \cdot 6 \cdot 10^{-9}\ J/kg = \boxed{\mathbf{6 \cdot 10^{-9}\ J}}$$

15. CAMPO ELÉCTRICO

FORMULARIO-RESUMEN

Ley de Coulomb:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}; \quad F = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

		Sistema CGS	SI
k	Vacío	$k = 1$	$k = 9 \cdot 10^9$
	Medio cualquiera	$k = \frac{1}{\varepsilon}$	$k = \frac{9 \cdot 10^9}{\varepsilon}$

Fuerza que un sistema de cargas puntuales ejerce sobre una carga puntual:

$$\vec{F} = \Sigma \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} Q_1 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i}{r_{i_1}^3} \vec{r}_{i_1}; \ (r_{i_1} \neq 0)$$

Fuerza ejercida por una distribución continua de cargas:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \int_V \frac{Q_1 dQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \int_V \frac{dQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} =$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \int_V \frac{\rho \cdot dV}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Teorema de Gauss:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_a}$$

	Intensidad de campo eléctrico, $\vec{E} = \vec{F}/Q'$	Potencial eléctrico, V
Carga aislada	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$	$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r}$
Sistema de cargas	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$	$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i}{r_i}$
Distribución continua de cargas	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \int_V \frac{dQ}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$	$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \int_V \frac{dQ}{r}$

Esfera conductora cargada de radio R	**Intensidad de campo**	**Potencial**
En el interior	$E = 0$	$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R}$
En la superficie	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R^2} = \frac{\sigma}{3\varepsilon_a}$	$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R}$
En el exterior	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r^2}$	$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r}$

Esfera dieléctrica cargada de radio R	**Intensidad de campo**	**Potencial**
En el interior	$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{r}{R^3} = \frac{\rho}{3\varepsilon_a} r$	$V = \frac{Q}{8\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o R^3} \cdot (3R^2 - r^2)$
En la superficie	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_a} R$	$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R}$
En el exterior	$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r^2}$	$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R}$

Campo creado por un hilo conductor cargado de longitud infinita a una distancia r: $E = \frac{1}{2\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{\lambda}{r}$

Campo creado por un plano infinito cargado uniformemente $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_a}$

Teorema de Coulomb: Campo en un punto infinitamente próximo a la superficie de un conductor: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_a}$

ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA DE UN SISTEMA

Dos cargas: $E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r}$

n cargas: $E_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \sum_{\substack{1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} Q_i \cdot V_i$

RELACIÓN ENTRE EL CAMPO Y EL POTENCIAL

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V; \quad V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

15. CAMPO ELÉCTRICO

15.1. *¿Cómo se puede poner de manifiesto la existencia de estados eléctricos contrarios?*

Solución: Con un péndulo eléctrico y barras de vidrio y ebonita o ámbar.

Si se frota una varilla de vidrio y se acerca al péndulo. se observará que éste, una vez electrizado, es repelido por el vidrio frotado. Frotando después una varilla de ámbar, y acercándola al péndulo, se observará que es atraído por el ámbar.

Estas experiencias nos demuestran que la electricidad del vidrio es distinta de la del ámbar.

15.2. *¿Qué quiere decir que la permitividad relativa del vidrio es 6?*

Solución: Una carga eléctrica Q_1 actúa sobre otra Q_2, situada a cierta distancia en el vacío con una fuerza F; si entre ambas —colocadas a la misma distancia— se interpusiese vidrio, la fuerza de acción entre ellas sería seis veces menor.

15.3. *A veces, cuando bajamos de un automóvil y tocamos su carrocería, se nota una pequeña descarga. ¿A qué es debido? ¿Sucedería lo mismo un día lluvioso?*

Solución: Esta descarga se debe a la **electricidad estática** que se acumula en la carrocería del coche, producida por el rozamiento con el aire. En los días lluviosos no se produce este fenómeno, ya que la humedad aumenta la conductividad eléctrica del aire, con lo que las cargas generadas se van transmitiendo a él a medida que se producen.

15.4. *¿Por qué algunos camiones que transportan gasolina llevan arrastrando una cadena?*

Solución: Debido al frotamiento contra el aire, el camión se electriza; pudiendo producirse un salto de chispa entre el camión y el suelo y provocar un accidente. Colocando una cadena metálica entre el camión y el suelo se conducen a éste las cargas eléctricas, evitándose el posible salto de chispa.

15.5. *¿Qué sucede cuando te quitas el jersey en una habitación oscura? ¿Cómo se puede explicar?*

Solución: Habrás observado —sobre todo si llevas una camisa acrílica— que se produce una especie de restallido y, con frecuencia, pequeñas «luces». Esto es debido a la electrización por frotamiento que se origina al sacar el jersey; las «luces» no son otra cosa que el salto de chispa originado.

15.6. *¿Por qué en días húmedos suele fallar el encendido de los automóviles, en especial si las bujías están sucias?*

Solución: A causa de la suciedad, en especial los días húmedos, la porcelana de la bujía se hace algo conductora, originando que parte de la carga de la chispa se pierde a través de ella, en vez de descargarse a través del espacio vacío existente entre los electrodos. De esta forman la chispa es menos intensa e insuficiente para provocar el encendido del vapor de gasolina.

15.7. ***Hallar la ecuación de dimensiones de ε_o en el Sistema Internacional, según la expresión de Coulomb:***

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Solución:

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{F \cdot r^2}$$

Como $\frac{1}{4\pi\varepsilon}$ es un coeficiente adimensional, Q_1 y Q_2 son cargas eléctricas y r es una distancia, resulta:

$$[\varepsilon_o] = \left[\frac{Q_1 \cdot Q_2}{F \cdot r^2}\right] = \frac{(AT)^2}{MLT^{-2}L^2} = \frac{A^2T^2}{ML^3T^{-2}} = \boxed{M^{-1}L^{-3}T^4A^2}$$

15.8. ***Calcular con qué fuerza se repelen dos cargas puntuales positivas de 5 μC y 2 μC, situadas en el vacío a 3 mm de distancia.***

Solución: Aplicando la ley de Coulomb, tenemos:

$$F = 9 \cdot 10^9 \, \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\varepsilon \cdot r^2} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\,C \cdot 2 \cdot 10^{-6}\,C}{1 \cdot (3 \cdot 10^{-3}\,m)^2} =$$

$$= \boxed{10^4\,N}$$

15.9. ***Resolver el ejercicio anterior suponiendo que el medio interpuesto entre las cargas fuese mica, de constante dieléctrica relativa 5.***

Solución: En este caso:

$$F = 9 \cdot 10^9 \, \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\varepsilon \cdot r^2} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}\,C \cdot 2 \cdot 10^{-6}\,C}{5 \cdot (3 \cdot 10^{-3}\,m)^2} =$$

$$= \boxed{2 \cdot 10^3\,N}$$

15.10. ***Supón una carga puntual de 2 μC. ¿Qué fuerza de atracción ejercerá sobre otra carga de 3 000 uee, de signo contrario, situada en el vacío, a 3 cm de distancia?***

Solución: Previamente hemos de expresar todos los datos en unidades del Sistema Internacional:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = 2\ \mu C = 2 \cdot 10^{-6}\ C \\ Q_2 = 3\,000\ \text{uee} \cdot \dfrac{1\ C}{3 \cdot 10^9\ \text{uee}} = 10^{-6}\ C \\ r = 3\ \text{cm} = 3 \cdot 10^{-2}\ m \end{array}\right\} \text{(SI)}$$

Aplicando la ley de Coulomb:

$$F = 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}\ C \cdot 10^{-6}\ C}{1 \cdot (3 \cdot 10^{-2}\ m)^2} = \boxed{\mathbf{20\ N}}$$

15.11. *¿Cuál sería la fuerza de atracción en el problema anterior si el medio interpuesto entre las cargas fuese azufre? La permitividad relativa del azufre es 4.*

Solución: En este caso:

$$F = 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}\ C \cdot 10^{-6}\ C}{4 \cdot (3 \cdot 10^{-2}\ m)^2} = \boxed{\mathbf{5\ N}}$$

15.12. *Dos cargas eléctricas iguales, a 20 cm de distancia entre sí, en el vacío, se repelen con 100 dyn de fuerza. ¿Cuánto valen las cargas eléctricas?*

Solución: Expresemos todos los datos en unidades del Sistema Internacional:

$$r = 2\ \text{cm} = 2 \cdot 10^{-2}\ m$$
$$F = 100\ \text{dyn} = 10^{-3}\ N$$

Aplicando la ley de Coulomb, tenemos:

$$Q = \pm r \cdot \sqrt{\frac{F}{k}} = \pm 2 \cdot 10^{-2}\ m \cdot \sqrt{\frac{10^{-3}\ N}{9 \cdot 10^9\ \dfrac{N \cdot m^2}{C^2}}} =$$

$$= \pm \frac{2}{3} \cdot 10^{-8}\ C = \boxed{\pm \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}}\ \mathbf{nC}}$$

15.13. *Un cuerpo de 100 g está cargado con 10 000 uee. ¿A qué distancia de él debe colocarse otro cuerpo cargado con 100 000 uee de signo contrario para que el primero no caiga por la acción de su peso?*

Solución: Para que el cuerpo no caiga (véase fig. 15.1) debe actuar sobre él una fuerza atractiva igual, en valor, al peso de dicho cuerpo.

Todos los datos, expresados en unidades del Sistema Internacional, son los siguientes:

$$Q_1 = 10^4 \text{ uee} \cdot \frac{1 \text{ C}}{3 \cdot 10^9 \text{ uee}} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

$$Q_2 = 10^5 \text{ uee} \cdot \frac{1 \text{ C}}{3 \cdot 10^9 \text{ uee}} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

$$\text{Peso} = F_{\text{Coulomb}} = m \cdot g =$$

$$= 0{,}1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ N}$$

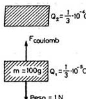


Fig. 15.1

Aplicando la ley de Coulomb, tenemos:

$$r = \sqrt{\frac{k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{F}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-5} \text{ C} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-4} \text{ C}}{1 \text{ N}}} = \boxed{1 \text{ m}}$$

15.14. ***¿Cuál es la fuerza eléctrica y la gravitatoria entre dos partículas alfa situadas en el vacío a 1 Å de distancia? Calcular también la relación entre ambas fuerzas. La carga de la partícula α es 3,2 · 10⁻¹⁹ C y su masa 6,62 · 10⁻²⁷ kg.***

Solución: La fuerza eléctrica culombiana será:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \; \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(3{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{1 \cdot (10^{-10} \text{ m})^2} =$$

$$= \boxed{9{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ N}}$$

y la gravitatoria:

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \; \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{(6{,}62 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2}{(10^{-10} \text{ m})^2} =$$

$$= \boxed{2{,}9 \cdot 10^{-43} \text{ N}}$$

La relación entre la fuerza eléctrica y la gravitatoria es:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{9{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ N}}{2{,}9 \cdot 10^{-43} \text{ N}} = \boxed{3{,}2 \cdot 10^{35}}$$

15.15. ***En los puntos A (−1, 0) y B (0, 1) (coordenadas expresadas en metros) están situadas, respectivamente, las cargas puntuales +30 μC y −40 μC. Hallar la fuerza resultante sobre una carga de +10 μC situada en el origen de coordenadas. (Supóngase que el medio es el vacío.)***

Solución: Aplicando el principio de superposición y teniendo en cuenta la figura 15.2, se obtiene:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 9 \cdot 10^9 \, \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{10^{-5}\,C \cdot 3 \cdot 10^{-5}\,C}{1 \cdot (1\,m)^2} \cdot \vec{i} +$$

$$+ 9 \cdot 10^9 \, \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{10^{-5}\,C \cdot 4 \cdot 10^{-5}\,C}{1 \cdot (1\,m)^2} \cdot \vec{j} = \boxed{\mathbf{2{,}7\,\vec{i} + 3{,}6\,\vec{j}\ \ (SI)}}$$

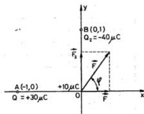


Fig. 15.2

El módulo de la fuerza $\vec{F}$ valdrá:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(2{,}7\,N)^2 + (3{,}6\,N)^2} = \boxed{\mathbf{4{,}5\,N}}$$

y su dirección vendrá dada por el ángulo φ, que forma con el eje OX:

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{F_2}{F_1} = \frac{3{,}6\,N}{2{,}7\,N} = \frac{4}{3}$$

de donde:

$$\boxed{\varphi = \mathbf{53^\circ}}$$

15.16. ***Tres cargas iguales de 2 μC cada una se sitúan en el vacío sobre los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 cm y 8 cm. ¿Cuánto vale la fuerza que actúa sobre la carga situada en el vértice del ángulo recto?***

Solución: La fuerza que ejerce la carga Q_1 (fig. 15.3) sobre la situada en el vértice del ángulo recto es:

$$F_1 = 9 \cdot 10^9 \, \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}\,C \cdot 2 \cdot 10^{-6}\,C}{36 \cdot 10^{-4}\,m^2} = 10\,N$$

mientras que la que ejerce la carga Q_2 será:

$$F_2 = 9 \cdot 10^9 \, \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}\,C \cdot 2 \cdot 10^{-6}\,C}{64 \cdot 10^{-4}\,m^2} = 5{,}625\,N$$

Como las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son perpendiculares, su resultante valdrá (véase fig. 15.3):

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(10\ N)^2 + (5{,}625\ N)^2} = \boxed{11{,}47\ N}$$

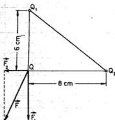


Fig. 15.3

15.17. ***Supón que las cargas de 2 μC del problema anterior se sitúan en los vértices de un triángulo equilátero de 10 cm de lado. ¿Qué fuerza actuará sobre cada una de ellas?***

Solución: El módulo de las fuerzas $\vec{F}'$ es el mismo, siendo su valor (fig. 15.4):

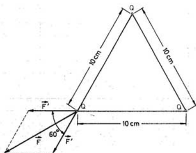


Fig. 15.4

$$F' = 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}\ C \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ C}{1 \cdot (10^{-1}\ m)^2} = 3{,}6\ N$$

La fuerza total resultante se puede calcular aplicando el teorema del coseno, teniendo en cuenta que $\alpha = 60°$:

$$F = \sqrt{F'^2 + F'^2 + 2\,F' \cdot F' \cdot \cos\alpha} = \sqrt{F'^2 + F'^2 + 2\,F' \cdot F' \cdot \cos 60°} =$$

$$= F'\,\sqrt{3} = \boxed{6{,}24\ \text{N}}$$

15.18. ***Tres cargas de 2 μC cada una están situadas en los vértices de un triángulo rectángulo isósceles. Se sabe que la fuerza que actúa sobre la carga situada en el vértice del ángulo recto vale 5,66 · 10³ N. ¿Cuánto miden los catetos del triángulo?***

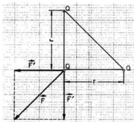


Fig. 15.5

Solución: Como se trata de un triángulo rectángulo e isósceles, los dos catetos serán iguales, así como las fuerzas F', cuyo valor será (fig. 15.5):

$$F' = \frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{5{,}66 \cdot 10^3\ \text{N}}{\sqrt{2}} =$$

$$= 4 \cdot 10^3\ \text{N}$$

Aplicando a cada una de las fuerzas F' la ley de Coulomb, resulta:

$$r = \sqrt{\frac{k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{F}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{4 \cdot 10^3\ \text{N}}} =$$

$$= 3 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = \boxed{3\ \text{mm}}$$

15.19. ***(*) La carga de una esfera metálica A, vale +0,066 μC y una segunda esfera metálica B tiene una carga de −0,026 μC. Las dos esferas, que pueden considerarse puntuales, se ponen en contacto un momento. ¿Cuál es la fuerza que actúa entre ellas cuando se separan nuevamente hasta que distan entre sí 30 cm?***

Solución: Tratándose de esferas puntuales, tras el contacto la carga se reparte por igual entre ambas. En consecuencia, la carga final de cada una será:

$$Q'_A = Q'_B = \frac{Q_A + Q_B}{2} = \frac{+0{,}066 \cdot 10^{-6}\ \text{C} - 0{,}026 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{2} =$$

$$= 0{,}020 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

Apliquemos ahora la ley de Coulomb a la interacción entre ambas esferas cuando distan entre sí 30 cm:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q'_A \cdot Q'_B}{r^2} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{(0{,}020 \cdot 10^{-6}\ \text{C})^2}{1 \cdot (30 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2} =$$

$$= \boxed{4 \cdot 10^{-5}\ \text{N}}$$

15.20. ***Disponemos de tres bolitas esféricas conductoras idénticas, A, B y C, de radio tan pequeño que se pueden considerar puntuales. Las dos primeras esferillas estas fijas a una distancia l = 100 cm y tienen carga eléctrica negativa, siendo la de A cinco veces mayor que la de B. La esferilla C se encuentra inicialmente en estado neutro y se puede mover libremente a lo largo de la recta AB horizontal.***

a) Cogemos la bolita C con unas pinzas aislantes y la ponemos en contacto con la A, dejándola luego en libertad. Determinar la posición en que dicha bolita C quedará en equilibrio.

b) Volvemos a coger la bolita C con las pinzas, poniéndola en contacto con la B y dejándola posteriormente libre. Determinar la nueva posición de equilibrio.

Solución:

a) Designemos por Q_A y Q_B, respectivamente, las cargas de las bolitas A y B en el instante inicial. Una vez establecido el contacto entre A y C, las cargas de las tres bolitas serán, respectivamente:

$$Q'_A = \frac{Q_A}{2}; \quad Q'_C = \frac{Q_A}{2}; \quad Q'_B = \frac{Q_A}{5}$$

Para que la bolita C adquiera el equilibrio se ha de cumplir que las fuerzas de repulsión ejercidas sobre ella por las bolitas A y B sean iguales y de sentido contrario. Por tanto:



$$k \cdot \frac{Q'_A \cdot Q'_C}{x^2} = k \cdot \frac{Q'_B \cdot Q'_C}{(1-x)^2}$$

es decir:

$$\frac{\frac{Q_A}{2}}{x^2} = \frac{\frac{Q_A}{5}}{(1-x)^2}$$

o sea:

$$3x^2 - 10x + 5 = 0$$

ecuación que, resuelta, conduce a: **x = 0,613 m.** La otra solución carece de sentido físico.

La bolita C quedará en equilibrio a 0,613 m de la A

b) Tras establecer el contacto de la bolita C, cuya carga es $Q'_C = \frac{Q_A}{2}$, con la B, las cargas de cada una de las esferas son:

$$Q''_A = \frac{Q_A}{2}; \quad Q''_B = Q''_C = \frac{\frac{Q_A}{5} + \frac{Q_A}{2}}{2} = \frac{7\,Q_A}{20}$$

Procediendo de forma análoga al caso anterior, aplicando la ley de Coulomb, resulta:

$$k \cdot \frac{Q''_A \cdot Q''_C}{x^2} = k \cdot \frac{Q''_B \cdot Q''_C}{(1-x)^2}$$

es decir:

$$\frac{\frac{Q_A}{2}}{x^2} = \frac{\frac{7\,Q_A}{20}}{(1-x)^2}$$

o sea:

$$3x^2 - 20x + 10 = 0$$

ecuación que da como resultado: $x = 0{,}544$ m. La otra solución no tiene sentido físico.

La bolita C quedará en equilibrio a 0,544 m de la A

15.21. *Sobre un hilo largo y delgado de longitud L, situado conforme se indica en la figura 15.6, se encuentra uniformemente distribuida una carga Q. Hallar el valor de la fuerza que este hilo ejerce sobre una carga puntual Q_1, situada en la prolongación del hilo y a una distancia r de él.*

Solución: Como en este caso se trata de una distribución lineal de carga, aplicando la fórmula correspondiente tenemos:

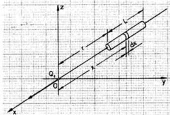


Fig. 15.6

$$\vec{F} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \int_L \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} =$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \int_r^{r+L} \frac{\lambda \cdot dx}{x^2}\,\vec{i} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \lambda \cdot \vec{i} \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_r^{r+L} =$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \lambda \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r+L}\right]\vec{i} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o}\,\lambda\,\frac{L}{r\,(r+L)}\,\vec{i} =$$

$$= \boxed{\frac{Q \cdot Q_1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot r\,(r+L)}\,\vec{i}}$$

Si la longitud del hilo es muy pequeña en comparación con r ($r \ll L$):

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q \cdot Q_1}{r^2}\,\vec{i}}$$

comportándose el hilo como una carga puntual.

15.22. *(*) Si situamos una carga positiva de 2 μC en el origen de coordenadas, encontramos que experimenta una fuerza de $8 \cdot 10^{-4}$ N en la dirección positiva del eje OX.*

a) ¿Cuál es el valor y el sentido del campo eléctrico en dicho punto?
b) ¿Cuál sería la fuerza que se ejercería en dicho punto sobre una carga negativa de 6 μC?

Solución:

a) El vector intensidad de campo en el origen de coordenadas es:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} = \frac{8 \cdot 10^{-4}\,\vec{i}\,(N)}{2 \cdot 10^{-6}\,C} = \boxed{400\,\vec{i}\quad(SI)}$$

b) La fuerza que se ejerce en el origen de coordenadas sobre una carga $Q' = -6\,\mu C$ es:

$$\vec{F} = Q' \cdot \vec{E} = -6 \cdot 10^{-6}\,C \cdot 400\,\vec{i}\,(N/C) = \boxed{-2{,}4 \cdot 10^{-3}\,\vec{i}\quad(SI)}$$

15.23. *(*) ¿Qué exceso de electrones habrá que añadirse a una esfera conductora (en el vacío) de 10 cm de diámetro para que en un punto muy próximo a su superficie haya un campo de 10^{-3} N/C?*

Solución: El campo eléctrico en un punto muy próximo a la superficie de la esfera viene dado por:

$$E = k \cdot \frac{Q}{R^2}$$

siendo R el radio de la esfera y Q la carga almacenada en su superficie, la cual valdrá:

$$Q = \frac{E \cdot R^2}{k} = \frac{10^{-3}\,N/C \cdot (5 \cdot 10^{-2}\,m)^2}{9 \cdot 10^9\,\frac{N \cdot m^2}{C^2}} = \frac{25}{9} \cdot 10^{-16}\,C$$

En consecuencia, el número de electrones que es necesario añadir a la esfera para que adquiera dicha carga será:

$$n = \frac{25}{9} \cdot 10^{-16}\,C \cdot \frac{1\text{ electrón}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C} = \boxed{1{,}74 \cdot 10^3\text{ electrones}}$$

15.24. *(*) Tenemos un campo eléctrico uniforme, dirigido verticalmente de abajo hacia arriba, cuya intensidad es de 10^4 N/C.*

a) Calcúlese la fuerza ejercida por este campo sobre un electrón.
b) Compárese la fuerza ejercida con el peso del electrón.
c) Calcúlese la velocidad que adquirirá el electrón cuando haya recorrido 1 cm partiendo del reposo.
d) Calcúlese la energía cinética adquirida.
e) Calcúlese el tiempo que necesita para recorrer la distancia de 1 cm.
Datos: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ g.

Solución:

a) Como la carga del electrón es negativa y el campo está dirigido verticalmente hacia arriba, el sentido de la fuerza actuante sobre el electrón será vertical hacia abajo, siendo su módulo:

$$F = e \cdot E = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 10^4\ \text{N/C} = \boxed{1{,}6 \cdot 10^{-15}\ \text{N}}$$

b) Hallemos el peso del electrón:

$$P = m \cdot g = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 9{,}1 \cdot 10^{-30}\ \text{N}$$

Comparando el peso con la fuerza eléctrica, tenemos:

$$\frac{F}{P} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-15}\ \text{N}}{9{,}1 \cdot 10^{-30}\ \text{N}} = \boxed{1{,}76 \cdot 10^{14}}$$

c) La aceleración que adquiere el electrón, al estar sometido a la fuerza constante del campo eléctrico, es:

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-15}\ \text{N}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 1{,}76 \cdot 10^{15}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

En consecuencia, su velocidad, después de haber recorrido 1 cm partiendo del reposo, será:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\ a \cdot s} =$$

$$= \sqrt{(0\ \text{m/s})^2 + 2 \cdot 1{,}76 \cdot 10^{15}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = \boxed{5{,}93 \cdot 10^6\ \text{m/s}}$$

d) Calculemos ahora la energía cinética adquirida por el electrón:

$$E_c = \frac{1}{2}\ m_e \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (5{,}93 \cdot 10^6\ \text{m/s})^2 = \boxed{1{,}6 \cdot 10^{-17}\ \text{J}}$$

e) Como se trata de un movimiento uniformemente acelerado:

$$s = v_o \cdot t + \frac{1}{2}\ a \cdot t^2; \quad v_o = 0$$

resulta:

$$t = \sqrt{\frac{2\ s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{1{,}76 \cdot 10^{15}\ \text{m/s}^2}} = \boxed{3{,}37 \cdot 10^{-9}\ \text{s}}$$

15.25. *Dos cargas eléctricas puntuales positivas, de 3 μC y 5 μC, se encuentran separadas una distancia de 1 cm en el vacío. Calcular:*

a) La fuerza con que se repelen.
b) La intensidad del campo eléctrico creado por la primera en el punto donde se encuentra la segunda.

Solución:

a) Aplicando la ley de Coulomb, tenemos:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}\ C \cdot 5 \cdot 10^{-6}\ C}{1 \cdot (10^{-2}\ m)^2} =$$

$$= \boxed{1\,350\ N}$$

b) Según la definición de intensidad del campo eléctrico en un punto:

$$E = \frac{F}{Q'} = \frac{1\,350\ N}{5 \cdot 10^{-6}\ C} = \boxed{2{,}7 \cdot 10^8\ N/C}$$

o también:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}\ C}{1 \cdot (10^{-2}\ m)^2} = \boxed{2{,}7 \cdot 10^8\ N/C}$$

15.26. *En los puntos A (3, 0) y B (0, −4) (coordenadas expresadas en metros) se encuentran situadas, respectivamente, las cargas $Q_1 = -8$ nC y $Q_2 = +\frac{32}{3}$ nC. Hallar la intensidad del campo eléctrico en el origen de coordenadas. El medio es el vacío.*

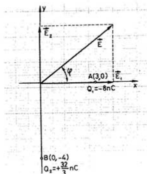


Fig. 15.7

Solución: Teniendo en cuenta la figura 15.7 y aplicando el principio de superposición, resulta:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{(-8 \cdot 10^{-9} \ C)}{1 \cdot (3 \ m)^2} \cdot (-\vec{i}) +$$

$$+ 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{\frac{32}{3} \cdot 10^{-9} \ C}{1 \cdot (4 \ m)^2} \ \vec{j} = \boxed{8 \ \vec{i} + 6 \ \vec{j} \ \ (SI)}$$

El módulo de la intensidad de campo valdrá:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{(8 \ N/C)^2 + (6 \ N/C)^2} = \boxed{10 \ N/C}$$

formando con el eje de abscisas un ángulo φ tal que:

$$\text{tg} \ \varphi = \frac{E_2}{E_1} = \frac{6 \ N/C}{8 \ N/C} = \frac{3}{4}$$

de donde:

$$\boxed{\varphi = 37°}$$

15.27. ***Dos cargas eléctricas puntuales, una de*** $+ \frac{1}{3}$ ***nC y otra de*** $- \frac{2}{3}$ ***nC, distan entre sí 10 cm en el vacío. Hallar la intensidad del campo eléctrico en el punto medio del segmento que une ambas cargas. ¿Y si las dos cargas fueran positivas?***

Solución: Consideremos primero el caso de que las dos cargas sean de distinto signo.

El campo creado por la carga positiva tiene de valor:

$$E_1 = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot 10^{-9} \ C}{1 \cdot (5 \cdot 10^{-2} \ m)^2} = 1{,}2 \cdot 10^3 \ N/C$$

mientras que el creado por la carga negativa es:

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{\frac{2}{3} \cdot 10^{-9} \ C}{1 \cdot (5 \cdot 10^{-2} \ m)^2} = 2{,}4 \cdot 10^3 \ N/C$$

Dado que (véase fig. 15.8) $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen la misma dirección y sentido, el campo total valdrá:



Fig. 15.8

$E = E_1 + E_2 = 1{,}2 \cdot 10^3$ N/C $+ 2{,}4 \cdot 10^3$ N/C $= 3{,}6 \cdot 10^3$ N/C, en la dirección del segmento que une ambas cargas, siendo su sentido hacia la carga negativa.

Si las dos cargas son positivas, los campos correspondientes tienen la misma dirección y sentidos contrarios, y el campo total (véase fig. 15.9) valdrá:

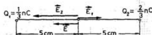


Fig. 15.9

$E = E_2 - E_1 = 2{,}4 \cdot 10^3$ N/C $- 1{,}2 \cdot 10^3$ N/C $= 1{,}2 \cdot 10^3$ N/C, en la dirección del segmento que une ambas cargas, siendo su sentido hacia la carga de $+\frac{1}{3}$ nC.

15.28. ***De dos hilos de 1 m de longitud, sujetos al mismo punto del techo, cuelgan dos esferillas iguales, de 1 gramo de masa cada una. Se cargan idénticamente ambas esferillas, con lo cual se repelen hasta que sus hilos forman entre sí un ángulo de 90°. Hallar el valor de la carga eléctrica comunicada a cada esfera.***

Solución: Designemos a las dos esferillas por A y B, consideremos una cualquiera de ellas, por ejemplo la A. En el diagrama de la figura 15.10 se representan las fuerzas que actúan sobre ella. Descompongamos la tensión del hilo en sus componentes horizontal y vertical. Por estar la esferilla en equilibrio se ha de verificar que:

$$T \cdot \operatorname{sen} \varphi = F \qquad [1]$$

$$T \cdot \cos \varphi = m \cdot g \qquad [2]$$

Dividiendo entre sí las expresiones [1] y [2], se obtiene.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{m \cdot g}$$

de donde:

$$F = m \cdot g \cdot \operatorname{tg} \varphi =$$
$$= 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 1 =$$
$$= 9{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

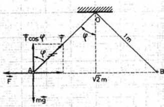


Fig. 15.10

La fuerza de repulsión eléctrica entre las dos esferillas es $9{,}8 \cdot 10^{-3}$ N.

Por otra parte, se puede apreciar en la figura, sin más que tener en cuenta el teorema de Pitágoras, que: $\overline{AB} = \sqrt{2}$ m. Aplicando ahora la ley de Coulomb, resulta:

$$Q = \pm r \sqrt{\frac{F}{k}} = \pm \sqrt{2}\,m \cdot \sqrt{\frac{9,8 \cdot 10^{-3}\ N}{9 \cdot 10^{9}\ \dfrac{N \cdot m^2}{C^2}}} =$$

$$= \pm 1,475 \cdot 10^{-6}\ C = \boxed{\pm 1,475\ \mu C}$$

15.29. *Dos esferillas sumamente pequeñas, de 20 g de masa cada una y cargadas negativamente con la misma carga, están situadas en los extremos de dos hilos de seda de 1 m de longitud, suspendidos del mismo punto. En la posición de equilibrio cada hilo forma con la vertical un ángulo de 30°.*

a) Calcular la tensión de los hilos en la posición de equilibrio.
b) Hallar la carga de cada esfera.
c) Si se descarga una de las esferillas, calcular la velocidad de la otra cuando pasa por la vertical.
d) Si se desea que al descargarse una de las esferillas la otra permanezca en la misma posición de equilibrio inicial, hallar el valor, en módulo, dirección y sentido, del campo eléctrico que será necesario aplicar.

Solución:

a) Sigamos un razonamiento idéntico al del problema anterior. Sobre cada una de las esferillas actúan tres fuerzas: el peso, la fuerza de repulsión eléctrica y la tensión del hilo. Para que cualquiera de las dos esferillas (en la figura 15.11 hemos aislado la de la derecha) se encuentre en equilibrio, se ha de verificar que:

$$T \cdot \cos 30° = m \cdot g$$

de donde:

$$T = \frac{m \cdot g}{\cos 30°} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{-2}\ kg \cdot 9,8\ N/kg}{0,866} =$$

$$= \boxed{0,226\ N}$$

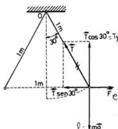


Fig. 15.11

b) Al estudiar el equilibrio de una esferilla resulta:

F (fuerza eléctrica de repulsión) =

$$= T \cdot \text{sen } 30° = 0,226\ N \cdot \frac{1}{2} = 0,113\ N$$

Aplicando ahora la ley de Coulomb, teniendo en cuenta, además, que las cargas de las dos esferillas son iguales y ambas negativas, se obtiene:

$$Q = -r \sqrt{\frac{F}{k}} = -1\ m \sqrt{\frac{0,113\ N}{9 \cdot 10^{9}\ \dfrac{N \cdot m^2}{C^2}}} =$$

$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$ $q_1 = q_2 \Rightarrow F = K\frac{q^2}{r^2}$

$q^2 = \frac{F r^2}{K} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{F}{K} r^2} = r\sqrt{\frac{F}{K}}$

$$= -3{,}55 \cdot 10^{-6}\ C = \boxed{-3{,}55\ \mu C}$$

c) Cuando se descarga una de las esferillas, desaparece la fuerza eléctrica que las mantenía separadas y ambas caerán. Para calcular la velocidad, v, que llevan al pasar por la vertical, no tenemos más que aplicar el principio de conservación de la energía mecánica: $mgh = \frac{1}{2}\ mv^2$, siendo $h = l \cdot (1 - \cos 30°)$ (véase fig. 15.12). En consecuencia, tenemos:

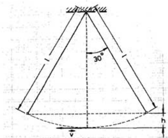


Fig. 15.12

$$v = \sqrt{2\ g \cdot h} = \sqrt{2\ g \cdot l \cdot (1 - 0{,}866)} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}8\ m \cdot s^{-2} \cdot 1\ m \cdot (1 - 0{,}866)} = \boxed{1{,}62\ m/s}$$

d) Para que, una vez que una de las dos esferillas se haya descargado, se consiga que la otra permanezca en la misma posición de equilibrio inicial, hemos de aplicar un campo eléctrico de la misma dirección y sentido que la fuerza que antes actuaba. En cuanto al módulo de dicho campo, valdrá:

$$E = \frac{F}{Q} = \frac{0{,}113\ N}{3{,}55 \cdot 10^{-6}\ C} = 3{,}19 \cdot 10^4\ N/C$$

$E = 3{,}19 \cdot 10^4$ N/C, en la misma dirección y sentido que la fuerza que antes actuaba.

15.30. ***(*) Dos pequeños péndulos están sujetos del mismo punto y sus respectivos hilos de suspensión, de masa despreciable, son de la misma longitud, de tal forma que ambas esferas están en contacto. Se cargan las dos con la misma carga, repeliéndose hasta que los hilos de ambos péndulos forman un ángulo de 90°. Determinar qué fracción de la carga original han perdido cuando el ángulo entre ambos se reduce a 60°.***

Solución: En las figuras 15.13 a y b se representan los diagramas de fuerzas correspondientes a las posiciones de equilibrio inicial y final de las esferas. Sea Q su carga inicial, F la fuerza con que se repelen y $2L \cdot \text{sen}\ \alpha$ la distancia entre sus centros de masas, mientras que al final la carga será Q', F' la fuerza de repulsión y $2L \cdot \text{sen}\ \alpha'$ la distancia entre sus centros. Tanto al comienzo como al final se cumplirá que:

$$k \cdot \frac{Q^2}{(2L \cdot \text{sen } \alpha)^2} = m \cdot g \cdot \text{tg } \alpha; \; k \cdot \frac{Q'^2}{(2L \cdot \text{sen } \alpha')^2} = m \cdot g \cdot \text{tg } \alpha'$$

[1] [2]

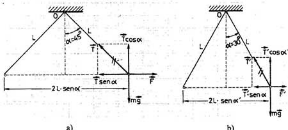


Fig. 15.13

Dividiendo, miembro a miembro, las expresiones [1] y [2], se obtiene:

$$\frac{Q'^2}{Q^2} = \frac{\text{tg } \alpha' \cdot \text{sen}^2 \alpha'}{\text{tg } \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{4}}{1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} = 0{,}2887$$

De aquí:

$$\frac{Q'}{Q} = \sqrt{0{,}2887} = 0{,}537$$

La fracción de la carga perdida por las esferas será:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{Q - Q'}{Q} = 1 - \frac{Q'}{Q} = 1 - 0{,}537 = \boxed{\mathbf{0{,}463}}$$

15.31. ***Disponemos de dos globos exactamente iguales, de masas muy pequeñas, que tras ser llenados con helio en condiciones normales de temperatura y presión, se unen mediante dos hilos, a los que se ata un cuerpo de 8 g. En el centro de ambos globos se colocaron previamente dos cargas positivas iguales, Q. Tras alcanzar el equilibrio, el conjunto adquiere la disposición que se indica en la figura 15.14. Determinar:***

a) La tensión en los hilos.
b) La carga Q.

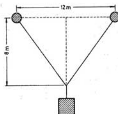


Fig. 15.14

Solución:

a) En el diagrama de la figura 15.15 se representan todas las fuerzas que actúan, tanto sobre el cuerpo como sobre los dos globos. Designamos por M la masa del cuerpo colgado, m la de cada globo, junto con el helio que lo llena, E el empuje que experimenta cada uno de ellos en el aire y F su fuerza eléctrica de repulsión. Cuando el cuerpo adquiere el equilibrio se verifica que:

$$2\,T \cdot \cos\alpha = M \cdot g$$

Luego:

$$T = \frac{M \cdot g}{2\cos\alpha} = \frac{8 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \boxed{\mathbf{4{,}9 \cdot 10^{-2}\ N}}$$

b) Para hallar el valor de la carga eléctrica colocada en el centro de cada globo, aislemos uno cualquiera de ellos cuando se encuentra en equilibrio. Tenemos que:

$$F = T \cdot \operatorname{sen}\alpha =$$
$$= 4{,}9 \cdot 10^{-2}\ \text{N} \cdot \frac{3}{5} =$$
$$= 2{,}94 \cdot 10^{-2}\ \text{N}$$

Apliquemos ahora la ley de Coulomb, teniendo en cuenta que ambas cargas son positivas:

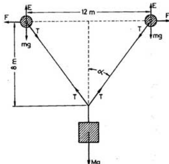


Fig. 15.15

$$Q = r\sqrt{\frac{F}{k}} = 12\ \text{m} \cdot \sqrt{\frac{2{,}94 \cdot 10^{-2}\ \text{N}}{9 \cdot 10^{9}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}}} =$$

$$= 2{,}17 \cdot 10^{-5}\ \text{C} = \boxed{\mathbf{21{,}7\ \mu C}}$$

15.32. ***Supongamos dos cargas positivas e iguales, separadas por una distancia 2 a. Por el punto medio del segmento que las une se traza un plano perpendicular al segmento. El lugar geométrico de los puntos de dicho plano en que la intensidad de campo es máxima es, por razón de simetría, una circunferencia. Calcular su radio.***

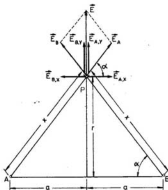


Fig. 15.16

Solución: Consideremos situadas las dos cargas, positivas e iguales, en los puntos A y B (fig. 15.16), siendo 2a la distancia que las separa, y supongamos un punto P, equidistante una distancia x de A y B, siendo α el ángulo que forma x con la dirección AB. Los campos que crean las dos cargas en el punto P son en todo momento iguales en magnitud. Sus componentes perpendiculares al plano se anulan dos a dos por simetría y sólo nos quedan las componentes paralelas al plano, que se suman, dando un campo total:

$$E = 2\,E_A \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Ahora bien: $E_A = k \cdot \dfrac{Q}{x^2}$; $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{x}{r}$; $a^2 + r^2 = x^2$

Por tanto: $E = 2\,k \cdot Q \cdot \dfrac{r}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$

Para que este campo sea máximo: $\dfrac{dE}{dr} = 0$

Así que:

$$\frac{dE}{dr} = 2\,k \cdot Q \cdot \left[\frac{(a^2 + r^2)^{3/2} - \frac{3}{2}\,(a^2 + r^2)^{1/2} \cdot 2r^2}{(a^2 + r^2)^3} \right]$$

$$= 2k \cdot Q \left[\frac{a^2 + r^2 - 3r^2}{(a^2 + r^2)^{5/2}} \right] = 0$$

de donde: $a^2 - 2r^2 = 0$; $r^2 = \dfrac{a^2}{2}$; $\boxed{\mathbf{r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}}}$

15.33. ***Si en un campo eléctrico no uniforme, creado por varias cargas, abandonamos libremente una carga eléctrica, ¿se desplazará siguiendo la línea de fuerza que pasa por el punto inicial?***

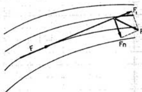


Fig. 15.17

Solución: Al comienzo sí (por propia definición de líneas de fuerza). Sin embargo, una vez iniciado el movimiento, la fuerza $\vec{F}$ del campo modifica el momento lineal de la carga, produciéndole una aceleración tangencial y otra normal, lo que motiva que su trayectoria no coincida con la dirección de la línea de fuerza (fig. 15.17).

15.34. ***Una esfera metálica conductora tiene una densidad superficial de carga de 8,85 · 10^{-8} C · m^{-2}. Calcular el radio de dicha esfera, sabiendo que la intensidad del campo eléctrico creado por ella en un punto situado exteriormente a 2 m de su superficie es 3 600 N/C.***

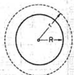


Fig. 15.18

Solución: Sea R el radio de la esfera metálica. Tracemos una superficie gaussiana de forma también esférica, concéntrica con ella y de radio r = R + 2 (fig. 15.18). En todos los puntos de esta superficie el campo eléctrico es radial y de modulo constante, por lo que el flujo del campo eléctrico que atraviesa hacia fuera dicha superficie gaussiana será:

$$\Phi = E \cdot 4\pi r^2 = E \cdot 4\pi\,(R+2)^2 =$$
$$= 4\pi \cdot 3\,600\,(R+2)^2\ V \cdot m$$

Apliquemos ahora el teorema de Gauss. Dado que «el flujo neto que atraviesa una superficie gaussiana es igual a la suma algebraica de las cargas eléctricas encerradas en su interior ($\Sigma\,Q = \sigma \cdot S$), dividida entre la constante dieléctrica absoluta del medio en que se encuentran las cargas», tenemos:

$$4\pi \cdot 3\,600 \cdot (R+2)^2\ V \cdot m = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-8}\ C \cdot m^{-2} \cdot 4\pi \cdot R^2\ m^2}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}}$$

Simplificando la anterior igualdad, se obtiene:

$$4R^2 - 9R - 9 = 0$$

Resolvamos ahora esta ecuación de segundo grado:

$$R = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 144}}{8} = \frac{9 \pm 15}{8} = \begin{cases} 3\ m \\ -0{,}75\ m \end{cases}$$

Es evidente que la única solución con significado físico es la positiva:

$$\boxed{R = 3\ m}$$

15.35. ***Hallar el vector intensidad de campo en el centro de masas del triángulo equilátero de la figura 15.19, cuyo lado mide $\sqrt{3}$ m, estando situadas en sus vértices las cargas que se indican.***

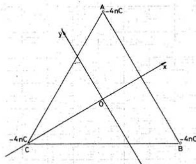


Fig. 15.19

Solución: La elección de ejes coordenados que viene ya sugerida en la figura del enunciado simplifica extraordinariamente la resolución del problema, ya que así el triángulo es enteramente simétrico con respecto al eje de abscisas, no sólo geométricamente, sino también eléctricamente.

La distancia del centro de masas del triángulo a cada uno de sus vértices, donde están situadas las cargas, es:

$$d = \frac{2}{3}\ h = \frac{2}{3}\ L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = L\ \frac{\sqrt{3}}{3}\ m = 1\ m$$

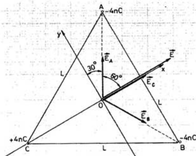


Fig. 15.20

De acuerdo con la figura 15.20, tenemos que el módulo de $\vec{E}_A$ es:

$$E_A = k \cdot \frac{Q_A}{d^2} = 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9}\ C}{(1\ m)^2} = 36\ N/C$$

Dado que el vector $\vec{E}_A$ forma un ángulo de 60° con el eje OX, y de 30° con el eje OY, sus componentes son:

$$E_{A,x} = E_A \cdot \cos 60° = 36 \ \frac{N}{C} \cdot \frac{1}{2} = 18 \text{ N/C}$$

$$E_{A,y} = E_A \cdot \text{sen } 60° = 36 \ \frac{N}{C} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18 \sqrt{3} \text{ N/C}$$

Por consiguiente:

$$\vec{E}_A = 18 \ \vec{i} + 18 \sqrt{3} \ \vec{j} \quad \text{(SI)}$$

Del mismo modo, el módulo de $\vec{E}_B$ es 36 N/C, y sus componentes:

$$E_{B,x} = E_B \cdot \cos(-60°) = 36 \ \frac{N}{C} \cdot \frac{1}{2} = 18 \text{ N/C}$$

$$E_{B,y} = E_B \cdot \text{sen }(-60°) = 36 \ \frac{N}{C} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -18 \sqrt{3} \text{ N/C}$$

por lo que:

$$\vec{E}_B = 18 \ \vec{i} - 18 \sqrt{3} \ \vec{j} \quad \text{(SI)}$$

Por último, el módulo de $\vec{E}_C$ es 36 N/C, y como está dirigido hacia la parte positiva del eje OX: $\vec{E}_C = 36 \ \vec{i}$ (SI).

El campo total en el centro del triángulo es:

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C = \boxed{72 \ \vec{i} \ \ \text{(SI)}}$$

15.36. ***En los puntos de la figura 15.21, referidos a un sistema plano de ejes coordenados y que corresponden a los vértices de un hexágono regular de 5 cm de lado, están situadas las cargas que se indican ($Q = 1$ nC). Hallar el valor del campo eléctrico en el origen de coordenadas, que coincide con el centro del hexágono.***

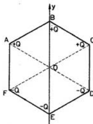


Fig. 15.21

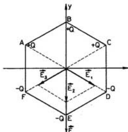


Fig. 15.22

Solución: Las cargas situadas en los vértices A y D (véase fig. 15.22) dan origen conjuntamente en el centro del hexágono a un campo eléctrico cuyo módulo viene dado por:

$$E_1 = 2k \cdot \frac{Q}{l^2} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{10^{-9}\ C}{(5 \cdot 10^{-2}\ m)^2} = 7\ 200\ N/C$$

El campo creado por las cargas situadas en los vértices B y E es:

$$E_2 = 2k \cdot \frac{Q}{l^2} = 7\ 200\ N/C$$

y, análogamente:

$$E_3 = 7\ 200\ N/C$$

Teniendo todo esto en cuenta, y siempre fijándonos en la figura 15.22, el campo eléctrico total en el centro del hexágono tendrá de módulo:

$$E = E_1 \cdot \cos 60^\circ + E_2 + E_3 \cdot \cos 60^\circ =$$
$$= 7\ 200\ \frac{N}{C} \cdot \frac{1}{2} + 7\ 200\ \frac{N}{C} + 7\ 200\ \frac{N}{C} \cdot \frac{1}{2} = 14\ 400\ \frac{N}{C}$$

siendo su dirección y sentido el negativo del eje OY. Por tanto:

$$\boxed{\vec{E} = -14\ 400\ \vec{j}\ \ (SI)}$$

15.37. ***Si se toma la tierra como origen de potenciales, ¿por qué en la definición de esta magnitud decimos que $V = 0$ para $r \to \infty$?***

Solución: Como el suelo se extiende hasta una distancia infinita con respecto a un sistema de cargas, se le puede considerar como una superficie equipotencial de $V = 0$. En consecuencia, para $r \to \infty$, $V = 0$.

15.38. ***Una carga de 600 franklins crea un campo eléctrico en el vacío. Calcular:***

a) La intensidad en un punto del campo situado a 3 mm de la carga.
b) El potencial en dicho punto.
c) La fuerza con que el campo actúa sobre una carga puntual de 1 μC colocada en dicho punto.

Solución:

a) La carga de 600 franklins equivale a:

$$600\ uee \cdot \frac{1\ C}{3 \cdot 10^9\ uee} = 2 \cdot 10^{-7}\ C$$

Por tanto:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} = 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-7}\ C}{1 \cdot (3 \cdot 10^{-3}\ m)^2} = \boxed{2 \cdot 10^8\ N/C}$$

b)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-7} \ C}{3 \cdot 10^{-3} \ m} = \boxed{6 \cdot 10^5 \ V}$$

c)

$$F = Q' \cdot E = 10^{-6} \ C \cdot 2 \cdot 10^8 \ \frac{N}{C} = \boxed{200 \ N}$$

15.39. ***Una carga de 5 μC crea un campo eléctrico en el aire.***

a) ***¿Cuánto vale el potencial en dos puntos situados a 3 cm y 5 cm, respectivamente, de la carga?***

b) ***¿Qué trabajo se realiza al trasladar una carga de 2 μC desde un punto a otro?***

Solución:

a) En el punto primero:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r_1} = 9 \ 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6} \ C}{3 \cdot 10^{-2} \ m} = \boxed{1{,}5 \cdot 10^6 \ V}$$

y en el segundo:

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6} \ C}{5 \cdot 10^{-2} \ m} = \boxed{9 \cdot 10^5 \ V}$$

b) El trabajo realizado valdrá:

$$W_1^2 = Q' \cdot (V_1 - V_2) = 2 \cdot 10^{-6} \ C \cdot (1{,}5 \cdot 10^6 \ V - 9 \cdot 10^5 \ V) = \boxed{1{,}2 \ J}$$

15.40. ***Dos cargas puntuales de +25 · 10⁻⁹ C se encuentran situadas en los puntos (3, 0) y (−3, 0), respectivamente, estando sus coordenadas expresadas en metros. Calcular el campo y el potencial electrostáticos en el punto (0, 4).***

Solución: Sin más que ver el diagrama de la figura 15.23, podemos darnos cuenta de que:

$$E_1 = E_2 = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{25 \cdot 10^{-9} \ C}{1 \cdot (5 \ m)^2} = 9 \ N/C$$

El módulo del campo en el punto (0,4) será:

$$E = 2 \ E_1 \cdot \cos \varphi = 2 \cdot 9 \frac{N}{C} \cdot \frac{4}{5} = 14{,}4 \ N/C$$

Por consiguiente:

$$\boxed{\vec{E} = 14{,}4 \ \vec{j} \ (N/C)}$$

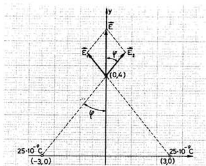


Fig. 15.23

Calculemos ahora el potencial eléctrico en el punto (0, 4):

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \Sigma \ \frac{Q_i}{r_i} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \left[\frac{25 \cdot 10^{-9} \ C}{5 \ m} + \frac{25 \cdot 10^{-9} \ C}{5 \ m} \right] = \boxed{90 \ V}$$

15.41. ***Dos cargas puntuales de valores $Q_1 = +15$ nC y $Q_2 = -8$ nC están separadas entre sí 5 cm en el vacío, conforme se indica en la figura 15.24. Hallar el potencial eléctrico en los puntos a, b y c.***

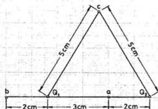


Fig. 15.24

Solución:

$$V_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \Sigma \ \frac{Q_i}{r_i} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \left[\frac{15 \cdot 10^{-9} \ C}{3 \cdot 10^{-2} \ m} - \frac{8 \cdot 10^{-9} \ C}{2 \cdot 10^{-2} \ m} \right] = \boxed{900 \ V}$$

$$V_b = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \Sigma \ \frac{Q_i}{r_i} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \left[\frac{15 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} - \frac{8 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{7 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} \right] = \boxed{5\,721\ \text{V}}$$

$$V_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \sum \frac{Q_i}{r_i} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \left[\frac{15 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} - \frac{8 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} \right] = \boxed{1\,260\ \text{V}}$$

15.42. ***Al trasladar una carga de 2 culombios desde un punto de un campo eléctrico cuyo potencial es 20 V a otro punto, las fuerzas del campo realizan un trabajo de 10 julios. Calcular el potencial en este segundo punto.***

Solución: De acuerdo con la expresión $W_1^2 = Q' \cdot (V_1 - V_2)$, tenemos:

$$10\ \text{J} = 2\ \text{C} \cdot (20\ \text{V} - V_1)$$

de donde:

$$\boxed{V_1 = 15\ \text{V}}$$

15.43. ***Hallar el trabajo necesario para trasladar una carga puntual de +3 nC desde a hasta b y desde c hasta a, en la figura 15.24.***

Solución:

$$W_a^b = Q' \cdot (V_a - V_b) = 3 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \cdot (900\ \text{V} - 5\,721\ \text{V}) = \boxed{-1{,}44 \cdot 10^{-5}\ \text{J}}$$

$$W_c^a = Q' \cdot (V_c - V_a) = 3 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \cdot (1\,260\ \text{V} - 900\ \text{V}) = \boxed{1{,}08 \cdot 10^{-6}\ \text{J}}$$

De acuerdo con los signos obtenidos, en el primer caso es necesario realizar un trabajo contra las fuerzas del campo, mientras que en el segundo son las propias fuerzas del campo quienes realizan el trabajo al desplazarse espontáneamente la carga desde el punto c hasta el a.

15.44. ***(*) Dadas dos cargas de $+3 \cdot 10^{-9}$ C y $-4 \cdot 10^{-9}$ C, colocadas, respectivamente, en los puntos (4, 0, 0) y (0, 0, 4), calcular:***

a) El potencial eléctrico en el punto (0, 3, 0).
b) El trabajo necesario para llevar una carga de prueba (1 C) desde este punto al (0, 0, 0). Las coordenadas están expresadas en metros.

Solución:

a) Designemos por P al punto (0, 3, 0) (fig. 15.25). Se cumple que:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \sum \frac{Q_i}{r_i} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \left[\frac{3 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{5\ \text{m}} - \frac{4 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{5\ \text{m}} \right] = \boxed{\mathbf{-1{,}8\ V}}$$

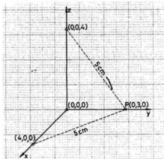


Fig. 15.25

b) Calculemos, en primer lugar, el potencial en el origen de coordenadas:

$$V_{(0,0,0)} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \left[\frac{3 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{4\ \text{m}} - \frac{4 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{4\ \text{m}} \right] = -2{,}25\ \text{V}$$

Tenemos que:

$$W = Q' \cdot (V_P - V_0) = 1\ \text{C} \cdot [-1{,}8\ \text{V} - (-2{,}25\ \text{V})] =$$

$$= \boxed{\textbf{0,45 J (realizado por las fuerzas del campo)}}$$

15.45. ***(*) Determinar el campo eléctrico y el potencial en el punto P, vértice del triángulo rectángulo de la figura 15.26. Calcular el trabajo necesario para transportar una carga $Q' = -3\ \mu C$ desde P hasta el punto medio de la hipotenusa.***

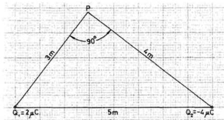


Fig. 15.26

Solución: Designemos por E_1 y E_2 los módulos de los vectores intensidad de campo en el punto P, debidos a las dos cargas. Se cumple que:

$$E_1 = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \ C}{(3 \ m)^2} = 2 \cdot 10^3 \ N/C$$

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6} \ C}{(4 \ m)^2} = 2{,}25 \cdot 10^3 \ N/C$$

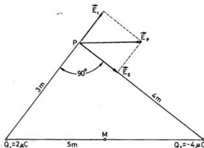


Fig. 15.27

En la figura 15.27 vemos la representación gráfica de ambos vectores, pudiendo constatarse fácilmente que son perpendiculares entre sí. El campo eléctrico total en P es:

$$E_P = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{(2 \cdot 10^3 \ N/C)^2 + (2{,}25 \cdot 10^3 \ N/C)^2} =$$

$$= \boxed{\mathbf{3{,}01 \cdot 10^3 \ N/C}}$$

Calculemos ahora el potencial eléctrico en el punto P:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \Sigma \ \frac{Q_i}{r_i} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \left[\frac{2 \cdot 10^{-6} \ C}{3 \ m} - \frac{4 \cdot 10^{-6} \ C}{4 \ m} \right] = \boxed{\mathbf{-3 \cdot 10^3 \ V}}$$

De manera análoga, en el punto medio de la hipotenusa hay un potencial:

$$V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \Sigma \ \frac{Q_i}{r_i} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \left[\frac{2 \cdot 10^{-6} \ C}{2{,}5 \ m} - \frac{4 \cdot 10^{-6} \ C}{2{,}5 \ m} \right] = -7{,}2 \cdot 10^3 \ V$$

El trabajo necesario para trasladar la carga de $-3\ \mu C$ desde **P hasta M** será:

$$W = Q' \cdot (V_P - V_M) = -3 \cdot 10^{-6}\ C \cdot [-3 \cdot 10^3\ V - (-7{,}2 \cdot 10^3\ V)] =$$

$$= \boxed{\mathbf{-1{,}26 \cdot 10^{-2}\ J\ (contra\ las\ fuerzas\ del\ campo)}}$$

15.46. *Se tienen dos cargas eléctricas puntuales: $Q_1 = 20\ nC$ y $Q_2 = -20\ nC$, situadas conforme se indica en la figura 15.28. Calcular:*

a) El potencial eléctrico en el punto A.
b) El trabajo que es necesario realizar para trasladar una carga puntual de $+4\ nC$ desde el punto B al A.

Solución:

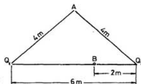


Fig. 15.28

a) El potencial eléctrico en el punto A es:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \Sigma\ \frac{Q_i}{r_i} =$$

$$= 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \left[\frac{20 \cdot 10^{-9}\ C}{4\ m} - \frac{20 \cdot 10^{-9}\ C}{4\ m}\right] = \boxed{\mathbf{0\ V}}$$

b) Calculemos primero el potencial en el punto B:

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \Sigma\ \frac{Q_i}{r_i} =$$

$$= 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \left[\frac{20 \cdot 10^{-9}\ C}{4\ m} - \frac{20 \cdot 10^{-9}\ C}{2\ m}\right] = -45\ V$$

El trabajo que es necesario realizar para trasladar una carga $Q' = +4\ nC$ desde B hasta A, será:

$$W = Q' \cdot (V_B - V_A) = 4 \cdot 10^{-9}\ C \cdot (-45\ V - 0\ V) =$$

$$= \boxed{\mathbf{-1{,}8 \cdot 10^{-7}\ J\ (contra\ las\ fuerzas\ del\ campo)}}$$

15.47. ***En un punto situado a una cierta distancia de una carga puntual el potencial eléctrico es de 1 200 V y el campo eléctrico en ese mismo punto es 400 N/C. Determinar el valor de la carga, y a qué distancia de ella está situado el punto en cuestión.***

Solución: El campo y el potencial eléctrico a una cierta distancia de una carga puntual vienen dados por:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad ; \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r}$$

Sustituyendo en las anteriores expresiones los datos numéricos del enunciado del problema, tenemos:

$$\left. \begin{aligned} 400 \text{ N/C} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r^2} \\ 1\,200 \text{ V} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r} \end{aligned} \right\}$$

La resolución del anterior sistema conduce a:

$$\boxed{\mathbf{Q = 4 \cdot 10^{-7}\ C;\quad r = 3\ m}}$$

15.48. ***(*) En los puntos (1, 0) y (0, 1) de un sistema cartesiano plano, cuyas dimensiones se expresan en metros, existen dos cargas fijas de +1/9 y −1/3 μC, respectivamente. Determinar:***

a) ***El valor de la intensidad del campo eléctrico en el origen de coordenadas. Hágase un esquema vectorial claro.***
b) ***El valor del potencial eléctrico en el origen y en el punto (1, 1).***
c) ***El trabajo necesario para trasladar una carga de +3 μC desde el origen al punto (1, 1).***

Solución:

a) La intensidad de campo eléctrico en el origen de coordenadas creado por la carga de +1/9 μC, situada en el punto (1, 0) (fig. 15.29) es:

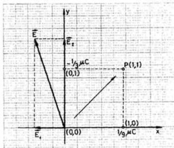


Fig. 15.29

$$\vec{E}_1 = 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{\frac{1}{9} \cdot 10^{-6}\ C}{(1\ m)^2}\ (-\vec{i}) = -1\,000\ \vec{i}\ (N/C)$$

La creada en el mismo punto por la carga de $-1/3$ μC, situada en el punto (0, 1), tiene de valor:

$$\vec{E}_2 = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot 10^{-6}\ C}{(1\ m)^2} \cdot \vec{j} = 3\ 000\ \vec{j}\ (N/C)$$

Por tanto, el vector representativo del campo eléctrico total existente en el origen de coordenadas será:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -1\ 000\ \vec{i} + 3\ 000\ \vec{j}\quad (SI)}$$

b) Calculemos ahora el potencial eléctrico en el origen de coordenadas:

$$V_{(0,0)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \Sigma\ \frac{Q_i}{r_i} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \left[\frac{\frac{1}{9} \cdot 10^{-6}\ C}{1\ m} + \frac{-\frac{1}{3} \cdot 10^{-6}\ C}{1\ m} \right] =$$

$$= \boxed{-2\ 000\ V}$$

Procediendo de forma análoga, podemos calcular el potencial eléctrico en el punto P (1, 1):

$$V_{(1,1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \Sigma\ \frac{Q_i}{r_i} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \left[\frac{\frac{1}{9} \cdot 10^{-6}\ C}{1\ m} + \frac{-\frac{1}{3} \cdot 10^{-6}\ C}{1\ m} \right] =$$

$$= \boxed{-2\ 000\ V}$$

c) Dado que el potencial eléctrico en el origen tiene el mismo valor que en el punto (1, 1), no se realiza trabajo alguno para trasladar una carga desde un punto a otro:

$$\boxed{W = 0\ J}$$

15.49. ***(*) Un núcleo tiene una carga positiva de 50 e, siendo e la magnitud de la carga del electrón. Determinar la energía potencial de un electrón situado a una distancia de $2 \cdot 10^{-10}$ m de dicho núcleo, expresada en electronvoltios y julios.***

Solución: La energía potencial del electrón será:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q \cdot Q'}{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{50\ e^2}{r}$$

Teniendo en cuenta que el valor absoluto de la carga del electrón es $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, resulta:

$$E_p = -9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{50 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19} \ C)^2}{2 \cdot 10^{-10} \ m} = \boxed{\mathbf{-5{,}76 \cdot 10^{-17} \ J}}$$

Como 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J, la energía que acabamos de obtener equivale a:

$$E_p = -5{,}76 \cdot 10^{-17} \ J \cdot \frac{1 \ eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \ J} = \boxed{\mathbf{-360 \ eV}}$$

15.50. ***En los vértices de un cuadrado de lado a, tenemos situadas cuatro cargas eléctricas puntuales, de manera que las de cada dos vértices consecutivos son iguales en magnitud y de signo contrario. Determinar la energía potencial de este sistema de cargas (fig. 15.30).***

Solución: Tengamos en cuenta que la diagonal del cuadrado mide $a \cdot \sqrt{2}$. Aplicando la expresión correspondiente a la energía potencial de un sistema de cargas eléctricas puntuales, tenemos:

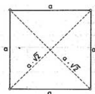


Fig. 15.30

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{n} \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \left[\frac{Q \cdot (-Q)}{a} + \right.$$

$$+ \frac{Q \cdot Q}{a\sqrt{2}} + \frac{Q \cdot (-Q)}{a} + \frac{-Q \cdot Q}{a} + \frac{-Q \cdot (-Q)}{a\sqrt{2}} + \frac{-Q \cdot Q}{a} +$$

$$+ \frac{Q \cdot (-Q)}{a} + \frac{Q \cdot Q}{a\sqrt{2}} + \frac{Q \cdot (-Q)}{a} + \frac{-Q \cdot Q}{a} +$$

$$\left. + \frac{-Q \cdot (-Q)}{a\sqrt{2}} + \frac{-Q \cdot Q}{a} \right] = \boxed{\frac{\mathbf{Q^2 (\sqrt{2} - 4)}}{\mathbf{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot a}}}$$

15.51. ***Una esfera de 3 cm de radio, situada en el vacío, tiene una carga eléctrica de 10^{-2} μC. Calcular su potencial en un punto de su superficie.***

Solución:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{10^{-8} \ C}{3 \cdot 10^{-2} \ m} = \boxed{\mathbf{3 \cdot 10^3 \ V}}$$

15.52. ***Una esfera de 8 cm de radio situada en el vacío posee una carga de 4 μC. Calcular el potencial:***

a) En un punto de su superficie.
b) En otro punto situado a 12 cm de ella.

Solución:

a)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6}\ C}{8 \cdot 10^{-2}\ m} = \boxed{4{,}5 \cdot 10^5\ V}$$

b)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r} = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6}\ C}{(12 + 8) \cdot 10^{-2}\ m} = \boxed{1{,}8 \cdot 10^5\ V}$$

15.53. ***Dos gotas de agua aisladas, de radios 0,5 mm y 0,8 mm, están cargadas con 40 uee y 50 uee, respectivamente. Dichas gotas se reúnen para originar una sóla gota. Calcular:***

a) El radio de esta gota.
b) La carga total que adquiere.
c) El potencial en un punto de su superficie.

Solución:

a) Resulta evidente que el volumen de la gota formada ($\frac{4}{3}\ \pi R^3$) ha de ser igual a la suma de los volúmenes de las dos gotas iniciales:

$$\frac{4}{3}\ \pi R_1^3 + \frac{4}{3}\ \pi R_2^3$$

Por tanto: $\frac{4}{3}\ \pi R^3 = \frac{4}{3}\ \pi R_1^3 + \frac{4}{3}\ \pi R_2^3$

de donde:

$$R = \sqrt[3]{R_1^3 + R_2^3} = \sqrt[3]{(5 \cdot 10^{-4}\ m)^3 + (8 \cdot 10^{-4}\ m)^3} = \boxed{8{,}6 \cdot 10^{-4}\ m}$$

b) La carga total será igual a la suma de las cargas de las dos gotas iniciales:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 40\ uee + 50\ uee = \boxed{90\ uee}$$

c) El potencial en un punto de la superficie de la gota será:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R} = 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{90\ uee \cdot \dfrac{1\ C}{3 \cdot 10^9\ uee}}{8{,}6 \cdot 10^{-4}\ m} =$$

$$= \boxed{3{,}14 \cdot 10^5\ V}$$

15.54. ***Dos pequeñas esferas metálicas, A y B, cuyos radios respectivos son: $r_A = 1$ cm y $r_B = 4$ cm, colocadas a 1 m de distancia en el vacío y cargadas con electricidades del mismo signo, se repelen con una fuerza de $2 \cdot 10^{-3}$ N. Se las pone en contacto y se las coloca luego a una distancia igual a la mitad de antes, siendo entonces la fuerza de repulsión entre ellas de $5,76 \cdot 10^{-3}$ N. Calcular:***

a) La carga inicial de las dos esferas.
b) El potencial eléctrico que tienen al final.

Solución:

a) Designemos por Q_A y Q_B la carga de cada una de las dos esferas antes del contacto, y por Q'_A y Q'_B su carga al final.

Como las dos esferas, situadas a 1 m de distancia en el vacío, se repelen con una fuerza de $2 \cdot 10^{-3}$ N, por aplicación de la ley de Coulomb, operando en el Sistema Internacional, tenemos:

$$Q_A \cdot Q_B = \frac{2}{9} \cdot 10^{-12} \qquad [1]$$

Ya que, después del contacto, las dos esferas, con cargas Q'_A y Q'_B, respectivamente, situadas a 0,50 m de distancia en el vacío, se repelen con una fuerza de $5,76 \cdot 10^{-3}$ N, aplicando de nuevo la ley de Coulomb, resulta:

$$Q'_A \cdot Q'_B = \frac{1,44}{9} \cdot 10^{-12} \qquad [2]$$

Como, al ponerse en contacto ambas esferas, sus potenciales se igualan, se cumple:

$$\frac{Q'_A}{10^{-2}} = \frac{Q'_B}{4 \cdot 10^{-2}} \qquad [3]$$

Por otra parte, teniendo en cuenta el principio de conservación de la carga eléctrica:

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B \qquad [4]$$

La resolución de este sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas conduce a:

$$\boxed{Q_A = \frac{1}{3} \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} = \frac{1}{3}\ \mu\mathrm{C}; \quad Q_B = \frac{2}{3} \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} = \frac{2}{3}\ \mu\mathrm{C}}$$

b) El mismo sistema anterior da como resultado: $Q'_A = 0,2 \cdot 10^{-6}$ C y $Q'_B = 0,8 \cdot 10^{-6}$ C (las cargas que adquieren las dos esferas tras su contacto). Por tanto, el potencial que tienen las dos esferas al final es:

$$V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q'_A}{r_A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q'_B}{r_B} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \; \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{0{,}2 \cdot 10^{-6}\; C}{10^{-2}\; m} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \; \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{0{,}8 \cdot 10^{-6}\; C}{4 \cdot 10^{-2}\; m} = \boxed{1{,}8 \cdot 10^5\; V}$$

15.55. ***Una misma cantidad de electricidad se distribuye en una esfera de radio 10 cm y en otra de radio 20 cm. Calcular:***

a) La relación de densidades eléctricas.
b) La relación entre los respectivos potenciales en cada una de las superficies.

Solución:

a) En la primera esfera: $\sigma_1 = \dfrac{Q}{4\pi \cdot R_1^2}$

y en la segunda: $\sigma_2 = \dfrac{Q}{4\pi \cdot R_2^2}$

Por tanto: $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{R_2^2}{R_1^2} = \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2 = \left(\dfrac{20\text{ cm}}{10\text{ cm}}\right)^2 = \boxed{4}$

b) Los valores del potencial en las superficies de las dos esferas son:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R_1} \quad ; \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R_2}$$

Por consiguiente:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{20\text{ cm}}{10\text{ cm}} = \boxed{2}$$

15.56. ***(*) Se tienen dos cargas iguales y de signos contrarios, situadas: la primera, Q, en el punto (0, 0, 0), y la segunda, −Q, en el punto (0, 2, 0). Determínese la función escalar del potencial en cada punto del campo. Calcúlese, asimismo, la ecuación de la superficie equipotencial, lugar de los puntos de potencial nulo.***

Solución: Consideremos (véase figura 15.31) un punto cualquiera, P, de coordenadas (x, y, z). Las distancias de este punto a cada una de las cargas son:

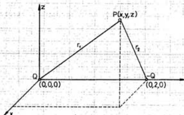


Fig. 15.31

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2 + z^2}$$

Por tanto, el potencial en el punto P valdrá:

$$\boxed{\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \left[\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2}} \right] \end{aligned}}$$

Para obtener la ecuación de la superficie equipotencial de potencial nulo, igualaremos a cero la expresión anterior:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2}} \right] = 0$$

Simplificando:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2}}$$

Elevando al cuadrado y operando:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2$$

$$y^2 = y^2 + 4 - 4y; \quad y = \frac{4}{4} = 1$$

La superficie equipotencial es el plano y = 1

15.57. ***La intensidad de un campo eléctrico varía según la expresión:***

$$E = x^3 - 3x^2 \quad (SI)$$

Calcular la diferencia de potencial entre dos puntos A y B, determinados por las coordenadas $x_A = 0$ y $x_B = 2$ m.

Solución:

$$V_B - V_A = - \int_{x_A}^{x_B} E \cdot dx = - \int_0^2 (x^3 - 3x^2)\, dx = - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 \right]_0^2 =$$

$$= \boxed{4\ V}$$

15.58. ***En el origen de coordenadas se encuentra situada una carga puntual positiva de 2 nC, mientras que otra puntual, negativa, de 5 nC, está fija sobre el eje de ordenadas, a 4 m del origen. Determinar:***

a) La intensidad de campo eléctrico en el punto A, situado a 3 m del origen sobre la parte positiva del eje de abscisas.

b) El trabajo que es necesario realizar para trasladar una carga de 2 nC desde el punto B, cuyas coordenadas son (6, 8) metros, al A.

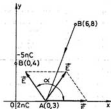


Fig. 15.32

Solución:

a) La intensidad del campo eléctrico creado por la carga de 2 nC en el punto A (véase fig. 15.32) es:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}\ C}{(3\ m)^2} \cdot \vec{i} = 2\ \vec{i}\ (N/C)$$

El módulo de la intensidad de campo creado por la otra carga en A será:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-9}\ C}{(5\ m)^2} = 1{,}8\ N/C$$

Las componentes de $\vec{E}_2$ en las direcciones de los ejes coordenados son:

$$E_{2,x} = E_2 \cdot \cos\varphi = 1{,}8\ \frac{N}{C} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -1{,}08\ \frac{N}{C}$$

$$E_{2,y} = E_2 \cdot \text{sen}\,\varphi = 1{,}8\ \frac{N}{C} \cdot \frac{4}{5} = 1{,}44\ N/C$$

Por consiguiente:

$$\vec{E}_2 = -1{,}08\ \vec{i} + 1{,}44\ \vec{j}\ (N/C)$$

De ahí que el campo total en el punto A venga dado por:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0{,}92\ \vec{i} + 1{,}44\ \vec{j}\ \ (SI)}$$

b) El potencial en el punto A será:

$$V_A = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \left[\frac{2 \cdot 10^{-9}\ C}{3\ m} + \frac{-5 \cdot 10^{-9}\ C}{5\ m} \right] = -3\ V$$

siendo el potencial en B:

$$V_B = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \left[\frac{2 \cdot 10^{-9}\ C}{10\ m} + \frac{-5 \cdot 10^{-9}\ C}{2 \cdot \sqrt{13}\ m} \right] = -4{,}44\ V$$

Por tanto, el trabajo que es necesario realizar para llevar una carga de 2 nC desde el punto B al A es:

$$W_B^A = Q' \cdot (V_B - V_A) = 2 \cdot 10^{-9}\ C \cdot [-4{,}44\ V - (-3\ V)] =$$

$$= \boxed{\mathbf{-2{,}88 \cdot 10^{-9}\ J\ (contra\ las\ fuerzas\ del\ campo)}}$$

15.59. ***El potencial eléctrico en un punto viene dado por la ecuación:***

$$V = 4x + 2y^2 - z^3$$

en la que V se expresa en voltios y las coordenadas x, y, z en metros. Determinar el vector intensidad de campo eléctrico en el punto (−2, −1, 1).

Solución:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V = -\left(\frac{\delta V}{\delta x}\ \vec{i} + \frac{\delta V}{\delta y}\ \vec{j} + \frac{\delta V}{\delta z}\ \vec{k} \right) =$$

$$= -4\ \vec{i} - 4y\ \vec{j} + 3z^2\ \vec{k}\ \ (SI)$$

Particularizando la anterior expresión general al punto P (2, −1, 1), tenemos:

$$\boxed{\vec{E} = -4\ \vec{i} + 4\ \vec{j} + 3\ \vec{k}\ \ (SI)}$$

15.60. ***Sea un anillo de radio R y con una carga Q uniformemente distribuida a lo largo de todo él. Hallar el potencial y la intensidad de campo en un punto P de su eje, situado a una distancia x del centro del anillo (fig. 15.33).***

Solución: Consideremos un elemento infinitesimal del anillo, de carga dQ. El potencial en un punto P debido a todo el anillo valdrá:

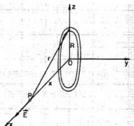


Fig. 15.33

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \int \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \int \frac{dQ}{\sqrt{R^2 + x^2}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} \int dQ = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o \sqrt{R^2 + x^2}}}$$

El campo eléctrico en dicho punto tendrá el valor:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{dV}{dx}\, \vec{i} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (R^2 + x^2)^{-3/2} \cdot 2x \cdot \vec{i} =$$

$$= \boxed{\frac{Q \cdot x}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot (R^2 + x^2)^{3/2}}\, \vec{i}}$$

15.61. ***Una carga eléctrica puntual de +2 μC se encuentra situada en el centro geométrico de un cubo de 2 m de arista. El medio es el vacío. Calcular:***

a) ***La intensidad de campo en el centro de una de las caras.***
b) ***El flujo eléctrico a través de la superficie cúbica.***
c) ***El flujo eléctrico a través de una de las caras.***

Solución:

a) Aplicando la fórmula de la intensidad de campo, tenemos:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}\, C}{1 \cdot (1\, m)^2} = \boxed{1{,}8 \cdot 10^4\, N/C}$$

b) Podemos considerar la propia superficie del cubo como superficie gaussiana. Aplicando el teorema de Gauss, tenemos:

$$\Phi = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_o} = \frac{2 \cdot 10^{-6}\, C}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\, C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}} = \boxed{2{,}26 \cdot 10^5\, V \cdot m}$$

c) Por simetría:

$$\Phi_{cara} = \frac{\Phi}{6} = \frac{2{,}26 \cdot 10^5\, V \cdot m}{6} = \boxed{3{,}77 \cdot 10^4\, V \cdot m}$$

15.62 ***Calcular el flujo de campo eléctrico que atraviesa un hemisferio de radio R, situado en el interior de un campo $\vec{E}$ uniforme y paralelo al eje del hemisferio.***

Solución: El problema se puede resolver de una forma muy sencilla, considerando una superficie gaussiana que sea el propio hemisferio, pero tapado por su parte abierta (fig. 15.34). Como dentro del hemisferio no hay carga eléctrica alguna, de acuerdo con el teorema de Gauss, el flujo neto de campo eléctrico que atraviesa dicha superficie gaussiana ha de ser nulo. En consecuencia, el flujo que atraviesa el hemisferio ha de ser igual y de senti-

do contrario al que pasa a través de la cara diametral de la superficie gaussiana. Por tanto:

$$\boxed{\Phi = \pi R^2 \cdot E}$$

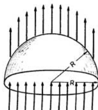


Fig. 15.34

15.63. ***Ocho cargas iguales de 5 · 10⁻⁴ C se encuentran situadas en los vértices de un cubo regular de 1 m de lado. En el centro del cubo se encuentra situada una novena carga de valor −7 · 10⁻³ C.***

Si consideramos una superficie esférica con centro coincidente con el del cubo y radio R, calcular el flujo del campo eléctrico creado a través de dicha superficie, en los siguientes supuestos:

a) El radio de la esfera tiene un valor $R_1 = 0{,}5$ m.
b) El radio de la esfera vale $R_2 = 2$ m.

Solución: Apliquemos el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{\Sigma Q_i}{\varepsilon_a}$$

a) En el caso de que la superficie esférica tenga de radio $R_1 = 0{,}5$ m, en su interior sólo se encuentra la carga central. En consecuencia:

$$\Phi = \frac{-7 \cdot 10^{-3}\ C}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}} = \boxed{-7{,}9 \cdot 10^8\ V \cdot m}$$

b) Si la superficie esférica tiene de radio $R_2 = 2$ m, encierra a todas las cargas. En este caso:

$$\Phi = \frac{-7 \cdot 10^{-3}\ C + 8 \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ C}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}} = \boxed{-3{,}4 \cdot 10^8\ V \cdot m}$$

Nota: Tanto en un caso como en otro, el signo negativo del resultado indica que se trata de flujo entrante a través de la superficie.

15.64. ***(*) Se tienen dos cargas eléctricas iguales. Si en el punto medio del segmento que las une situamos una pequeña carga eléctrica de prueba, ¿estará en equilibrio? ¿Por qué? ¿Qué le ocurre a esta última carga si se la desplaza ligeramente de la posición inicial?***

Solución: La carga eléctrica de prueba se encontrará en equilibrio, ya que sobre ella actúan dos fuerzas de igual módulo y de sentido contrario.

Cuando la carga de prueba se desplaza de la posición de equilibrio podemos considerar dos casos:

a) Si la carga de prueba tiene el mismo signo que las otras dos, al desplazarla sobre la recta que las une, experimenta un movimiento oscilatorio. En efecto, si movemos la carga hasta P_1, al ser $\vec{E}_1$ mayor que $\vec{E}_2$, el campo resultante la obligará a desplazarse hacia Q_2 (figura 15.35); pero al sobrepasar el punto P, la fuerza resultante será de sentido contrario, oponiéndose, por tanto, al movimiento. En consecuencia, la carga de prueba se encuentra sometida en todo momento a una fuerza recuperadora.

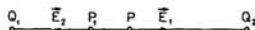


Fig. 15.35

Si desplazamos la carga de prueba en una dirección distinta a la de la recta que une las cargas, se alejará siguiendo la correspondiente línea de fuerza.

b) Si la carga de prueba tiene signo contrario que las otras dos, al desplazarla se acercará a la carga más próxima, cuya fuerza atractiva predomina, de acuerdo con la ley de Coulomb.

15.65. ***Dos cargas eléctricas puntuales, de 3 μC, se encuentran fijas en los puntos de coordenadas (2, 0) y (−2, 0). En el punto (0, 1) soltamos una partícula de 30 gramos de masa y 0,5 μC ¿Qué velocidad tendrá esta partícula al pasar por el punto (0, 3)? Considerar despreciables las fuerzas gravitatorias. Las coordenadas están expresadas en metros.***

Solución: El potencial eléctrico en el punto (0, 1) (véase fig. 15.36) es:

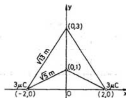


Fig. 15.36

$$V_{(0,1)} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \left[\frac{3 \cdot 10^{-6}\ C}{\sqrt{5}\ m} + \frac{3 \cdot 10^{-6}\ C}{\sqrt{5}\ m} \right] = \frac{54\ 000}{\sqrt{5}\ m}\ V$$

y en el punto (0, 3):

$$V_{(0,3)} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \left[\frac{3 \cdot 10^{-6}\ C}{\sqrt{13}\ m} + \frac{3 \cdot 10^{-6}\ C}{\sqrt{13}\ m} \right] = \frac{54\ 000}{\sqrt{13}\ m}\ V$$

La energía potencial eléctrica de la partícula en el punto (0, 1) es:

$$E_{P_{(0,1)}} = Q' \cdot V_{(0,1)} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ C \cdot \frac{54\,000}{\sqrt{5}}\ V = \frac{27 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{5}}\ J$$

y en el punto (0, 3):

$$E_{P_{(0,3)}} = Q' \cdot V_{(0,3)} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ C \cdot \frac{54\,000}{\sqrt{13}}\ V = \frac{27 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{13}}\ J$$

Aplicando el principio de conservación de la energía a la partícula móvil, resulta:

$$E_{P_{(0,1)}} = E_{P_{(0,3)}} + \frac{1}{2}\ m \cdot v^2$$

de donde:

$$v = \sqrt{\frac{2\,[E_{P_{(0,1)}} - E_{P_{(0,3)}}]}{m}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot \left[\frac{27 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{5}}\ J - \frac{27 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{13}}\ J\right]}{3 \cdot 10^{-2}\ kg}} = \boxed{\mathbf{0{,}555\ m/s}}$$

16. CAPACIDAD ELÉCTRICA. CONDENSADORES

FORMULARIO-RESUMEN

Polarización

$\vec{P} = n \cdot \vec{p}$ $\begin{cases} \vec{P} = \text{polarización (momento dipolar por unidad de volumen).} \\ n = \text{número de moléculas por unidad de volumen.} \\ \vec{p} = \text{momento dipolar de una molécula.} \end{cases}$

$P = \sigma_i$; (σ_i = densidad superficial de carga inducida en el dieléctrico).

Susceptibilidad eléctrica, χ: $\vec{P} = \chi \cdot \varepsilon_o \cdot \vec{E}$

Equivalencias:

$\varepsilon = 1 + \chi = \dfrac{\varepsilon_a}{\varepsilon_o}$	$\varepsilon_a = \varepsilon \cdot \varepsilon_o = \varepsilon_o \cdot (1 + \chi)$	$\chi = \varepsilon - 1 = \dfrac{\varepsilon_a - \varepsilon_o}{\varepsilon_o}$

Desplazamiento eléctrico o inducción eléctrica, $\vec{D}$: $\vec{D} = \varepsilon_o \cdot \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_a \cdot \vec{E}$

$D = \sigma$; (σ = densidad superficial de carga libre en el conductor).

Capacidad de un conductor, C: $C = \dfrac{Q}{V}$

Capacidad de una esfera conductora cargada de radio R:

$$C = 4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot R$$

Energía de un conductor cargado:

$$E_p = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\,C \cdot V^2 = \frac{1}{2}\,Q \cdot V$$

CONDENSADORES

Capacidad de un condensador: $C = \dfrac{Q}{V_1 - V_2}$ $\left\{ \begin{array}{l} (V_1 - V_2 = \text{diferencia de} \\ \text{potencial entre sus arma-} \\ \text{duras.}) \end{array} \right.$

Condensador plano: $C = \varepsilon_a \cdot \dfrac{S}{d}$ $\left\{ \begin{array}{l} S = \text{área de las armaduras.} \\ d = \text{separación entre láminas.} \end{array} \right.$

Condensador esférico: $C = 4\pi \cdot \varepsilon_a \cdot \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}$ $\left\{ \begin{array}{l} (R_2 \text{ y } R_1 \text{ son los radios} \\ \text{de las esferas exterior e} \\ \text{interior.}) \end{array} \right.$

Condensador cilíndrico: $C = \dfrac{2\pi \cdot \varepsilon_a \cdot l}{\ln (R_2/R_1)}$ $\left\{ \begin{array}{l} l = \text{longitud; } R_2 \text{ y } R_1 \text{ son} \\ \text{los radios del cilindro exte-} \\ \text{rior e interior.} \end{array} \right.$

CARGA Y DESCARGA DE UN CONDENSADOR A TRAVÉS DE UNA RESISTENCIA			
Carga	$q = Q \cdot (1 - e^{-t/RC})$	$i = I \cdot e^{-t/RC}$	Constante de tiempo: $\tau = R \cdot C$
Descarga	$q = Q \cdot e^{-t/RC}$	$i = -I \cdot e^{-t/RC}$	

Energía de un condensador cargado:

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot V$$

Densidad de energía electrostática:

$$u = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_a \cdot E^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot E$$

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES			
Paralelo	$V = V_i$	$Q = \Sigma\, Q_i$	$C = \Sigma\, C_i$
Serie	$V = \Sigma\, V_i$	$Q = Q_i$	$\dfrac{1}{C} = \Sigma\, \dfrac{1}{C_i}$

16. CAPACIDAD ELÉCTRICA. CONDENSADORES

16.1. *¿Por qué un cuerpo cargado atrae cuerpos ligeros descargados?*

Solución: Un cuerpo cargado no puede atraer, por fuerzas de Coulomb, a otro cuerpo que no lo esté. Ahora bien, en este cuerpo descargado se pueden producir fenómenos de influencia eléctrica que provocan en él una ordenación de cargas (**polarización**), la cual hace sensible al cuerpo a una posible atracción electrostática.

16.2. *Explica el significado de la siguiente frase: «Un conductor es impermeable al campo eléctrico.»*

Solución: En el interior de un conductor el campo eléctrico es nulo. Por lo tanto, si introducimos un conductor en el interior de un campo eléctrico, las líneas de fuerza no lo atraviesan, quedando detenidas en su superficie.

16.3. *Tenemos una gota de agua electrizada. ¿Qué sucede con su carga, potencial y capacidad a medida que se va evaporando?*

Solución: A medida que la gota se evapora su radio va disminuyendo y, por consiguiente, la capacidad ($C = 4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o R$) disminuirá también. La carga permanece constante y el potencial:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R}$$

aumentará.

16.4. *¿Es cierto que la capacidad de una esfera maciza es mayor que la de una esfera hueca del mismo radio?*

Solución: No es cierto, debido a que la capacidad de una esfera ($C = 4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot R$) depende únicamente del radio, siendo independiente de su masa y, por consiguiente, de si es maciza o no.

16.5. *¿Qué radio debe tener una esfera conductora cargada, situada en el vacío, para que su capacidad sea de 1 F?*

Solución: Como la capacidad de una esfera conductora cargada viene dada por:

$$C = 4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot R$$

resulta:

$$R = \frac{C}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} = \frac{1\text{ F}}{\dfrac{1}{9 \cdot 10^9 \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}}} = 9 \cdot 10^9 \text{ m} = \boxed{9 \cdot 10^6 \text{ km}}$$

Este resultado que acabamos de obtener pone de manifiesto que para conseguir una capacidad de 1 F, es necesario disponer de una esfera de **9** millones de kilómetros de radio, totalmente inasequible en la práctica. Esto demuestra que el faradio es una unidad de capacidad demasiado elevada.

16.6. ***El potencial de un conductor aumenta 500 V con una carga de 10^{-2} C. ¿Cuál es su capacidad?***

Solución:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{10^{-2}\ \text{C}}{5 \cdot 10^2\ \text{V}} = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{F} = \boxed{\mathbf{20\ \mu F}}$$

16.7. ***¿Qué carga necesita un conductor de 2 pF para aumentar su potencial 1 mV?***

Solución:

$$Q = C \cdot V = 2 \cdot 10^{-12}\ \text{F} \cdot 10^{-3}\ \text{V} = \boxed{\mathbf{2 \cdot 10^{-15}\ C}}$$

16.8. *(*) **Una esfera de 8 cm de radio posee una carga de 0,3 μC. Calcular:***

a) ***El potencial en un punto de su superficie.***
b) ***La densidad superficial de carga sobre la esfera.***
c) ***La energía almacenada en la esfera.***

Solución:

a) El potencial en un punto de la superficie de una esfera viene dado por la expresión:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R}$$

Aplicándola al caso del problema, tenemos:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{R} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{0{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{8 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = \boxed{\mathbf{33\ 750\ V}}$$

b) Calculemos ahora la densidad superficial de carga sobre la esfera, a la que designaremos por σ_s:

$$\sigma_s = \frac{Q}{S} = \frac{0{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{4\pi \cdot (8 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2} = \boxed{\mathbf{3{,}73 \cdot 10^{-6}\ C/m^2}}$$

c) Por último, la energía almacenada en la esfera será:

$$E_p = \frac{1}{2}\ Q \cdot V = \frac{1}{2}\ 0{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 33\ 750\ \text{V} = \boxed{\mathbf{5{,}06 \cdot 10^{-3}\ J}}$$

16.9. ***Calcular la capacidad de la Tierra, suponiendo que es esférica y que su radio es 6 370 km.***

Solución: Considerando la Tierra como esférica, su capacidad será:

$$C = 4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot R = \frac{1}{9 \cdot 10^9 \ \dfrac{N \cdot m^2}{C^2}} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \ m =$$

$$= 7{,}08 \cdot 10^{-4} \ F = \boxed{708 \ \mu F}$$

16.10. ***Calcular:***

a) ***El potencial que adquiere un conductor de 10 μF con una carga de 800 μC.***
b) ***El potencial de equilibrio que se establece poniendo en contacto este conductor así cargado con otro de capacidad triple y carga nula.***

Solución:

a) El potencial de un conductor viene dado por la relación: $V = \dfrac{Q}{C}$.

Sustituyendo en esta expresión los datos del problema, expresados en unidades correspondientes al Sistema Internacional, tenemos:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{8 \cdot 10^{-4} \ C}{10^{-5} \ F} = \boxed{80 \ V}$$

b) Al poner en contacto ambos conductores, la carga total será la del primero (el otro está descargado). Por tanto: $Q = 8 \cdot 10^{-4}$ C.

La capacidad total del sistema es igual a la suma de las capacidades de los dos conductores: $C = C_1 + C_2 = 10 \ \mu F + 30 \ \mu F = 40 \ \mu F$.

Por consiguiente, el potencial de equilibrio valdrá:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{8 \cdot 10^{-4} \ C}{4 \cdot 10^{-5} \ F} = \boxed{20 \ V}$$

16.11. ***Una esfera metálica de 10 cm de radio, aislada, se carga a 5 000 V. Seguidamente se une a otra descargada y aislada, de 8 cm de radio. Deducir el potencial común de ambas.***

Solución: Las capacidades de las dos esferas son:

$$C_1 = 4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot R_1 = \frac{1}{9 \cdot 10^9 \ \dfrac{N \cdot m^2}{C^2}} \cdot 10^{-1} \ m = \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} \ F$$

$$C_2 = 4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot R_2 = \frac{1}{9 \cdot 10^9 \ \dfrac{N \cdot m^2}{C^2}} \cdot 8 \cdot 10^{-2} \ m = \frac{8}{9} \cdot 10^{-11} \ F$$

La carga que adquiere la primera esfera al someterla a una tensión de 5 000 V es:

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} \text{ F} \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ V} = \frac{5}{9} \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

Al unir las dos esferas la capacidad total del conjunto será:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} \text{ F} + \frac{8}{9} \cdot 10^{-11} \text{ F} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

Por consiguiente, el potencial común de las dos esferas es:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{\frac{5}{9} \cdot 10^{-7} \text{ C}}{2 \cdot 10^{-11} \text{ F}} = \frac{5}{18} \cdot 10^4 \text{ V} = \boxed{\mathbf{2\ 778\ V}}$$

16.12. ***Se tienen en el vacío dos esferas conductoras, de radios respectivos 10 cm y 5 cm. La primera se carga a un potencial de 500 V y se pone en contacto, a continuación, con la segunda esfera, que inicialmente estaba descargada. Calcular el calor desprendido en el proceso.***

Solución: Las capacidades de las dos esferas son:

$$C_1 = 4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot R_1 = \frac{1}{9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}} \cdot 10^{-1} \text{ m} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

$$C_2 = 4\pi\varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot R_2 = \frac{1}{9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = \frac{1}{18} \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

y la carga que adquiere la primera:

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} \text{ F} \cdot 5 \cdot 10^2 \text{ V} = \frac{5}{9} \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Como la segunda esfera estaba descargada, la energía total del sistema antes de la asociación será:

$$E_p = E_{p_1} = \frac{1}{2} Q_1 \cdot V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot 10^{-8} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^2 \text{ V} =$$

$$= \frac{25}{18} \cdot 10^{-6} \text{ J} = 1{,}389 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Una vez que se establece el contacto entre ambas esferas, la capacidad de la asociación será:

$$C' = C_1 + C_2 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-10} \text{ F} + \frac{1}{18} \cdot 10^{-10} \text{ F} = \frac{1}{6} \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

y la carga total:

$$Q' = Q_1 = \frac{5}{9} \cdot 10^{-8}\ C$$

siendo la energía final de la asociación:

$$E'_p = \frac{1}{2}\ \frac{Q'^2}{C'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{5}{9} \cdot 10^{-8}\ C\right)^2}{\frac{1}{6} \cdot 10^{-10}\ F} = 0,926 \cdot 10^{-6}\ J$$

La cantidad de energía que se pierde en el proceso será:

$$W = E_p - E'_p = 1,389 \cdot 10^{-6}\ J - 0,926 \cdot 10^{-6}\ J =$$
$$= 0,463 \cdot 10^{-6}\ J = 4,63 \cdot 10^{-7}\ J$$

Calor = 4,63 · 10⁻⁷ J

16.13. ***¿Cómo influye en la capacidad el dieléctrico interpuesto entre las armaduras de un condensador?***

Solución: La presencia de un dieléctrico aumenta la capacidad de un condensador, tanto más cuanto mayor sea su constante dieléctrica.

16.14. ***¿Puede aumentarse la capacidad de un condensador fijo? Razona la respuesta.***

Solución: La capacidad de un condensador fijo puede aumentarse sustituyendo el dieléctrico interpuesto entre sus armaduras por otro de constante dieléctrica más elevada.

16.15. ***¿Qué será preferible: el vidrio o la mica, para aumentar la capacidad de un condensador?***

Solución: En principio sería preferible el vidrio, ya que su constante dieléctrica es mayor que la de la mica. Sin embargo, la mica puede exfoliarse en capas muy finas, de menos espesor que el vidrio, con lo que, al permitir una mayor aproximación entre las armaduras, da origen a la obtención de condensadores de mayor capacidad.

16.16. ***Supón que tienes un condensador de aire y que intercalas entre sus armaduras una lámina de dieléctrico. ¿Cómo varían la diferencia de potencial y la intensidad de campo?***

Solución:

- Si una vez cargado el condensador se desconecta del generador y se introduce el dieléctrico entre sus armaduras, la capacidad aumenta y,

como la carga permanece constante, el potencial y el campo eléctrico disminuyen.

b) Si, por el contrario, mientras se introduce el dieléctrico, el condensador se mantiene unido al generador, el potencial y el campo eléctrico no varían, pero la capacidad y la carga de las armaduras aumentan proporcionalmente a la permitividad del dieléctrico interpuesto.

16.17. ***Siendo 314 cm² la superficie de cada una de las láminas de un condensador plano, 5 cm la distancia que las separa y 5 la constante dieléctrica relativa del medio interpuesto, calcular:***

a) La capacidad del condensador.

b) La carga que recibe, si se carga a 1 000 V.

Solución:

a)

$$C = \varepsilon_a \cdot \frac{S}{d} = \varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot \frac{S}{d} = \frac{5}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 9 \cdot 10^{9}} \frac{F}{m} \cdot \frac{3{,}14 \cdot 10^{-2}\ m^2}{5 \cdot 10^{-2}\ m} =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot 10^{-9}\ F = 27{,}8 \cdot 10^{-12}\ F = \boxed{\mathbf{27{,}8\ pF}}$$

b)

$$Q = C \cdot (V_1 - V_2) = 27{,}8 \cdot 10^{-12}\ F \cdot 10^3\ V = 27{,}8 \cdot 10^{-9}\ C = \boxed{\mathbf{27{,}8\ nC}}$$

16.18. ***(*) Un condensador está formado por dos placas paralelas, separadas por una capa de aire de 2 mm de espesor, siendo el área de la superficie de cada armadura 120 cm². Calcular la capacidad del condensador y la carga que adquiere al conectarlo a una fuente de 200 V.***

Solución: La capacidad del condensador y la carga que adquiere se calculan fácilmente aplicando las correspondientes fórmulas:

$$C = \varepsilon_a \cdot \frac{S}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{F}{m} \cdot \frac{120 \cdot 10^{-4}\ m^2}{2 \cdot 10^{-3}\ m} =$$

$$= 5{,}31 \cdot 10^{-11}\ F = \boxed{\mathbf{53{,}1\ pF}}$$

$$Q = C \cdot (V_1 - V_2) = 5{,}31 \cdot 10^{-11}\ F \cdot 200\ V =$$

$$= 1{,}062 \cdot 10^{-8}\ C = \boxed{\mathbf{10{,}62\ nC}}$$

16.19. ***Un condensador plano está formado por dos láminas paralelas de 100 cm² de superficie, separadas una distancia de 1 mm. Si se carga con una diferencia de potencial de 1 000 V, ¿cuál será la carga de cada una de sus armaduras? Si una vez cargado se introduce un dieléctrico de coeficiente 5 entre sus armaduras, ¿cuál será la nueva diferencia de potencial entre ellas?***

Solución: En el primer caso:

$$C_o = \varepsilon_o \cdot \frac{S}{d} = 8{,}855 \cdot 10^{-12}\ \frac{F}{m} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4}\ m^2}{10^{-3}\ m} = 8{,}855 \cdot 10^{-11}\ F$$

con lo que:

$$Q = C_o \cdot V_o = 8{,}855 \cdot 10^{-11}\ F \cdot 10^3\ V = \boxed{\mathbf{8{,}855 \cdot 10^{-8}\ C}}$$

Al introducir el dieléctrico entre las armaduras del condensador:

$$C = \varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot \frac{S}{d} = \varepsilon \cdot C_o = 5 \cdot 8{,}855 \cdot 10^{-11}\ F = 4{,}4275 \cdot 10^{-10}\ F$$

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{8{,}855 \cdot 10^{-8}\ C}{4{,}4275 \cdot 10^{-10}\ F} = \boxed{\mathbf{200\ V}}$$

16.20. ***La distancia entre las armaduras de un condensador plano es 5 cm y la constante dieléctrica relativa del dieléctrico que las separa vale 5. ¿Cuánto mide la superficie de cada una de sus armaduras si la capacidad del condensador es 27,8 pF? ¿Qué carga admitirá si la tensión entre las armaduras es de 1 000 V?***

Solución: La expresión que permite calcular la capacidad de un condensador plano es:

$$C = \varepsilon \cdot \varepsilon_o \cdot \frac{S}{d}$$

De aquí se deduce:

$$S = \frac{1}{\varepsilon \cdot \varepsilon_o}\ C \cdot d =$$

$$= \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9\ N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}{5} \cdot 2{,}78 \cdot 10^{-12}\ F \cdot 5 \cdot 10^{-2}\ m =$$

$$= \boxed{\mathbf{3{,}14 \cdot 10^{-2}\ m^2}}$$

La carga que almacenan las armaduras del condensador es:

$$Q = C \cdot V = 27{,}8 \cdot 10^{-12}\ F \cdot 10^3\ V = 27{,}8 \cdot 10^{-9}\ C = \boxed{\mathbf{27{,}8\ nC}}$$

16.21. *(*) Un condensador plano formado por placas circulares de radio 20 cm, adquiere una energía de $3 \cdot 10^{-5}$ J cuando se le conecta a una fuente de fuerza electromotriz de 1 000 V.*

a) ¿Cuál es la separación entre placas si el dieléctrico es el aire?
b) Si se le desconecta de la fuente, calcular la diferencia de potencial entre sus placas cargadas cuando se las separa hasta una distancia igual al doble de la primitiva.

c) *¿Cuál será la carga final de las placas si se realiza la anterior separación con el condensador conectado a la fuente de 1 000 V?*

Solución:

a) Conociendo la energía del condensador y la diferencia de potencial entre sus armaduras, podemos calcular fácilmente su capacidad. En efecto, ya que:

$$E_p = \frac{1}{2} C \cdot V^2$$

$$C = \frac{2 E_p}{V^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-5} J}{(10^3 V)^2} = 6 \cdot 10^{-11} F$$

Por otra parte, dado que: $C = \varepsilon_a \cdot \frac{S}{d}$, resulta:

$$d = \frac{\varepsilon_a \cdot S}{C} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot \pi (2 \cdot 10^{-1} m)^2}{6 \cdot 10^{-11} F} = 1{,}86 \cdot 10^{-2} m =$$

$$= \boxed{1{,}86 \text{ cm}}$$

b) Si el condensador se desconecta de la fuente, la carga de las dos armaduras sigue siendo la misma. Llamemos d' a la nueva separación entre las placas. Se cumple que: d' = 2 d. En consecuencia, la capacidad del nuevo condensador es:

$$C' = \frac{1}{2} C$$

y la diferencia de potencial entre sus armaduras:

$$V' = \frac{Q}{C'} = \frac{Q}{\frac{1}{2} C} = \frac{2 Q}{C} = 2 \cdot V = 2 \cdot 1\,000 \text{ V} = \boxed{2\,000 \text{ V}}$$

c) En este último caso:

$$Q' = C' \cdot V = \frac{1}{2} C \cdot V = \frac{1}{2}\, 6 \cdot 10^{-11} F \cdot 10^3 V = 3 \cdot 10^{-8} C = \boxed{30 \text{ nC}}$$

16.22. *¿En qué se convierte la energía de un condensador cuando se le descarga conectando mediante un hilo metálico sus dos armaduras?*

Solución: Se convierte en calor, a causa del efecto Joule que se produce en el hilo metálico al pasar por él la corriente eléctrica procedente de la descarga del condensador.

16.23. *Un condensador de 500 µF se carga a 2 000 V. ¿Qué carga almacenará? Si se descarga a través de un conductor introducido en un recipiente con 100 g de agua, ¿cuánto aumentará la temperatura de ésta?*

Solución: La carga que almacena el condensador es:

$$Q = C \cdot V = 500 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot 2 \cdot 10^3\ \text{V} = \boxed{1\ \text{C}}$$

y su energía:

$$E_p = \frac{1}{2}\ Q \cdot V = \frac{1}{2}\ 1\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^3\ \text{V} = 10^3\ \text{J}$$

Esta energía, expresada en calorías, vale:

$$10^3\ \text{J} \cdot \frac{0{,}24\ \text{cal}}{1\ \text{J}} = 240\ \text{cal}$$

Aplicando, ahora, la ecuación fundamental de la calorimetría:

$$\text{Calor} = m \cdot c \cdot \Delta t$$

resulta:

$$\Delta t = \frac{\text{Calor}}{m \cdot c} = \frac{240\ \text{cal}}{100\ \text{g} \cdot 1\ \dfrac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}}} = \boxed{2{,}4\ {}^\circ\text{C}}$$

16.24. ***Un condensador de 100 μF se carga a 2 500 V. ¿Qué cantidad de hielo, a 0° C, se puede fundir si en la descarga del condensador toda la energía del mismo se emplea en fundir el hielo?***

Solución: La energía del condensador valdrá:

$$E_p = \frac{1}{2}\ C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}\ \text{F} \cdot (2\ 500\ \text{V})^2 = 312{,}5\ \text{J} =$$

$$= 312{,}5\ \text{J} \cdot \frac{0{,}24\ \text{cal}}{1\ \text{J}} = 75\ \text{cal}$$

Como el calor latente de fusión del hielo es 80 cal/g, la cantidad de hielo que puede fundirse con 75 calorías será:

$$m = 75\ \text{cal} \cdot \frac{1\ \text{g}}{80\ \text{cal}} = \boxed{0{,}94\ \text{g}}$$

16.25. ***¿Por qué factor viene limitada la carga de un condensador?***

Solución: La carga máxima que puede suministrarse a un condensador viene determinada por la rigidez dieléctrica del dieléctrico interpuesto entre las armaduras, la cual determina, a su vez, la diferencia de potencial máxima que puede soportar sin perforarse. Esta diferencia de potencial, multiplicada por la capacidad del condensador, nos da el valor de la carga máxima que puede adquirir.

16.26. *Se conecta un condensador de 20 μF a un generador de 200 V a través de una resistencia de 0,5 MΩ.*

a) ***Hallar la carga del condensador al cabo de 0 s, 5 s, 10 s, 20 s, 40 s y 100 s después de haberlo conectado.***

b) ***Hallar la intensidad de la corriente de carga en esos mismos instantes.***

c) ***¿Qué tiempo sería necesario para que el condensador adquiera su carga final si la intensidad de la corriente de carga fuese en todo momento igual a la inicial? Comparar este tiempo con la constante de tiempo del circuito.***

d) ***¿Qué tiempo será necesario para que la carga del condensador aumente de 0 a 2 · 10⁻³ C?***

e) ***Trazar las gráfica de la carga y de la intensidad de corriente en función del tiempo, en base a los datos correspondientes a los apartados a) y b).***

Solución:

a) La carga máxima del condensador es:

$$Q = C \cdot E = 20 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 2 \cdot 10^{2}\ V = 4 \cdot 10^{-3}\ C = 4\ mC$$

Por otra parte, R · C vale:

$$R \cdot C = 0{,}5 \cdot 10^{6}\ \Omega \cdot 20 \cdot 10^{-6}\ F = 10\ s$$

Aplicando la fórmula correspondiente a la carga del condensador:

$$q = Q \cdot (1 - e^{-t/RC})$$

tenemos:

Para t = 0 s: $q = 4 \cdot 10^{-3}\ C \cdot (1 - e^{0}) = \boxed{0\ C}$

Para t = 5 s: $q = 4 \cdot 10^{-3}\ C \cdot (1 - e^{-0,5}) \simeq \boxed{1{,}57 \cdot 10^{-3}\ C}$

Para t = 10 s: $q = 4 \cdot 10^{-3}\ C \cdot (1 - e^{-1}) \simeq \boxed{2{,}53 \cdot 10^{-3}\ C}$

Para t = 20 s: $q = 4 \cdot 10^{-3}\ C \cdot (1 - e^{-2}) \simeq \boxed{3{,}46 \cdot 10^{-3}\ C}$

Para t = 40 s: $q = 4 \cdot 10^{-3}\ C \cdot (1 - e^{-4}) \simeq \boxed{3{,}93 \cdot 10^{-3}\ C}$

Para t = 100 s: $q = 4 \cdot 10^{-3}\ C \cdot (1 - e^{-10}) \simeq \boxed{4 \cdot 10^{-3}\ C}$

b) La intensidad máxima de la corriente de carga al comienzo es:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{200\ V}{5 \cdot 10^{5}\ \Omega} = 4 \cdot 10^{-4}\ A$$

Aplicando la fórmula correspondiente a la intensidad de carga: $i = I \cdot e^{-t/RC}$, en los tiempos reseñados, tenemos:

Para t = 0 s: $i = 4 \cdot 10^{-4}\ A \cdot e^{0} = \boxed{4 \cdot 10^{-4}\ A}$

Para t = 5 s: $i = 4 \cdot 10^{-4}\ A \cdot e^{-0,5} \simeq \boxed{2{,}43 \cdot 10^{-4}\ A}$

Para t = 10 s: $i = 4 \cdot 10^{-4}\ \text{A} \cdot e^{-1} \simeq \boxed{1{,}47 \cdot 10^{-4}\ \text{A}}$

Para t = 20 s: $i = 4 \cdot 10^{-4}\ \text{A} \cdot e^{-2} \simeq \boxed{0{,}54 \cdot 10^{-4}\ \text{A}}$

Para t = 40 s: $i = 4 \cdot 10^{-4}\ \text{A} \cdot e^{-4} \simeq \boxed{0{,}07 \cdot 10^{-4}\ \text{A}}$

Para t = 100 s: $i = 4 \cdot 10^{-4}\ \text{A} \cdot e^{-10} \simeq \boxed{0\ \text{A}}$

c) La carga final del condensador es $Q = 4 \cdot 10^{-3}$ C y la intensidad inicial de carga es $I = 4 \cdot 10^{-4}$ A. Por lo tanto:

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{4 \cdot 10^{-3}\ \text{C}}{4 \cdot 10^{-4}\ \text{A}} = \boxed{10\ \text{s}}$$

Por otra parte, la constante de tiempo del circuito es: $\tau = R \cdot C = 10$ s

De aquí se deduce que la constante de tiempo de un circuito es igual al tiempo que emplearía un condensador en adquirir una carga igual a la final, con una intensidad de corriente igual, en todo momento, a la inicial.

d) De la ecuación $q = Q \cdot (1 - e^{-t/RC})$ obtenemos:

$$e^{-t/RC} = 1 - \frac{q}{Q} = \frac{Q - q}{Q}$$

Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros, resulta:

$$\frac{t}{R \cdot C} = -\ln\left[\frac{Q - q}{Q}\right] = \ln\left[\frac{Q}{Q - q}\right]$$

de donde:

$$t = R \cdot C \cdot \ln\left[\frac{Q}{Q - q}\right] =$$

$$= 0{,}5 \cdot 10^{6}\ \Omega \cdot 20 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot \ln\left[\frac{4 \cdot 10^{-3}\ \text{C}}{(4 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3})\ \text{C}}\right] = \boxed{6{,}93\ \text{s}}$$

e) Las gráficas de la carga y de la intensidad de corriente en función del tiempo se ven en las figuras 16.1 y 16.2, respectivamente.

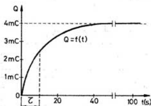


Fig. 16.1

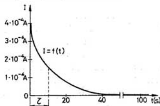


Fig. 16.2

16.27. ***En el circuito de la figura 16.3:***

a) ***¿Cuál es el valor de la constante de tiempo?***

b) ***Transcurrido un tiempo igual a la constante de tiempo, se abre el circuito. ¿Cuál será el valor de la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador de 60 μF?***

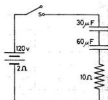


Fig. 16.3

Solución:

a) La constante de tiempo del circuito es: $\tau = R \cdot C$. Calculemos, en primer lugar, la capacidad equivalente de la asociación:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{30\ \mu F} + \frac{1}{60\ \mu F} = \frac{1}{20\ \mu F}$$

de donde: $C = 20\ \mu F$.
Por tanto:

$$\tau = R \cdot C = 12\ \Omega \cdot 20 \cdot 10^{-6}\ F = \boxed{2{,}4 \cdot 10^{-4}\ s}$$

b) La carga adquirida por el sistema formado por los dos condensadores durante el intervalo de tiempo determinado en a) es:

$$q = E \cdot C \cdot (1 - e^{-t/RC}) = 120\ V \cdot 20 \cdot 10^{-6}\ F \cdot (1 - e^{-1}) =$$
$$= 120\ V \cdot 20 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 0{,}632 = 1{,}517 \cdot 10^{-3}\ C$$

Al abrir el interruptor la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador de 60 μF será:

$$V = \frac{q}{C_1} = \frac{1{,}517 \cdot 10^{-3}\ C}{60 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{25{,}2\ V}$$

16.28. ***Un condensador de 2 μF se carga a una tensión de 500 V. ¿Qué carga almacena? ¿Qué energía posee?***

Solución: La carga del condensador será:

$$Q = C \cdot V = 2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 5 \cdot 10^2\ V = \boxed{10^{-3}\ C}$$

En cuanto a la energía, se puede calcular mediante las fórmulas:

$$E_p = \frac{1}{2}\ Q \cdot V, \quad E_p = \frac{1}{2}\ C \cdot V^2 \quad o \quad E_p = \frac{1}{2}\ \frac{Q^2}{C}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\ Q \cdot V = \frac{1}{2}\ 10^{-3}\ C \cdot 5 \cdot 10^2\ V = \boxed{0{,}25\ J}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\ C \cdot V^2 = \frac{1}{2}\ 2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot (5 \cdot 10^2\ V)^2 = \boxed{0{,}25\ J}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\,\frac{(10^{-3}\ C)^2}{2 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{0{,}25\ J}$$

16.29. *¿Cuándo conviene montar condensadores en serie y cuándo en paralelo?*

Solución: Los condensadores deben montarse en serie cuando se desee obtener una capacidad equivalente menor que cualquiera de las capacidades asociadas. Además, en este tipo de asociación cada condensador está sometido a una parte de la tensión total, reduciéndose así el riesgo de la perforación de sus dieléctricos a causa de la descarga disruptiva.

Los condensadores se montarán en paralelo cuando interese una capacidad equivalente mayor que cualquiera de las asociadas, lográndose de esta forma acumular grandes cantidades de electricidad con diferencias de potencial pequeñas.

16.30. *Dibuja dos condensadores en serie. ¿Qué puedes decir sobre la cantidad de electricidad almacenada en sus armaduras?*

Solución: En la figura 16.4 se observa cómo el generador carga por contacto la primera placa inductora A con una carga Q; esta carga Q, por inducción, atrae a otra igual —pero de signo contrario— en la placa B y rechaza otra igual y del mismo signo en la placa inductora C, ..., etc.

Por tanto, todas las cargas Q de los sucesivos condensadores unidos en serie tienen todas ellas el mismo valor.

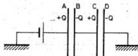


Fig. 16.4

16.31. *Calcular la capacidad de dos condensadores de 0,6 y 0,4 μF asociados en paralelo. ¿Cuál será su carga y su tensión si se conecta el conjunto a una tensión de 800 V?*

Solución: La capacidad equivalente es la suma de las capacidades de los condensadores asociados:

$$C = C_1 + C_2 = 0{,}6\ \mu F + 0{,}4 \mu F = \boxed{1\ \mu F = 10^{-6}\ F}$$

La tensión de cada condensador asociado, al estar en paralelo, es la misma que la del conjunto:

$$\boxed{V_1 = V_2 = V = 800\ V}$$

La carga de cada condensador asociado vale:

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 = 6 \cdot 10^{-7}\ F \cdot 8 \cdot 10^2\ V = \boxed{4{,}8 \cdot 10^{-4}\ C}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot V_2 = 4 \cdot 10^{-7}\ F \cdot 8 \cdot 10^2\ V = \boxed{3{,}2 \cdot 10^{-4}\ C}$$

16.32. ***Se tienen tres condensadores de 2, 3 y 5 μF cada uno. Se conectan en paralelo y el conjunto se carga a una tensión de 1 000 V. Calcular:***

a) La capacidad equivalente y la carga almacenada en la asociación.
b) La energía que posee la asociación.
c) La tensión, carga y energía de cada condensador.

Solución:

a) La capacidad equivalente es:

$$C = \Sigma C_i = 2\ \mu F + 3\ \mu F + 5\ \mu F = \boxed{10\ \mu F = 10^{-5}\ F}$$

y la carga almacenada en la asociación:

$$Q = C \cdot V = 10^{-5}\ F \cdot 10^3\ V = \boxed{10^{-2}\ C}$$

b) La energía de la asociación valdrá:

$$E_p = \frac{1}{2}\ Q \cdot V = \frac{1}{2}\ 10^{-2}\ C \cdot 10^3\ V = \boxed{5\ J}$$

c) La tensión de todos los condensadores es la misma:

$$\boxed{V = V_1 = V_2 = V_3 = 1\ 000\ V}$$

Calculemos ahora la carga que almacena cada condensador:

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 = 2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 10^3\ V = \boxed{2 \cdot 10^{-3}\ C}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot V_2 = 3 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 10^3\ V = \boxed{3 \cdot 10^{-3}\ C}$$

$$Q_3 = C_3 \cdot V_3 = 5 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 10^3\ V = \boxed{5 \cdot 10^{-3}\ C}$$

Podemos comprobar que $Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q = 10^{-2}$ C.

Por último, las energías acumuladas en los tres condensadores son:

$$E_{p_1} = \frac{1}{2}\ Q_1 \cdot V_1 = \frac{1}{2}\ 2 \cdot 10^{-3}\ C \cdot 10^3\ V = \boxed{1\ J}$$

$$E_{p_2} = \frac{1}{2}\ Q_2 \cdot V_2 = \frac{1}{2}\ 3 \cdot 10^{-3}\ C \cdot 10^3\ V = \boxed{1{,}5\ J}$$

$$E_{p_3} = \frac{1}{2}\ Q_3 \cdot V_3 = \frac{1}{2}\ 5 \cdot 10^{-3}\ C \cdot 10^3\ V = \boxed{2{,}5\ J}$$

Compruébese cómo $E_{p_1} + E_{p_2} + E_{p_3} = E_p = 5$ J.

16.33. ***Tres condensadores de 2, 3 y 6 μF se asocian en serie y el conjunto se carga a 10 V. Calcular:***

a) La capacidad equivalente de la asociación, su carga y la energía que almacena.
b) La carga de cada condensador.

c) La tensión y energía acumulada en cada condensador.

Solución:

a) Aplicando la fórmula correspondiente, tenemos:

$$\frac{1}{C} = \Sigma \frac{1}{C_i} = \frac{1}{2\ \mu F} + \frac{1}{3\ \mu F} + \frac{1}{6\ \mu F} = \frac{1}{1\ \mu F}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\mathbf{C = 1\ \mu F = 10^{-6}\ F}}$$

La carga de la asociación será:

$$Q = C \cdot V = 10^{-6}\ F \cdot 10\ V = \boxed{\mathbf{10^{-5}\ C}}$$

y su energía:

$$E_P = \frac{1}{2}\ Q \cdot V = \frac{1}{2}\ 10^{-5}\ C \cdot 10\ V = \boxed{\mathbf{5 \cdot 10^{-5}\ J}}$$

b) La carga de los tres condensadores es:

$$\boxed{\mathbf{Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q = 10^{-5}\ C}}$$

c) Las tensiones de los tres condensadores son las siguientes:

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{10^{-5}\ C}{2 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{\mathbf{5\ V}}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{10^{-5}\ C}{3 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{\mathbf{\frac{10}{3}\ V}}$$

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{10^{-5}\ C}{6 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{\mathbf{\frac{10}{6}\ V}}$$

Compruébese cómo $V_1 + V_2 + V_3 = V = 10\ V$.
Hallemos, por último, las energías almacenadas en cada condensador:

$$E_{P_1} = \frac{1}{2}\ Q_1 \cdot V_1 = \frac{1}{2}\ 10^{-5}\ C \cdot 5\ V = \boxed{\mathbf{2{,}5 \cdot 10^{-5}\ J}}$$

$$E_{P_2} = \frac{1}{2}\ Q_2 \cdot V_2 = \frac{1}{2}\ 10^{-5}\ C \cdot \frac{10}{3}\ V = \boxed{\mathbf{\frac{5}{3} \cdot 10^{-5}\ J}}$$

$$E_{P_3} = \frac{1}{2}\ Q_3 \cdot V_3 = \frac{1}{2}\ 10^{-5}\ C \cdot \frac{10}{6}\ V = \boxed{\mathbf{\frac{5}{6} \cdot 10^{-5}\ J}}$$

Podemos comprobar que: $E_{P_1} + E_{P_2} + E_{P_3} = E_P = 5 \cdot 10^{-5}\ J$

16.34. ***Se tienen tres condensadores de 2, 5 y 10 μF asociados en serie. El conjunto se carga a 40 000 V. Calcular:***

a) ***La capacidad equivalente de la asociación.***
b) ***La carga de cada condensador.***
c) ***La tensión de cada condensador.***

Solución:

a) La inversa de la capacidad equivalente es la suma de las inversas de las capacidades de los condensadores asociados:

$$\frac{1}{C} = \Sigma\ \frac{1}{C_i} = \frac{1}{2\ \mu F} + \frac{1}{5\ \mu F} + \frac{1}{10\ \mu F} = \frac{8}{10\ \mu F}$$

de donde:

$$\boxed{C = 1{,}25\ \mu F}$$

b) La carga de la asociación es igual a la de cada uno de los condensadores:

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1{,}25 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 4 \cdot 10^4\ V = \boxed{5 \cdot 10^{-2}\ C}$$

c) Calculemos, por último, la tensión de cada condensador:

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{5 \cdot 10^{-2}\ C}{2 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{25\ 000\ V}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{5 \cdot 10^{-2}\ C}{5 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{10\ 000\ V}$$

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{5 \cdot 10^{-2}\ C}{10^{-5}\ F} = \boxed{5\ 000\ V}$$

16.35. ***Tres condensadores, A, B y C, de 2, 4 y 6 μF, respectivamente, se montan: los dos primeros, A y B, en paralelo, y este conjunto en serie con el condensador C. En los extremos de la asociación se establece una diferencia de potencial de 1 000 V. Calcular:***

a) ***La capacidad equivalente de la asociación.***
b) ***La carga total almacenada.***
c) ***La carga y la tensión de cada condensador.***
d) ***Suponiendo que toda la energía de la asociación se emplee en calentar 500 mg de agua líquida, calcular el aumento de temperatura experimentado.***

Solución:

a) Se resuelve primero la asociación en paralelo, originándose así el condensador equivalente D, de capacidad C_D (fig. 16.5):

$$C_D = C_A + C_B = 2\ \mu F + 4\ \mu F = 6\ \mu F$$

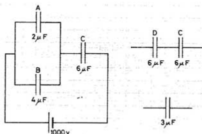


Fig. 16.5

y a continuación se resuelve la nueva asociación en serie obtenida:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_C} + \frac{1}{C_D} = \frac{1}{6\ \mu F} + \frac{1}{6\ \mu F} = \frac{1}{3\ \mu F}$$

de donde:

$$\boxed{C = 3\ \mu F}$$

b) La carga total almacenada en la asociación será:

$$Q = C \cdot V = 3 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 10^3\ V = \boxed{3 \cdot 10^{-3}\ C}$$

c) Como los condensadores C y D (este último equivalente a A y B) están asociados en serie, sus cargas serán iguales entre sí e iguales, asimismo, a la carga total:

$$\boxed{Q = Q_C = Q_D = 3 \cdot 10^{-3}\ C}$$

Las tensiones de los condensadores C y D valdrán:

$$V_C = \frac{Q_C}{C_C} = \frac{3 \cdot 10^{-3}\ C}{6 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{500\ V}$$

$$V_D = \frac{Q_D}{C_D} = \frac{3 \cdot 10^{-3}\ C}{6 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{500\ V}$$

Ahora bien, como los condensadores A y B están asociados en paralelo, se cumplirá que:

$$\boxed{V_A = V_B = V_D = 500\ V}$$

Por último, las cargas de los condensadores A y B serán:

$$Q_A = C_A \cdot V_A = 2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 5 \cdot 10^2\ V = \boxed{10^{-3}\ C}$$

$$Q_B = C_B \cdot V_B = 4 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot 5 \cdot 10^2\ \text{V} = \boxed{2 \cdot 10^{-3}\ \text{C}}$$

Resumiendo:

Condensador	Capacidad	Carga	Tensión
A	2 F	10^{-3} C	500 V
B	4 F	$2 \cdot 10^{-3}$ C	500 V
C	6 F	$3 \cdot 10^{-3}$ C	500 V

d) La energía de la asociación es:

$$E_p = \frac{1}{2}\ Q \cdot V = \frac{1}{2}\ 3 \cdot 10^{-3}\ \text{C} \cdot 10^3\ \text{V} = 1{,}5\ \text{J}$$

que equivale a una cantidad de calor de:

$$1{,}5\ \text{J} \cdot \frac{0{,}24\ \text{cal}}{1\ \text{J}} = 0{,}36\ \text{cal}$$

Como: Calor = m · c · Δt, el aumento de temperatura que experimenta el agua es:

$$\Delta t = \frac{\text{Calor}}{\text{m} \cdot \text{c}} = \frac{0{,}36\ \text{cal}}{0{,}5\ \text{g} \cdot 1\ \text{cal/g} \cdot °\text{C}} = \boxed{0{,}72\ °\text{C}}$$

16.36. ***Imagina un circuito como el de la figura 16.6. La tensión es de 1 000 V en los extremos de la asociación. ¿Qué carga almacena cada condensador?***

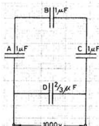


Fig. 16.6

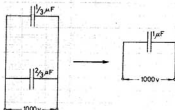


Fig. 16.7

Solución: Los tres condensadores de 1 μF están en serie, y este conjunto está en paralelo con el condensador de 2/3 μF. La figura 16.7 muestra las sucesivas reducciones hasta llegar al condensador equivalente.

La capacidad equivalente a la asociación en serie viene dada por:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{1\ \mu F} + \frac{1}{1\ \mu F} + \frac{1}{1\ \mu F} = \frac{3}{1\ \mu F}$$

de donde:

$$C = \frac{1}{3}\ \mu F$$

La capacidad total equivalente, al tratarse ahora de una asociación en paralelo, valdrá:

$$C = \frac{1}{3}\ \mu F + \frac{2}{3}\ \mu F = 1\ \mu F$$

La tensión que soporta el condensador de $\frac{2}{3}$ μF es igual a la del condensador equivalente de $\frac{1}{3}$ μF, ya que ambos están asociados en paralelo y es igual, a su vez, a la tensión existente en los extremos de la asociación.

Por tanto:

$$Q_A = Q_B = Q_C = Q_{1/3} = C_{1/3} \cdot V = \frac{1}{3} \cdot 10^{-6}\ F \cdot 10^3\ V = \boxed{\frac{1}{3} \cdot 10^{-3}\ C}$$

$$Q_D = C_D \cdot V = \frac{2}{3} \cdot 10^{-6}\ F \cdot 10^3\ V = \boxed{\frac{2}{3} \cdot 10^{-3}\ C}$$

16.37. ***Dos condensadores, de capacidades 2 y 6 pF, están conectados en paralelo. Si el conjunto se carga a 120 V, ¿qué carga adquiere cada condensador? ¿Qué energía almacenará el conjunto?***

Solución: La carga del primer condensador es:

$$Q_1 = C_1 \cdot V = 2 \cdot 10^{-12}\ F \cdot 120\ V = \boxed{2{,}4 \cdot 10^{-10}\ C}$$

y la del segundo:

$$Q_2 = C_2 \cdot V = 6 \cdot 10^{-12}\ F \cdot 120\ V = \boxed{7{,}2 \cdot 10^{-10}\ C}$$

La capacidad equivalente de la asociación es la suma de las capacidades de los condensadores asociados:

$$C = C_1 + C_2 = 2\ pF + 6\ pF = 8\ pF$$

Con todos estos datos podemos calcular la energía almacenada en el conjunto:

$$E_p = \frac{1}{2}\ C \cdot V^2 = \frac{1}{2}\ 8 \cdot 10^{-12}\ F \cdot (120\ V)^2 = \boxed{5{,}76 \cdot 10^{-8}\ J}$$

16.38. ***¿Cuál es la capacidad equivalente de la asociación representada en la figura 16.8? ¿Qué carga almacena y qué tensión soporta el condensador de 6 μF?***

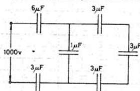


Fig. 16.8

Solución: Los tres condensadores de 3 μF de capacidad de la parte de la derecha están colocados en serie. La capacidad equivalente de su asociación valdrá:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{3\ \mu F} + \frac{1}{3\ \mu F} + \frac{1}{3\ \mu F} = \frac{1}{1\ \mu F}$$

de donde: C = 1 μF.

El conjunto quedará como se indica en la figura 16.9, en la que se aprecia que los dos condensadores de 1 μF están asociados en paralelo, siendo la capacidad equivalente de los dos, 2 μF (fig. 16.10).

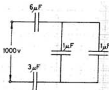


Fig. 16.9

Como los condensadores de 6, 2 y 3 μF de la asociación de la figura 16.10 están en serie, la capacidad equivalente, que será ya la final, vendrá dada por:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{6\ \mu F} + \frac{1}{2\ \mu F} + \frac{1}{3\ \mu F} = \frac{1}{1\ \mu F}$$

de donde:

$$\boxed{C = 1\ \mu F}$$

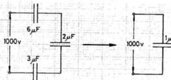


Fig. 16.10

La carga total almacenada en la asociación valdrá:

$$Q = C \cdot V = 10^{-6}\ F \cdot 10^{3}\ V = 10^{-3}\ C$$

Esta carga almacenada por el condensador equivalente es igual a la que almacena cada uno de los condensadores de 6, 3 y 2 μF, pues están asociados en serie. Por tanto, la carga del condensador de 6 μF será:

$$\boxed{\mathbf{Q = 10^{-3}\ C}}$$

La tensión que soporta este condensador valdrá:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{10^{-3}\ C}{6 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} \cdot \mathbf{10^3\ V}}$$

16.39. ***Un condensador de 2 μF se carga a 100 V y se conecta en paralelo a otro de 4 μF cargado a 200 V. Calcular:***

a) La carga de cada condensador después de la unión.
b) La tensión de cada condensador.
c) La energía total almacenada, expresando el resultado en julios y en calorías.

Solución:

a y b) Inicialmente las cargas de cada condensador son:

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 = 2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 10^2\ V = 2 \cdot 10^{-4}\ C$$
$$Q_2 = C_2 \cdot V_2 = 4 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 2 \cdot 10^2\ V = 8 \cdot 10^{-4}\ C$$

Cuando se conectan en paralelo, la capacidad equivalente de la asociación valdrá:

$$C = C_1 + C_2 = 2\ \mu F + 4\ \mu F = 6\ \mu F$$

La diferencia de potencial entre los extremos de la asociación será igual a la tensión de cada condensador. Esta diferencia de potencial se puede calcular dividiendo la carga total almacenada en la asociación:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 2 \cdot 10^{-4}\ C + 8 \cdot 10^{-4}\ C = 10^{-3}\ C$$

entre la capacidad equivalente:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{10^{-3}\ C}{6 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} \cdot \mathbf{10^3\ V}}$$

La carga de cada condensador después de la unión será:

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 = 2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot \frac{1}{6} \cdot 10^3\ V = \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{10^{-3}\ C}}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot V_2 = 4 \cdot 10^{-6}\ F \cdot \frac{1}{6} \cdot 10^3\ V = \boxed{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{10^{-3}\ C}}$$

c) La energía almacenada en el conjunto valdrá:

$$E_p = \frac{1}{2}\ Q \cdot V = \frac{1}{2}\ 10^{-3}\ C \cdot \frac{1}{6} \cdot 10^3\ V = \frac{1}{12}\ J =$$

$$= \frac{1}{12}\ J \cdot \frac{0{,}24\ cal}{1\ J} = 0{,}02\ cal$$

$$\boxed{\mathbf{E_p = \frac{1}{12}\ J = 0{,}02\ cal}}$$

16.40. ***Se carga un condensador de 15 · 10⁻⁶ F, aplicando una diferencia de potencial de 8 000 V entre sus armaduras. ¿Qué carga adquieren éstas? Una vez cargado se conecta en paralelo con dos condensadores de 10 · 10⁻⁶ y 12 · 10⁻⁶ F, respectivamente (estos dos últimos, en serie). ¿Qué carga adquiere cada armadura? ¿Qué diferencia de potencial se establece entre sus armaduras?***

Solución: La carga que adquieren las armaduras del condensador es:

$$Q = C \cdot V = 15 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 8 \cdot 10^3\ V = \boxed{\mathbf{0{,}12\ C}}$$

Una vez que el condensador adquiere esta carga, se conecta como indica la figura 16.11. La capacidad equivalente a los dos condensadores de 10 y 12 μF asociados en serie es:

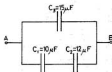


Fig. 16.11

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{10\ \mu F} + \frac{1}{12\ \mu F} = \frac{11}{60\ \mu F}$$

de donde:

$$C' = \frac{60}{11}\ \mu F$$

siendo la capacidad equivalente de toda la asociación:

$$C = C' + C_3 = \frac{60}{11}\ \mu F + 15\ \mu F = \frac{225}{11}\ \mu F$$

y la carga total: $Q = \boxed{\mathbf{0{,}12\ C}}$

La diferencia de potencial entre los extremos de la asociación tiene de valor:

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C} = \frac{0{,}12\ C}{\frac{225}{11} \cdot 10^{-6}\ F} = 5\ 867\ V$$

En consecuencia, la carga final de cada uno de los condensadores es:

$$Q_3 = C_3 \cdot (V_A - V_B) = 15 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot 5\,867\ \text{V} = \boxed{\mathbf{0{,}088\ C}}$$

$$Q_1 = Q_2 = Q - Q_3 = 0{,}12\ \text{C} - 0{,}088\ \text{C} = \boxed{\mathbf{0{,}032\ C}}$$

En cuanto a la diferencia de potencial entre las armaduras de cada condensador, tenemos:

$$V_3 = V_A - V_B = \boxed{\mathbf{5\,867\ V}}$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{0{,}032\ \text{C}}{10 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = \boxed{\mathbf{3\,200\ V}}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{0{,}032\ \text{C}}{12 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = \boxed{\mathbf{2\,667\ V}}$$

16.41. ***(*) En la figura 16.12 se representa una asociación serie-paralelo de condensadores, a los que se aplica un potencial de 100 V (en corriente continua). Calcular:***

a) La capacidad equivalente.

b) La carga que posee cada condensador.

Solución:

a) Designemos por A, B y C, respectivamente, los condensadores de capacidades 2, 3 y 7 μF. La capacidad equivalente a los condensadores A y B conectados en paralelo es:

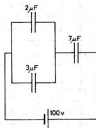


Fig. 16.12

$$C_{AB} = C_A + C_B = 2\ \mu\text{F} + 3\ \mu\text{F} = 5\ \mu\text{F}$$

Calculemos ahora la capacidad equivalente a toda la asociación:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{AB}} + \frac{1}{C_C} = \frac{1}{5\ \mu\text{F}} + \frac{1}{7\ \mu\text{F}} = \frac{12}{35\ \mu\text{F}}$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{C = \frac{35}{12}\ \mu F = 2{,}92\ \mu F}}$$

b) Hallaremos, en primer lugar, la carga total, que es igual a la carga del condensador C:

$$Q_{total} = Q_C = C \cdot (V_1 - V_2) = 2{,}92 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 10^2\ V = \boxed{2{,}92 \cdot 10^{-4}\ C}$$

La carga total de los dos condensadores A y B conectados en paralelo es $2{,}92 \cdot 10^{-4}$ C, siendo la diferencia de potencial entre los extremos de la asociación:

$$V_{AB} = \frac{Q}{C_{AB}} = \frac{2{,}92 \cdot 10^{-4}\ C}{5 \cdot 10^{-6}\ F} = 58{,}4\ V$$

Por lo tanto:

$$Q_A = C_A \cdot V_{AB} = 2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 58{,}4\ V = \boxed{1{,}17 \cdot 10^{-4}\ C}$$

$$Q_B = C_B \cdot V_{AB} = 3 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 58{,}4\ V = \boxed{1{,}75 \cdot 10^{-4}\ C}$$

Puede comprobarse fácilmente cómo $Q_A + Q_B = Q_C = Q_{total}$.

16.42. ***Disponemos de tres condensadores iguales, cada uno de ellos de 3 μF de capacidad. Los identificaremos con las letras A, B y C, respectivamente (fig. 16.13). Los condensadores A y B los montamos en paralelo, y el tercero, C, en serie con los dos anteriores. A ambos extremos de la asociación aplicamos una diferencia de potencial de 2 000 V. Calcular:***

a) La capacidad equivalente de la asociación.
b) La carga de cada uno de los condensadores.
c) La diferencia de potencial entre las armaduras de cada condensador.
d) La energía eléctrica almacenada en la asociación.

Solución:

a) La capacidad equivalente a los condensadores A y B asociados en paralelo es:

$$C_{AB} = C_A + C_B = 3\ \mu F + 3\ \mu F = 6\ \mu F$$

y la equivalente de toda la asociación:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{AB}} + \frac{1}{C_C} = \frac{1}{6\ \mu F} + \frac{1}{3\ \mu F} = \frac{1}{2\ \mu F}$$

de donde:

$$\boxed{C = 2\ \mu F}$$

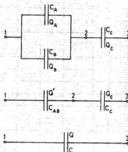


Fig. 16.13

b y c) Podemos ahora resolver conjuntamente estos dos apartados:

$$Q_C = Q' = Q = C \cdot V_{13} = 2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 2 \cdot 10^3\ V = 4 \cdot 10^{-3}\ C = \boxed{\mathbf{4\ mC}}$$

$$V_C = V_{23} = \frac{Q_C}{C_C} = \frac{4 \cdot 10^{-3}\ C}{3 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{\frac{4}{3} \cdot 10^3\ V}$$

$$V_A = V_B = V_{12} = \frac{Q'}{C_{AB}} = \frac{4 \cdot 10^{-3}\ C}{6 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{\frac{2}{3} \cdot 10^3\ V}$$

$$Q_A = Q_B = C_A \cdot V_{12} = C_B \cdot V_{12} = 3 \cdot 10^{-6}\ F \cdot \frac{2}{3}\ 10^3\ V =$$

$$= 2 \cdot 10^{-3}\ C = \boxed{\mathbf{2\ mC}}$$

d) Pasemos ahora a calcular la energía almacenada en la asociación:

$$E_p = \frac{1}{2}\ C \cdot V_{13}^2 = \frac{1}{2}\ 2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot (2 \cdot 10^3\ V)^2 = \boxed{\mathbf{4\ J}}$$

Compruébese que:

$$E_{p_A} = E_{p_B} = \frac{1}{2}\ C_A \cdot V_A^2 = \frac{1}{2}\ C_B \cdot V_B^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ 3 \cdot 10^{-6}\ F \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 10^3\ V\right)^2 = \frac{2}{3}\ J$$

$$E_{p_C} = \frac{1}{2}\ C_C \cdot V_C^2 = \frac{1}{2}\ 3 \cdot 10^{-6}\ F \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot 10^3\ V\right)^2 = \frac{8}{3}\ V$$

cumpliéndose que:

$$E_p = E_{p_A} + E_{p_B} + E_{p_C} = \frac{2}{3}\ J + \frac{2}{3}\ J + \frac{8}{3}\ J = 4\ J$$

16.43. ***En la asociación de condensadores de la figura 16.14 se pide calcular:***

a) La carga de cada uno de los condensadores.

b) La diferencia de potencial entre las armaduras de cada condensador.

c) La energía total almacenada en la asociación.

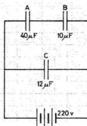


Fig. 16.14

Solución:

a) La capacidad equivalente de los condensadores A y B conectados en serie es: $C_{AB} = 8\ \mu F$, con lo que la capacidad equivalente de toda la asociación vale:

$$C = C_{AB} + C_C = 8\ \mu F + 12\ \mu F = 20\ \mu F$$

Llamando V a la diferencia de potencial entre los extremos de la asociación (V = 220 V), tenemos que la carga del condensador C es:

$$Q_C = C_C \cdot V = 12 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 220\ V = \boxed{\mathbf{2{,}64 \cdot 10^{-3}\ C}}$$

mientras que la de los otros dos condensadores es:

$$Q' = Q_A = Q_B = C_{AB} \cdot V = 8 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 220\ V = \boxed{\mathbf{1{,}76 \cdot 10^{-3}\ C}}$$

b) Designemos por V_A, V_B y V_C las diferencias de potencial entre las armaduras de cada uno de los condensadores. Tenemos:

$$\boxed{\mathbf{V_C = V = 220\ V}}$$

$$V_A = \frac{Q_A}{C_A} = \frac{1{,}76 \cdot 10^{-3}\ C}{40 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{\mathbf{44\ V}}$$

$$V_B = \frac{Q_B}{C_B} = \frac{1{,}76 \cdot 10^{-3}\ C}{10 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{\mathbf{176\ V}}$$

c) Hallemos, por último, la energía eléctrica total almacenada en la asociación:

$$E_p = \frac{1}{2}\ C \cdot V^2 = \frac{1}{2}\ 20 \cdot 10^{-6}\ F \cdot (220\ V)^2 = \boxed{\mathbf{0{,}484\ J}}$$

16.44. ***Asociamos en serie tres condensadores, A, B y C, de capacidades respectivas $C_A = 2\ \mu F$; $C_B = 3\ \mu F$ y $C_C = 6\ \mu F$ (fig. 16.15), y aplicamos a los extremos de dicha asociación una diferencia de potencial de 1 500 V. Calcular:***

a) La carga de cada condensador.
b) La diferencia de potencial entre las armaduras de cada uno de los condensadores.
c) La energía eléctrica almacenada en la asociación.
d) La carga de cada condensador, si se montasen en paralelo.

Solución:

a) Hallemos, en primer lugar, la capacidad equivalente de la asociación en serie de los tres condensadores:

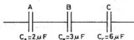


Fig. 16.15

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} + \frac{1}{C_C} = \frac{1}{2\ \mu F} + \frac{1}{3\ \mu F} + \frac{1}{6\ \mu F} = \frac{1}{1\ \mu F}$$

de donde:

$$C = 1\ \mu F$$

Dado que los tres condensadores están asociados en serie, su carga es la misma, e igual que la total de la asociación:

$$Q_A = Q_B = Q_C = C \cdot V = 10^{-6}\ F \cdot 1{,}5 \cdot 10^3\ V =$$
$$= 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ C = 1{,}5\ mC$$

$$\boxed{Q_A = Q_B = Q_C = 1{,}5\ mC}$$

b) Hallemos, ahora, la diferencia de potencial entre las armaduras de cada condensador:

$$V_A = \frac{Q_A}{C_A} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}\ C}{2 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{750\ V}$$

$$V_B = \frac{Q_B}{C_B} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}\ C}{3 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{500\ V}$$

$$V_C = \frac{Q_C}{C_C} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}\ C}{6 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{250\ V}$$

Puede comprobarse cómo:

$$V_A + V_B + V_C = 750\ V + 500\ V + 250\ V = 1\ 500\ V = V$$

c) La energía eléctrica almacenada en la asociación será:

$$E_p = \frac{1}{2}\ C \cdot V^2 = \frac{1}{2}\ 10^{-6}\ F \cdot (1\ 500\ V)^2 = \boxed{1{,}125\ J}$$

d) Si los tres condensadores se asocian en paralelo, estableciéndose entre sus armaduras una diferencia de potencial de 1 500 V, la carga de cada uno de ellos será:

$$Q'_A = C_A \cdot V = 2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 1\ 500\ V = 3 \cdot 10^{-3}\ C = \boxed{3\ mC}$$

$$Q'_B = C_B \cdot V = 3 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 1\ 500\ V = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\ C = \boxed{4{,}5\ mC}$$

$$Q'_C = C_C \cdot V = 6 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 1\ 500\ V = 9 \cdot 10^{-3}\ C = \boxed{9\ mC}$$

16.45. ***Disponemos de tres condensadores, A, B y C, cuyas capacidades respectivas son: $C_A = 2\ \mu F$, $C_B = 3\ \mu F$ y $C_C = 5\ \mu F$, y los cargamos: el primero a 2 000 V, el segundo a 2 500 V y el tercero a 3 000 V. Calcular:***

a) La carga que adquiere cada condensador.
b) La energía eléctrica almacenada en cada uno de ellos.
c) Si se montan en paralelo, la diferencia de potencial que existirá entre los extremos de la asociación.
d) La energía eléctrica almacenada en dicha asociación.

Solución:

a) Vamos a hallar la carga que adquiere cada condensador:

$$Q_A = C_A \cdot V_A = 2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 2 \cdot 10^3\ V = 4 \cdot 10^{-3}\ C = \boxed{4\ mC}$$

$$Q_B = C_B \cdot V_B = 3 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 2{,}5 \cdot 10^3\ V = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\ C = \boxed{7{,}5\ mC}$$

$$Q_C = C_C \cdot V_C = 5 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 3 \cdot 10^3\ V = 15 \cdot 10^{-3}\ C = \boxed{15\ mC}$$

b) La energía eléctrica almacenada en cada condensador es:

$$E_{p_A} = \frac{1}{2}\ C_A \cdot V_A^2 = \frac{1}{2}\ 2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot (2 \cdot 10^3\ V)^2 = \boxed{4\ J}$$

$$E_{p_B} = \frac{1}{2}\ C_B \cdot V_B^2 = \frac{1}{2}\ 3 \cdot 10^{-6}\ F \cdot (2{,}5 \cdot 10^3\ V)^2 = \boxed{9{,}375\ J}$$

$$E_{p_C} = \frac{1}{2}\ C_C \cdot V_C^2 = \frac{1}{2}\ 5 \cdot 10^{-6}\ F \cdot (3 \cdot 10^3\ V)^2 = \boxed{22{,}5\ J}$$

c) Al asociar los condensadores en paralelo la carga total será:

$$Q = Q'_A + Q'_B + Q'_C = Q_A + Q_B + Q_C =$$
$$= 4\ mC + 7{,}5\ mC + 15\ mC = 26{,}5\ mC$$

y la capacidad equivalente de la asociación:

$$C = C_A + C_B + C_C = 2\ \mu F + 3\ \mu F + 5\ \mu F = 10\ \mu F$$

Por tanto, la diferencia de potencial entre los extremos de la asociación es:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{26{,}5 \cdot 10^{-3}\ C}{10 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{2\ 650\ V}$$

d) La energía eléctrica almacenada en la asociación será:

$$E_p = \frac{1}{2}\ C \cdot V^2 = \frac{1}{2}\ 10 \cdot 10^{-6}\ F \cdot (2\ 650\ V)^2 = \boxed{35{,}1\ J}$$

16.46. *(*) Dada la asociación de condensadores de la figura 16.16, hallar:*

a) Capacidad equivalente entre los puntos A y B.
b) Si entre los puntos A y B se establece una diferencia de potencial de 18 voltios, ¿qué carga adquiere cada uno de ellos?
c) La energía de la asociación.

Solución:

a) Los condensadores de 6 y 3 μF están asociados en paralelo; su capacidad equivalente valdrá:

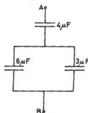


Fig. 16.16

$$C' = 6\ \mu F + 3\ \mu F = 9\ \mu F$$

y la correspondiente a toda la asociación:

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{9\ \mu F} + \frac{1}{4\ \mu F} = \frac{13}{36\ \mu F}$$

de donde:

$$\boxed{C_{AB} = \frac{36}{13}\ \mu F}$$

b) La carga total de la asociación es:

$$Q_{total} = C_{AB} \cdot V_{AB} = \frac{36}{13} \cdot 10^{-6}\ F \cdot 18\ V = 49,85 \cdot 10^{-6}\ C$$

Por consiguiente, la carga del condensador de 4 μF será:

$$Q_4 = Q_{total} = \boxed{49,85 \cdot 10^{-6}\ C}$$

y la diferencia de potencial entre sus armaduras:

$$V_4 = \frac{49,85 \cdot 10^{-6}\ C}{4 \cdot 10^{-6}\ F} = 12,46\ V$$

La diferencia de potencial entre los extremos de la asociación en paralelo de los condensadores de 6 y 3 μF es:

$$V' = V_{AB} - V_4 = 18\ V - 12,46\ V = 5,54\ V$$

Por tanto, la carga de estos dos condensadores será:

$$Q_6 = C_6 \cdot V' = 6 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 5,54\ V = \boxed{33,24 \cdot 10^{-6}\ C}$$

$$Q_3 = C_3 \cdot V' = 3 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 5,54\ V = \boxed{16,62 \cdot 10^{-6}\ C}$$

c) Calculemos, por último, la energía de la asociación:

$$E_p = \frac{1}{2}\ C_{AB} \cdot V_{AB}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{13} \cdot 10^{-6}\ F \cdot (18\ V)^2 = \boxed{4,49 \cdot 10^{-4}\ J}$$

16.47. *Un condensador de 100 pF se carga a 50 V, después de lo cual se separa de la batería y se conecta en paralelo con otro condensador inicialmente descargado, midiéndose entonces 20 V de diferencia de potencial entre las armaduras de ambos. ¿Cuál es la capacidad de este segundo condensador?*

Solución: Designemos por A al primer condensador y por B al segundo. La carga que adquiere el condensador A al conectarlo a la batería es:

$$Q_A = C_A \cdot V = 100 \cdot 10^{-12}\ F \cdot 50\ V = 5 \cdot 10^{-9}\ C$$

Al asociar los dos condensadores en paralelo, esta carga Q_A se reparte entre ambos, de manera que los dos adquieren una misma diferencia de potencial entre sus armaduras: $V' = 20$ V. Teniendo esto en cuenta, la carga que queda en el primer condensador será:

$$Q'_A = C_A \cdot V' = 100 \cdot 10^{-12}\ \text{F} \cdot 20\ \text{V} = 2 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

De acuerdo con el principio de conservación de la carga eléctrica, en el segundo condensador aparecerá una carga:

$$Q'_B = Q_A - Q'_A = 5 \cdot 10^{-9}\ \text{C} - 2 \cdot 10^{-9}\ \text{C} = 3 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

Dado que la diferencia de potencial entre las armaduras de este segundo condensador es: $V' = 20$ V, su capacidad será:

$$C_B = \frac{Q'_B}{V'} = \frac{3 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{20\ \text{V}} = 1{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{F} = \boxed{150\ \text{pF}}$$

16.48. ***(*) En el circuito de la figura 16.17, $V_A - V_B = 20$ V. Se pide:***

a) La capacidad equivalente de la red.
b) La carga del condensador de 4 μF situado en la rama superior.
c) La diferencia de potencial entre los puntos C y D.
d) La energía total almacenada en el circuito.

Nota: Los números en los condensadores indican su capacidad en μF.

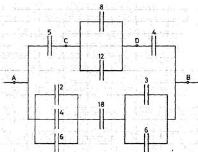


Fig. 16.17

Solución:

a) En la figura 16.18 se pueden apreciar las sucesivas simplificaciones qu conducen a la obtención de la capacidad equivalente de la red:

$$\boxed{C = 6\ \mu\text{F}}$$

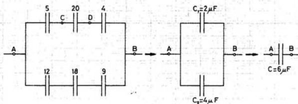


Fig. 16.18

b) La carga del condensador de 4 μF es la misma que la de C_1:

$$Q_4 = Q_{C_1} = C_1 \cdot (V_A - V_B) = 2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 20\ V = 4 \cdot 10^{-5}\ C = \boxed{40\ \mu C}$$

c) La diferencia de potencial entre los puntos C y D será:

$$V_C - V_D = \frac{Q_{20}}{C_{20}} = \frac{4 \cdot 10^{-5}\ C}{20 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{2\ V}$$

d) Calculemos, por último, la energía almacenada en el circuito:

$$E_p = \frac{1}{2}\ C \cdot (V_A - V_B)^2 = \frac{1}{2}\ 6 \cdot 10^{-6}\ F \cdot (20\ V)^2 = \boxed{1{,}2 \cdot 10^{-3}\ J}$$

16.49. ***La energía de una asociación en paralelo de dos condensadores es $9 \cdot 10^{-4}$ J cuando la diferencia de potencial entre sus armaduras es de 5 000 V. Por el contrario, si los dos condensadores se asocian en serie y se aplica a sus armaduras extremas la misma diferencia de potencial anterior, la energía de la asociación es $2 \cdot 10^{-4}$ J. Hallar los valores de las capacidades de los dos condensadores.***

Solución: Designemos por C_1 y C_2 las capacidades de los dos condensadores. Cuando están asociados en paralelo:

$$E_{p_1} = \frac{1}{2}\ (C_1 + C_2) \cdot V^2 \qquad [1]$$

Por el contrario, si la asociación es en serie:

$$E_{p_2} = \frac{1}{2}\ \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}\ V^2 \qquad [2]$$

De la ecuación [1] se deduce:

$$C_1 + C_2 = \frac{2\ E_{p_1}}{V^2} \qquad [3]$$

y de la [2]:

$$C_1 \cdot C_2 = \frac{2\,E_{p_2}\,(C_1 + C_2)}{V^2} = \frac{4\,E_{p_1} \cdot E_{p_2}}{V^4} \qquad [4]$$

Las ecuaciones [3] y [4] representan la suma y el producto de las dos raíces (C_1 y C_2) de la ecuación de segundo grado:

$$C^2 - \frac{2\,E_{p_1}}{V^2}\,C + \frac{4\,E_{p_1} \cdot E_{p_2}}{V^4} = 0$$

Resolvamos ahora esta ecuación:

$$C = \frac{2\,E_{p_1} \pm 2\,\sqrt{E_{p_1}\,(E_{p_1} - 4\,E_{p_2})}}{2\,V^2} = \frac{E_{p_1} \pm \sqrt{E_{p_1}\,(E_{p_1} - 4\,E_{p_2})}}{V^2} =$$

$$= \frac{9 \cdot 10^{-4}\ \text{J} \pm \sqrt{9 \cdot 10^{-4}\ \text{J} \cdot (9 \cdot 10^{-4}\ \text{J} - 4 \cdot 2 \cdot 10^{-4}\ \text{J})}}{(5 \cdot 10^3\ \text{V})^2} =$$

$$= \begin{cases} 48 \cdot 10^{-12}\ \text{F} = \boxed{48\ \text{pF}} \\ 24 \cdot 10^{-12}\ \text{F} = \boxed{24\ \text{pF}} \end{cases}$$

16.50. ***a)*** ***Calcular la capacidad equivalente a la parte de circuito comprendida entre los puntos X e Y de la figura 16.19. Todos los condensadores son idénticos, siendo la capacidad de cada uno de ellos 3 μF. Aplicamos a los terminales X e Y una diferencia de potencial de 150 V. Calcular la carga, la diferencia de potencial entre sus armaduras y la energía eléctrica almacenada en cada uno de los condensadores, así como la energía de la asociación.***

b) ***Desconectamos los condensadores anteriormente cargados y los volvemos luego a conectar, pero esta vez en paralelo, uniendo entre sí las armaduras del mismo signo. Calcular, en este nuevo caso, la carga, la diferencia de potencial entre las armaduras y la energía de cada condensador. Hallar también la energía almacenada en la asociación.***

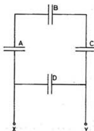


Fig. 16.19

Solución (fig. 16.20):

a) Hallemos, en primer lugar, la capacidad equivalente de los tres condensadores asociados en serie. Dicha capacidad es:

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} + \frac{1}{C_C} =$$

$$= \frac{1}{3\ \mu F} + \frac{1}{3\ \mu F} + \frac{1}{3\ \mu F} = \frac{1}{1\ \mu F}$$

de donde:

$$\therefore \quad C_s = 1\ \mu F$$

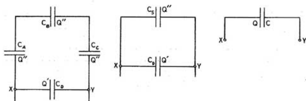


Fig. 16.20

En consecuencia, la capacidad equivalente de la parte de circuito comprendida entre los puntos X e Y de la figura es:

$$C = C_s + C_D = 1\ \mu F + 3\ \mu F = \boxed{4\ \mu F}$$

La carga de los tres condensadores asociados en serie es:

$$Q_A = Q_B = Q_C = Q'' = C_s \cdot (V_x - V_y) =$$

$$= 1 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 150\ V = \boxed{1{,}5 \cdot 10^{-4}\ C}$$

y la diferencia de potencial entre sus armaduras:

$$V_A = V_B = V_C = \frac{Q_A}{C_A} = \frac{Q_B}{C_B} = \frac{Q_C}{C_C} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-4}\ C}{3 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{50\ V}$$

La energía almacenada en cada uno de los condensadores asociados en serie será:

$$E_{p_A} = E_{p_B} = E_{p_C} = \frac{1}{2}\ C_A \cdot V_A^2 = \frac{1}{2}\ C_B \cdot V_B^2 = \frac{1}{2}\ C_C \cdot V_C^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ 3 \cdot 10^{-6}\ F \cdot (50\ V)^2 = \boxed{3{,}75 \cdot 10^{-3}\ J}$$

Para el condensador en paralelo se cumple que:

$$V_D = V_x - V_y = \boxed{150\ V}$$

$$Q_D = Q' = C_D \cdot (V_x - V_y) = 3 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 150\ V = \boxed{4{,}5 \cdot 10^{-4}\ C}$$

$$E_{p_D} = \frac{1}{2}\ C_D \cdot V_D^2 = \frac{1}{2}\ 3 \cdot 10^{-6}\ F \cdot (150\ V)^2 = \boxed{3{,}375 \cdot 10^{-2}\ J}$$

Calculemos, por último, la energía eléctrica almacenada en la asociación:

$$E_p = \frac{1}{2}\ C \cdot (V_x - V_y)^2 = \frac{1}{2}\ 4 \cdot 10^{-6}\ F \cdot (150\ V)^2 = \boxed{4{,}5 \cdot 10^{-2}\ J}$$

Llegaríamos también al mismo resultado sumando las energías almacenadas en cada uno de los cuatro condensadores.

b) Conectemos ahora los cuatro condensadores en paralelo. Aplicando el principio de conservación de la carga eléctrica, tenemos para el condensador equivalente (véase fig. 16.21):

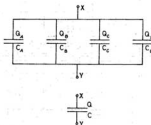


Fig. 16.21

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_D = 3\ Q'' + Q' =$$
$$= 3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-4}\ C + 4{,}5 \cdot 10^{-4}\ C = 9 \cdot 10^{-4}\ C$$

Por otra parte:

$$C = 4\ C_A = 4\ C_B = 4\ C_C = 4\ C_D = 12 \cdot 10^{-6}\ F = 12\ \mu F$$

Por consiguiente:

$$V_A = V_B = V_C = V_D = V_x - V_y = \frac{Q}{C} = \frac{9 \cdot 10^{-4}\ C}{12 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{75\ V}$$

Con ello se obtiene:

$$Q_A = Q_B = Q_C = Q_D = C_A \cdot V_A = C_B \cdot V_B = C_C \cdot V_C = C_D \cdot V_D =$$
$$= 3 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot 75\ \text{V} = \boxed{\mathbf{2{,}25 \cdot 10^{-4}\ C}}$$

La energía de cada uno de los condensadores asociados en paralelo será (fig. 16.21):

$$E_{p_A} = E_{p_B} = E_{p_C} = E_{p_D} = \frac{1}{2}\ C_A \cdot V_A^2 = \frac{1}{2}\ C_B \cdot V_B^2 = \frac{1}{2}\ C_C \cdot V_C^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\ C_D \cdot V_D^2 = \frac{1}{2}\ 3 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot (75\ \text{V})^2 = \boxed{\mathbf{8{,}4375 \cdot 10^{-3}\ J}}$$

Por último, la energía eléctrica almacenada en toda la asociación valdrá:

$$E_p = \frac{1}{2}\ C \cdot (V_x - V_y)^2 = \frac{1}{2}\ 12 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot (75\ \text{V})^2 =$$
$$= \boxed{\mathbf{3{,}375 \cdot 10^{-2}\ J}} = 4\ E_{p_A}$$

16.51. ***Exactamente encima de un lago circular de 800 km² de superficie, se encuentra situada, a una altura de 400 m, una nube tormentosa, también circular y de la misma área. El lago, cuya profundidad es de 2 m, está lleno de agua, existiendo entre él y la nube un campo eléctrico uniforme de 100 N/C. Supongamos que la nube se descarga totalmente sobre el agua, perdiendo toda su carga eléctrica y siendo absorbida por el agua toda la energía en forma de calor.***

a) ***Calcular, expresándola en calorías, la energía absorbida por el agua del lago.***

b) ***Razonar si será, o no, apreciable la elevación de temperatura que experimenta el agua.***

Solución:

a) Se puede considerar al sistema formado por la superficie del lago y la nube tormentosa como un gigantesco condensador plano, cuya capacidad es:

$$C = \varepsilon_a \cdot \frac{S}{d} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot \frac{8 \cdot 10^8\ \text{m}^2}{4 \cdot 10^2\ \text{m}} = 1{,}771 \cdot 10^{-5}\ \text{F} =$$
$$= 17{,}71\ \mu\text{F}$$

La diferencia de potencial entre la nube y la superficie del lago (las dos armaduras del condensador) es:

$$V_1 - V_2 = E \cdot d = 100\ \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot 400\ \text{m} = 4 \cdot 10^4\ \text{V}$$

Calculemos, ahora, la energía eléctrica almacenada en dicho «condensador»:

$$E_p = \frac{1}{2}\ C \cdot (V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\ 1{,}771 \cdot 10^{-5}\ F \cdot (4 \cdot 10^4\ V)^2 =$$

$$= 14\ 168\ J = \boxed{3\ 400\ cal}$$

b) El incremento de temperatura que experimenta el agua del lago cuando se descarga la nube sobre ella es:

$$\Delta t = \frac{E_p}{m \cdot c} = \frac{E_p}{V \cdot \rho \cdot c} =$$

$$= \frac{3\ 400\ cal}{1{,}6 \cdot 10^9\ m^3 \cdot \dfrac{10^6\ cm^3}{1\ m^3} \cdot 1\ \dfrac{g}{cm^3} \cdot 1\ \dfrac{cal}{g \cdot °C}} = 2{,}125 \cdot 10^{-12}\ °C$$

El incremento de temperatura que experimenta el agua del lago es $\Delta t = 2{,}125 \cdot 10^{-12}$ °C, totalmente inapreciable.

16.52. *Disponemos de dos condensadores idénticos, de 100 μF de capacidad cada uno.*

a) Cargamos el primero bajo una diferencia de potencial de 3 000 V y unimos sus armaduras con las del segundo, que estaba inicialmente descargado, de manera que quedan ambos asociados en paralelo. Calcular la diferencia de potencial entre las armaduras de ambos condensadores y la energía almacenada en la asociación.

b) Tras deshacer el montaje anterior, y supuestos ambos condensadores descargados, asociémoslos en serie, conectando posteriormente las armaduras extremas a una diferencia de potencial de 3 000 V. Calcular la cantidad de electricidad y la energía almacenada en esta nueva asociación.

Solución:

a) La carga que adquiere el primer condensador es:

$$Q = C_1 \cdot V_1 = 100 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 3 \cdot 10^3\ V = 0{,}3\ C$$

Al asociarlo luego en paralelo con el segundo, dado que los dos son idénticos, la carga se reparte por igual entre ambos, siendo la carga total de la asociación: $Q = 0{,}3$ C, y su capacidad equivalente:

$$C = C_1 + C_2 = 100 \cdot 10^{-6}\ F + 100 \cdot 10^{-6}\ F = 2 \cdot 10^{-4}\ F$$

La diferencia de potencial entre los extremos de la asociación valdrá:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{0{,}3\ C}{2 \cdot 10^{-4}\ F} = \boxed{1\ 500\ V}$$

y la energía en ella almacenada:

$$E_p = \frac{1}{2}\ Q \cdot V = \frac{1}{2}\ 0{,}3\ C \cdot 1\ 500\ V = \boxed{225\ J}$$

b) Cuando los dos condensadores se unen en serie, la capacidad equivalente es:

$$C' = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{10^{-4}\ F \cdot 10^{-4}\ F}{10^{-4}\ F + 10^{-4}\ F} = 5 \cdot 10^{-5}\ F$$

siendo la carga de la asociación:

$$Q' = C' \cdot V' = 5 \cdot 10^{-5}\ F \cdot 3 \cdot 10^3\ V = \boxed{0{,}15\ C}$$

Calculemos, por último, la energía almacenada en la asociación en serie:

$$E'_p = \frac{1}{2}\ Q' \cdot V' = \frac{1}{2}\ 0{,}15\ C \cdot 3 \cdot 10^3\ V = \boxed{225\ J}$$

16.53. *Con objeto de almacenar energía eléctrica, utilizamos una «batería de condensadores», consistente en 4 000 condensadores de 5 μF cada uno, asociados en paralelo. ¿Cuánto cuesta cargar esta batería hasta 50 000 V al precio de 9 ptas el kW-h?*

Solución: La capacidad total de la batería de condensadores es:

$$C = 4\ 000 \cdot 5 \cdot 10^{-6}\ F = 2 \cdot 10^{-2}\ F$$

y la energía en ella almacenada:

$$E_p = \frac{1}{2}\ C \cdot V^2 = \frac{1}{2}\ 2 \cdot 10^{-2}\ F \cdot (5 \cdot 10^4\ V)^2 =$$

$$= 2{,}5 \cdot 10^7\ J = 2{,}5 \cdot 10^7\ J \cdot \frac{1\ kW\text{-}h}{3{,}6 \cdot 10^6\ J} = \frac{125}{18}\ kW\text{-}h$$

En consecuencia, el coste del proceso de carga de la batería de condensadores será:

$$\text{Coste} = \frac{125}{18}\ kW\text{-}h \cdot \frac{9\ ptas}{1\ kW\text{-}h} = \boxed{62{,}5\ ptas}$$

16.54. *En el circuito de la figura 16.22 los condensadores A, B, C y D, de idéntica forma y dimensiones, tienen de dieléctrico, respectivamente, el aire ($\varepsilon_A = 1$), parafina ($\varepsilon_B = 2{,}3$), azufre ($\varepsilon_C = 3$) y mica ($\varepsilon_D = 5$). Sabiendo que la fuerza electromotriz del generador es $E = 220$ V y que la capacidad del condensador B es $C_B = 10^{-9}$ F, calcular la diferencia de potencial entre las armaduras de cada uno de los condensadores, así como la carga de cada uno de ellos.*

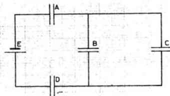


Fig. 16.22

Solución: Hallemos, en primer lugar, la capacidad de cada uno de los condensadores. Como todos son de idéntica forma y dimensiones, se cumplirá que:

$$\frac{C_A}{\varepsilon_A} = \frac{C_B}{\varepsilon_B} = \frac{C_C}{\varepsilon_C} = \frac{C_D}{\varepsilon_D}$$

Sustituyendo los valores conocidos, tenemos:

$$\frac{C_A}{1} = \frac{10^{-9}\ \mathrm{F}}{2{,}3} = \frac{C_C}{3} = \frac{C_D}{5}$$

de donde:

$$C_A = \frac{1}{2{,}3}\ 10^{-9}\ \mathrm{F};\quad C_C = \frac{3}{2{,}3}\ 10^{-9}\ \mathrm{F};\quad C_D = \frac{5}{2{,}3}\ 10^{-9}\ \mathrm{F}$$

Los condensadores B y C están asociados en paralelo; la capacidad equivalente de ambos es:

$$C_{B,C} = C_B + C_C = 10^{-9}\ \mathrm{F} + \frac{3}{2{,}3} \cdot 10^{-9}\ \mathrm{F} = \frac{5{,}3}{2{,}3} \cdot 10^{-9}\ \mathrm{F}$$

obteniéndose como capacidad equivalente de todo el circuito:

$$C = 3{,}13 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{F}$$

La carga total de la asociación será:

$$Q = C \cdot V = 3{,}13 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{F} \cdot 220\ \mathrm{V} = 6{,}89 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$$

Vemos en la figura 16.22 que los condensadores A y D están en serie. Por tanto, su carga será:

$$\boxed{\mathbf{Q_A = Q_D = 6{,}89 \cdot 10^{-8}\ C}}$$

La diferencia de potencial entre los extremos de la asociación en paralelo de los condensadores B y C es:

$$V_B = V_C = \frac{Q}{C_{B,C}} = \frac{6{,}89 \cdot 10^{-8}\ C}{\frac{5{,}3}{2{,}3} \cdot 10^{-9}\ F} = \boxed{29{,}9\ V}$$

Por tanto:

$$Q_B = C_B \cdot V_B = 10^{-9}\ F \cdot 29{,}9\ V = \boxed{2{,}99 \cdot 10^{-8}\ C}$$

$$Q_C = C_C \cdot V_C = \frac{3}{2{,}3} \cdot 10^{-9}\ F \cdot 29{,}9\ V = \boxed{3{,}9 \cdot 10^{-8}\ C}$$

La diferencia de potencial entre las armaduras del condensador A es:

$$V_A = \frac{Q_A}{C_A} = \frac{6{,}89 \cdot 10^{-8}\ C}{\frac{1}{2{,}3} \cdot 10^{-9}\ F} = \boxed{158{,}5\ V}$$

y entre las armaduras de D:

$$V_D = \frac{Q_D}{C_D} = \frac{6{,}89 \cdot 10^{-8}\ C}{\frac{5}{2{,}3} \cdot 10^{-9}\ F} = \boxed{31{,}7\ V}$$

Resumiendo:

Condensador	**Capacidad**	**Carga**	**Tensión**
A	1/2,3 μF	$6{,}89 \cdot 10^{-8}$ C	158,5 V
B	1 μF	$2{,}99 \cdot 10^{-8}$ C	29,9 V
C	3/2,3 μF	$3{,}9 \cdot 10^{-8}$ C	29,9 V
D	5/2,3 μF	$6{,}89 \cdot 10^{-8}$ C	31,7 V

16.55. ***En la parte de circuito de la figura 16.23 las capacidades de los distintos condensadores son: $C_1 = 2\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$ y $C_3 = 6\ \mu F$. Calcular:***

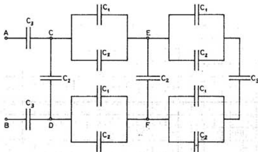


Fig. 16.23

a) La capacidad equivalente del sistema.
b) La carga de cada uno de los condensadores próximos a A y B, cuando se establece entre dichos puntos una diferencia de potencial de 900 V.
c) Las diferencias de potencial $V_C - V_D$ y $V_E - V_F$.

Solución:

a) En la figura 16.23 vemos que la asociación en paralelo de los condensadores C_1 y C_2 se repite cuatro veces. La capacidad equivalente de dicha asociación es:

$$C = C_1 + C_2 = 2\ \mu F + 4\ \mu F = 6\ \mu F$$

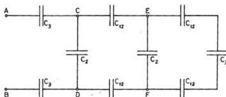


Fig. 16.24

Teniendo esto en cuenta, podemos simplificar el esquema del circuito, dejándolo reducido a otro más sencillo (fig. 16.24). En este último esquema podemos observar cómo entre E y F hay un condensador de capacidad $C_2 = 4\ \mu F$, unido en paralelo con una asociación en serie cuya capacidad es:

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{6\ \mu F} + \frac{1}{6\ \mu F} + \frac{1}{6\ \mu F} = \frac{1}{2\ \mu F}$$

de donde:

$$C' = 2\ \mu F$$

Luego:

$$C_{EF} = C_2 + C' = 4\ \mu F + 2\ \mu F = 6\ \mu F$$

Procedamos de forma análoga para hallar la capacidad equivalente entre C y D. Entre ambos puntos hay un condensador de capacidad $C_2 = 4\ \mu F$ unido en paralelo con una asociación en serie cuya capacidad es:

$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{6\ \mu F} + \frac{1}{6\ \mu F} + \frac{1}{6\ \mu F} = \frac{1}{2\ \mu F}$$

de donde:

$$C'' = 2\ \mu F$$

Luego:

$$C_{CD} = C_2 + C'' = 4\ \mu F + 2\ \mu F = 6\ \mu F$$

En consecuencia, la capacidad equivalente entre A y B (véase fig. 16.25) será:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_{CD}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{6\ \mu F} + \frac{1}{6\ \mu F} + \frac{1}{6\ \mu F} = \frac{1}{2\ \mu F}$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{C = 2\ \mu F}}$$

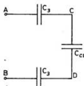


Fig. 16.25

b) La carga del condensador equivalente es:

$$Q = C \cdot (V_A - V_B) = 2 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 900\ V = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\ C = \boxed{\mathbf{1{,}8\ mC}}$$

c)

$$V_C - V_D = V_{CD} = \frac{Q_{CD}}{C_{CD}} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-3}\ C}{6 \cdot 10^{-6}\ F} = \boxed{\mathbf{300\ V}}$$

Ya que (véase fig. 16.25):

$$V_{CD} = V_{CE} + V_{EF} + V_{FD}$$

y además:

$$V_{CE} = V_{EF} = V_{FD}$$

resulta:

$$V_{EF} = V_E - V_F = \frac{V_{CD}}{3} = \frac{300\ V}{3} = \boxed{\mathbf{100\ V}}$$

17. CORRIENTE CONTINUA

FORMULARIO-RESUMEN

Intensidad de corriente:

$$I = \frac{Q}{t} = n \cdot e \cdot S \cdot v \quad \begin{cases} n = \text{número de electrones por unidad de volumen.} \\ e = \text{carga del electrón.} \\ S = \text{sección del conductor.} \\ v = \text{velocidad de los electrones.} \end{cases}$$

Densidad de corriente:

$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{S}} = n \cdot e \cdot \vec{v} = \sigma \cdot \vec{E}; \; (\sigma = \text{conductividad})$$

Resistividad: $\rho = \frac{1}{\sigma}$

Ley de Ohm para un hilo conductor: $I = \frac{V_1 - V_2}{R}$

Factores de los que depende la resistencia:

$$R = \rho \, \frac{l}{S} \begin{cases} l = \text{longitud del conductor.} \\ S = \text{sección.} \end{cases}$$

Variación de la resistividad con la temperatura: $\rho = \rho_0 \cdot (1 + \alpha t)$

(α = coeficiente de variación de la resistividad con la temperatura).

Trabajo de una corriente eléctrica	Potencia de una corriente eléctrica	
$W = I \cdot (V_1 - V_2) \cdot t$	$P = \frac{W}{t}$	$P = I \cdot (V_1 - V_2)$
$W = I^2 \cdot R \cdot t$		$P = I^2 \cdot R$

EFECTO JOULE

Calor $= 0{,}24\ I \cdot (V_1 - V_2) \cdot t = 0{,}24\ I^2 \cdot R \cdot t = 0{,}24\ \dfrac{(V_1 - V_2)^2}{R} \cdot t$

	Generadores	Receptores
Energía	$W = E \cdot Q = E \cdot I \cdot t$	$W = E' \cdot Q = E' \cdot I \cdot t$
Potencia	$P = E \cdot I$	$P = E' \cdot I$
Rendimiento	Rendimiento $= \dfrac{R}{R + r}$	Rendimiento $= \dfrac{E'}{V}$
Diferencia de potencial entre sus bornes	$V_1 - V_2 = E - I \cdot r$	$V_1 - V_2 = E' + I \cdot r'$

Ley de Ohm generalizada: $I = \dfrac{\Sigma E}{\Sigma R}$

Diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito: $V_1 - V_2 = I\, \Sigma R - \Sigma E$

LEYES DE KIRCHHOFF

Primera (regla de los nudos): $\Sigma I_i = 0$

Segunda (regla de las mallas): $\Sigma E = \Sigma I \cdot R$

ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS

En serie	En paralelo
$I = \text{cte}$	$I = \Sigma I_i$
$V = \Sigma V_i$	$V_A - V_B = I_i \cdot R_i = \text{cte}$
$R = \Sigma R_i$	$\dfrac{1}{R} = \Sigma\ \dfrac{1}{R_i}$

ASOCIACIÓN DE n GENERADORES IGUALES

En serie	En paralelo	Mixta (q series en derivación de p generadores cada una)
$I = \dfrac{nE}{R + nr}$	$I = \dfrac{E}{R + \dfrac{r}{n}}$	$I = \dfrac{pE}{R + \dfrac{pr}{q}} = \dfrac{npE}{nR + p^2 r}$

APARATOS DE MEDIDA

Aparato	Magnitud que mide	Característica	Conexión
Galvanómetro Amperímetro	Intensidad (I)	Resistencia pequeña	En serie
Voltímetro	Diferencia de potencial(V)	Resistencia grande	En paralelo

17. CORRIENTE CONTINUA

17.1. *¿Es nulo el campo eléctrico dentro de un conductor recorrido por una corriente eléctrica?*

Solución: No. Precisamente la corriente eléctrica consiste en el movimiento de electrones en sentido contrario al campo. En el momento en que el campo eléctrico se anule la corriente dejará de fluir.

17.2. *La intensidad de corriente que atraviesa un hilo conductor varía con el tiempo según la expresión:*

$$I = 6t^2 + 3 \quad (SI)$$

a) ¿Qué carga atraviesa una sección del hilo en el intervalo de tiempo comprendido entre t = 1 s y t = 5 s?
b) ¿Cuál es la intensidad media durante ese tiempo?

Solución:

a)

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I \cdot dt = \int_1^5 (6t^2 + 3)\, dt = \left[2t^3 + 3t\right]_1^5 = \boxed{\mathbf{260\ C}}$$

b)

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{260\ C}{4\ s} = \boxed{\mathbf{65\ A}}$$

17.3. *En el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno los electrones dan, aproximadamente, $6 \cdot 10^{15}$ vueltas por segundo alrededor del núcleo. ¿Cuál es la intensidad de corriente en un punto de la órbita del electrón?*

Solución:

$$I = 6 \cdot 10^{15}\ \frac{\text{electrones}}{s} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C}{1\ \text{electrón}} \cdot \frac{1\ A}{1\ C/s} =$$

$$= 9{,}6 \cdot 10^{-4}\ A = \boxed{\mathbf{0{,}96\ mA}}$$

17.4. *Un conductor de cobre (la densidad del cobre es 8,8 g/cm³) tiene una sección S = 1 mm² y por él circula una corriente de 4 A de intensidad. Calcular la velocidad de arrastre de los electrones a su través. La masa atómica del cobre es 63,57 g/mol y el número de Avogadro $6{,}02 \cdot 10^{23}$ átomos/mol.*

Solución: El número de electrones libres por unidad de volumen del conductor, suponiendo que cada átomo de cobre proporciona dos electrones libres, es:

$$n = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \frac{\text{átomos}}{\text{mol}} \cdot \frac{2\ \text{electrones}}{1\ \text{átomo}} \cdot \frac{1\ \text{mol}}{63{,}57\ \text{g}} \cdot \frac{8{,}8\ \text{g}}{1\ \text{cm}^3} \cdot \frac{10^6\ \text{cm}^3}{1\ \text{m}^3} =$$
$$= 1{,}67 \cdot 10^{29}\ \text{electrones/m}^3$$

Por lo tanto, la velocidad de arrastre de los electrones será:

$$v = \frac{I}{n \cdot e \cdot S} =$$

$$= \frac{4\ \text{A}}{1{,}67 \cdot 10^{29}\ \dfrac{\text{electrones}}{\text{m}^3} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}{\text{electrón}} \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2} =$$

$$= \boxed{1{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{m/s}}$$

17.5. *Calcular la resistencia, a 0 °C, de un alambre de cobre de 5 m de longitud y 2 mm de diámetro. La resistividad del cobre a 0 °C es $1{,}63 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$. Sabiendo que el coeficiente de variación de la resistividad con la temperatura es $0{,}0043\ °C^{-1}$, determinar su resistencia a 100 °C.*

Solución: Calculemos, en primer lugar, la sección del hilo de cobre:

$$S = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}}{2}\right)^2 = 3{,}14 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2$$

La resistencia a 0 °C será:

$$R_o = \rho_o \cdot \frac{l}{S} = 1{,}63 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m} \cdot \frac{5\ \text{m}}{3{,}14 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2} = \boxed{0{,}026\ \Omega}$$

Como $\rho_t = \rho_o \cdot (1 + \alpha \cdot t)$, se cumplirá también que:

$$R_t = R_o \cdot (1 + \alpha \cdot t)$$

Por lo tanto:

$$R_{100} = 0{,}026\ \Omega \cdot (1 + 0{,}0043\ °\text{C}^{-1} \cdot 100\ °\text{C}) = \boxed{0{,}037\ \Omega}$$

17.6. *Una plancha eléctrica de 600 W se conecta a un enchufe de 125 V. ¿Qué intensidad de corriente la recorre? ¿Qué carga circuló por la plancha en 5 minutos? ¿Qué cantidad de calor desarrolló en esos 5 minutos?*

Solución:

$$I = \frac{P}{V_1 - V_2} = \frac{600\ \text{W}}{125\ \text{V}} = \boxed{4{,}8\ \text{A}}$$

$$Q = I \cdot t = 4{,}8\ \text{A} \cdot 5\ \text{min} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} = \boxed{1\ 440\ \text{C}}$$

$$\text{Calor} = 0{,}24 \cdot I \cdot (V_1 - V_2) \cdot t =$$

$$= 0{,}24\ \frac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot 4{,}8\ \text{A} \cdot 125\ \text{V} \cdot 5\ \text{min} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} = \boxed{\mathbf{43\ 200\ cal}}$$

17.7. *Por un hilo de ferroníquel de 1 m de longitud, 0,2 mm² de sección y 80 μΩ · cm de resistividad, sumergido en 1 litro de agua, se hace pasar durante 16 minutos y 40 segundos una corriente de 5 amperios. Calcular:*

a) La resistencia del hilo.
b) El calor producido.
c) El aumento de temperatura, Δt, que experimenta el agua, suponiendo:

- *que no hay pérdidas de calor;*
- *que se pierde un 30 por 100 del calor.*

Solución:

a)

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} = 80 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{cm} \cdot \frac{100\ \text{cm}}{2 \cdot 10^{-3}\ \text{cm}^2} = \boxed{\mathbf{4\ \Omega}}$$

b) De acuerdo con la ley de Joule:

$$\text{Calor} = 0{,}24\ I^2 \cdot R \cdot t =$$

$$= 0{,}24\ \frac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot (5\ \text{A})^2 \cdot 4\ \Omega \cdot 1\ 000\ \text{s} = \boxed{\mathbf{24\ 000\ cal}}$$

c) • Como: Calor = $c \cdot m \cdot \Delta t$, resulta:

$$\Delta t = \frac{\text{Calor}}{c \cdot m} = \frac{24\ 000\ \text{cal}}{1\ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot 1\ 000\ \text{g}} = \boxed{\mathbf{24\ {}^\circ C}}$$

• Ya que el 30 por 100 de 24 000 cal son 7 200 cal, tenemos que:

$$\Delta t = \frac{\text{Calor}}{c \cdot m} = \frac{24\ 000\ \text{cal} - 7\ 200\ \text{cal}}{1\ \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot 1\ 000\ \text{g}} = \boxed{\mathbf{16{,}8\ {}^\circ C}}$$

17.8. *Una estufa eléctrica lleva una inscripción que dice: «220 V, 1 760 W». Calcular:*

a) La intensidad de la corriente que circula por ella.
b) Su resistencia.
c) Lo que gasta en dos horas, sabiendo que el kW-h cuesta 8 ptas.
d) El número de calorías que desprende en esas dos horas, suponiendo que toda la energía eléctrica se transforme en calor.

Solución:

a) Como $P = I \cdot (V_1 - V_2)$, resulta:

$$I = \frac{P}{V_1 - V_2} = \frac{1\,760 \text{ W}}{220 \text{ V}} = \boxed{8 \text{ A}}$$

b) Aplicando la ley de Ohm:

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{220 \text{ V}}{8 \text{ A}} = \boxed{27{,}5\ \Omega}$$

c) De acuerdo con la definición de potencia, la energía consumida en 2 horas será:

$$W = P \cdot t = 1{,}76 \text{ kW} \cdot 2 \text{ h} = 3{,}52 \text{ kW-h}$$

Calculemos ahora el coste de dicha energía:

$$C = 3{,}52 \text{ kW-h} \cdot \frac{8 \text{ ptas}}{1 \text{ kW-h}} = 28{,}16 \text{ ptas} \simeq \boxed{28 \text{ ptas}}$$

d)

$$\text{Calor} = 0{,}24 \cdot W = 0{,}24 \ \frac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot 3{,}52 \text{ kW-h} \cdot \frac{3{,}6 \cdot 10^6 \text{ J}}{1 \text{ kW-h}} \cdot \frac{1 \text{ kcal}}{10^3 \text{ cal}} =$$

$$= \boxed{3\,041 \text{ kcal}}$$

17.9. *Caliento en un cazo eléctrico 600 cm³ de agua durante 5 minutos y empleo una corriente continua de 110 V, marcando el amperímetro una intensidad de 2,5 A.*

a) ¿Qué energía eléctrica se ha suministrado?
b) Suponiendo que la temperatura del agua pasó de 10 °C a 35 °C, ¿qué energía aprovechó el cazo? ¿Cuál fue su rendimiento?

Solución:

a) La energía eléctrica suministrada al cazo es:

$$\text{Calor} = 0{,}24 \cdot I \cdot (V_1 - V_2) \cdot t =$$

$$= 0{,}24 \ \frac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot 2{,}5 \text{ A} \cdot 110 \text{ V} \cdot 5 \text{ min} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = \boxed{19\,800 \text{ cal}}$$

b) La energía aprovechada por el cazo es:

$$\text{Calor} = m \cdot c \cdot \Delta t = 600 \text{ g} \cdot \frac{1 \text{ cal}}{\text{g} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (35 - 10)\ {}^\circ\text{C} = \boxed{15\,000 \text{ cal}}$$

Por tanto, el rendimiento del cazo será:

$$\text{Rendimiento} = \frac{15\,000 \text{ cal}}{19\,800 \text{ cal}} \cdot 100 = \boxed{75{,}76\ \%}$$

17.10. ***Al funcionar durante cierto tiempo un termo eléctrico, el contador registra un consumo de 10 kW-h. Calcula:***

a) La cantidad de calor producido.
b) El tiempo transcurrido en producirse esa cantidad de calor, si la tensión fue de 100 V y la intensidad de 10 A.
c) El número de litros de agua que pudieron ser calentados con ese calor, haciendo que su temperatura pasara de 10 °C a 96,4 °C.

Solución:

a) La cantidad de calor producido es:

$$\text{Calor} = 10 \text{ kW-h} \cdot \frac{3{,}6 \cdot 10^6 \text{ J}}{1 \text{ kW-h}} \cdot \frac{0{,}24 \text{ cal}}{1 \text{ J}} = \boxed{\mathbf{8{,}64 \cdot 10^6 \text{ cal}}}$$

b) La potencia de la corriente eléctrica empleada es:

$$P = I \cdot (V_1 - V_2) = 10 \text{ A} \cdot 100 \text{ V} = 1\,000 \text{ W} = 1 \text{ kW}$$

Calculemos ahora el tiempo empleado en la producción de 10 kW-h:

$$t = \frac{W}{P} = \frac{10 \text{ kW-h}}{1 \text{ kW}} = \boxed{\mathbf{10 \text{ h}}}$$

c) Aplicando la fórmula fundamental de la calorimetría:

$$\text{Calor} = m \cdot c \cdot \Delta t$$

resulta:

$$m = \frac{\text{Calor}}{c \cdot \Delta t} = \frac{8{,}64 \cdot 10^6 \text{ cal}}{1 \dfrac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}} \cdot (96{,}4 - 10) \text{ °C}} = 10^5 \text{ g} = 100 \text{ kg} =$$

$$= \boxed{\mathbf{100 \text{ l de agua}}}$$

17.11. ***En la resistencia de 4 Ω del circuito de la figura 17.1 se desprenden 1 440 cal por minuto. Con este dato calcular:***

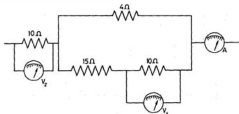


Fig. 17.1

a) La lectura del voltímetro V_1.
b) La lectura del voltímetro V_2.
c) La lectura del amperímetro A.

Solución:

a) Por aplicación de la ley de Joule, calculemos la intensidad de corriente que circula a través de la resistencia de 4 Ω:

$$I_1 = \sqrt{\frac{\text{Calor}}{0{,}24 \cdot R_1 \cdot t}} = \sqrt{\frac{1\,440 \text{ cal}}{0{,}24 \ \frac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot 4\ \Omega \cdot 60 \text{ s}}} = 5 \text{ A}$$

La intensidad de corriente en la otra rama de la asociación en paralelo es:

$$I_2 = \frac{I_1 \cdot R_1}{R_2} = \frac{5 \text{ A} \cdot 4\ \Omega}{25\ \Omega} = 0{,}8 \text{ A}$$

El voltímetro V_1 indicará la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia de 10 Ω:

$$V_1 = 0{,}8 \text{ A} \cdot 10\ \Omega = \boxed{\mathbf{8\ V}}$$

c) La intensidad de corriente total es:

$$I = I_1 + I_2 = 5 \text{ A} + 0{,}8 \text{ A} = 5{,}8 \text{ A}$$

Esta intensidad de corriente será precisamente la que indique el amperímetro A:

$$\boxed{\mathbf{I = 5{,}8\ A}}$$

b) A través de la resistencia de 10 Ω circula la intensidad total: I = 5,8 A. El voltímetro V_2 marcará la diferencia de potencial entre los extremos de dicha resistencia:

$$V_2 = 5{,}8 \text{ A} \cdot 10\ \Omega = \boxed{\mathbf{58\ V}}$$

17.12. *Dos lámparas, una de 60 W y la otra de 100 W, ambas para 125 V de tensión, están conectadas en serie. Calcula:*

a) La resistencia de cada lámpara.
b) La resistencia equivalente de ambas en serie.
c) La intensidad de corriente que las atraviesa.
d) ¿Cuál de ellas lucirá más y por qué?

Solución:

a) Como $P = I \cdot (V_1 - V_2)$, y además:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

resulta:

$$P = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R}$$

Aplicando esta expresión a cada una de las lámparas, tenemos:

$$R_1 = \frac{(V_1 - V_2)^2}{P_1} = \frac{(125\ V)^2}{60\ W} = \boxed{260{,}4\ \Omega}$$

$$R_2 = \frac{(V_1 - V_2)^2}{P_2} = \frac{(125\ V)^2}{100\ W} = \boxed{156{,}2\ \Omega}$$

b) La resistencia equivalente de ambas lámparas asociadas en serie es:

$$R = R_1 + R_2 = 260{,}4\ \Omega + 156{,}2\ \Omega = \boxed{416{,}6\ \Omega}$$

c) Cuando ambas lámparas están conectadas en serie, la intensidad de corriente que las atraviesa será:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{125\ V}{416{,}6\ \Omega} = \boxed{0{,}30\ A}$$

d) Las potencias caloríficas de ambas lámparas asociadas en serie son:

$$P_1 = 0{,}24\ I^2 \cdot R_1 = 0{,}24\ \frac{cal}{J} \cdot (0{,}30\ A)^2 \cdot 260{,}4\ \Omega = \boxed{5{,}625 \frac{cal}{s}}$$

$$P_2 = 0{,}24\ I^2 \cdot R_2 = 0{,}24\ \frac{cal}{J} \cdot (0{,}30\ A)^2 \cdot 156{,}2\ \Omega = \boxed{3{,}375 \frac{cal}{s}}$$

Por consiguiente:

Lucirá más la primera lámpara, porque tiene mayor potencia calorífica.

17.13. *(*) Una estufa eléctrica está caracterizada por su tensión de alimentación, V, y la potencia que disipa, P. Suponiendo que se opera sobre la estufa quitando un trozo de resistencia y conectando eléctricamente la resistencia restante a la tensión V, indicar si en estas condiciones dará más o menos calor por unidad de tiempo.*

Solución: En el primer caso la potencia consumida será:

$$P = \frac{V^2}{R} \qquad [1]$$

y en el segundo:

$$P' = \frac{V^2}{R'} \qquad [2]$$

Dividiendo entre sí las expresiones [1] y [2], obtenemos:

$$\frac{P}{P'} = \frac{R'}{R}$$

Como $R' < R$, $P' > P$. **La estufa dará más calor que antes .**

17.14. *(*) Se tiene una estufa de 220 V y 500 W. ¿Qué resistencia tiene? Por haberse roto su resistencia, al repararla se le quita un trozo que equivale a unos 30 Ω; al volver a conectarla a la red de 220 V ¿qué potencia calorífica, en vatios, suministra ahora?*

Solución: La resistencia inicial de la estufa es:

$$R = \frac{(V_1 - V_2)^2}{P} = \frac{(220 \text{ V})^2}{500 \text{ W}} = \boxed{96{,}8 \ \Omega}$$

Al reparar la estufa esta resistencia queda reducida a:

$$R' = 96{,}8 \ \Omega - 30 \ \Omega = 66{,}8 \ \Omega$$

La potencia que suministra en estas nuevas condiciones será:

$$P' = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R'} = \frac{(220 \text{ V})^2}{66{,}8 \ \Omega} = \boxed{724{,}5 \text{ W}}$$

17.15. *¿De qué depende la temperatura que puede alcanzar una resistencia al paso de la corriente eléctrica?*

Solución: Al pasar la corriente eléctrica a través de una resistencia ésta se calienta, según la ley de Joule:

$$\text{Calor} = 0{,}24 \text{ R} \cdot I^2 \cdot t = 0{,}24 \ \rho \ \frac{l}{S} \cdot I^2 \cdot t$$

elevándose su temperatura. Pero, por otra parte, el exceso de temperatura de la resistencia con respecto al ambiente que la rodea hace que pierda calor por convección y radiación, de acuerdo con la ley del enfriamiento de Newton: Calor = $K \cdot S \cdot (T - T_a) \cdot t$, siendo $S = 2\pi r \cdot l$ la superficie exterior del conductor; T, su temperatura; T_a, la del ambiente, y K, el llamado coeficiente de convección y radiación.

En el momento en que se igualen ambos flujos caloríficos se alcanzará la temperatura de equilibrio, T_e:

$$0{,}24 \ \rho \ \frac{l}{\pi r^2} \ I^2 \cdot t = K \cdot 2\pi r \cdot l \cdot (T_e - T_a) \cdot t$$

deduciéndose que:

$$T_e - T_a = \frac{0{,}24 \ \rho l \cdot I^2 \cdot t}{\pi r^2 \cdot K \cdot 2\pi r \cdot l} = \frac{0{,}12 \ \rho I^2}{\pi^2 \cdot r^3 \cdot K}$$

de donde:

$$T_e = T_a + \frac{0,12\ \rho I^2}{\pi^2 \cdot r^3 \cdot K}$$

17.16. *Por un hilo de cobre de 1,65 mm de diámetro y 1 metro de longitud circula una corriente de 10 A de intensidad. ¿Qué temperatura de equilibrio puede alcanzar, sabiendo que la resistividad del cobre es 0,022 Ω por metro de longitud y milímetro de diámetro, y que la radiación de calor por cm^2 y por grado es $\frac{1}{4\,000}$ de la diferencia de temperatura entre el hilo conductor y el medio ambiente?*

Solución: Como:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

resulta:

$$\frac{R}{R'} = \frac{r'^2}{r^2}$$

de donde:

$$R = R' \cdot \frac{r'^2}{r^2} = 0,022\ \Omega \cdot \frac{(1\ mm)^2}{(1,65\ mm)^2} = 0,0081\ \Omega$$

La potencia calorífica de la corriente que circula por el hilo es:

$$P_{cal} = 0,24\ I^2 \cdot R = 0,24\ \frac{cal}{J} \cdot (10\ A)^2 \cdot 0,0081\ \Omega = 0,194\ cal/s$$

Calculemos ahora la superficie exterior del hilo, suponiendo que forma parte de un circuito:

$$S = 2\pi r \cdot l = 2 \cdot 3,14 \cdot \frac{0,165}{2}\ cm \cdot 100\ cm = 51,81\ cm^2$$

El calor irradiado por este hilo por segundo y por cm^2 es:

$$\frac{0,194\ cal/s}{51,81\ cm^2} = 0,00374\ \frac{cal}{s \cdot cm^2}$$

Designemos por t_e la temperatura de equilibrio que alcanza el hilo y t la temperatura ambiente. De acuerdo con el enunciado del problema:

$$\frac{t_e - t}{4\,000} = 0,00374$$

de donde:

$$t_e - t = 15 \text{ °C}$$

es decir:

La temperatura del hilo superará en 15 °C a la del medio ambiente.

17.17. *¿Qué tiene mayor resistencia: una estufa o una bombilla de incandescencia?*

Solución: Sabemos que una estufa desprende mayor cantidad de calor que una bombilla, supuesto el caso de que ambos receptores estén conectados a la misma tensión. Como, por otra parte, según la ley de Joule:

$$\text{Calor} = 0{,}24 \frac{V^2}{R} \cdot t$$

a mayor resistencia corresponde menos calor desprendido, **la resistencia de la bombilla será mayor** que la de la estufa.

17.18. *¿Por qué los cortocircuitos pueden, a veces, originar incendios?*

Solución: Al producirse un cortocircuito y disminuir la resistencia aumenta la intensidad de corriente, elevándose la temperatura de los conductores hasta valores tan altos que comienzan a arder las capas aislantes, llegando incluso a fundirse el propio cobre que los constituye.

17.19. *Una bombilla eléctrica de 40 W y 110 V se conecta por error a la red de 220 V. Durante unos momentos brilla intensamente y luego se funde. Calcular:*

a) La potencia consumida por la bombilla durante el tiempo que estuvo conectada erróneamente.
b) La resistencia que habría que intercalar en serie con la bombilla en su conexión a la red de 220 V para que funcione correctamente.
c) La potencia total consumida en el caso anterior y el número de kW-h consumidos por el sistema resistencia-bombilla durante 12 horas de funcionamiento.

Solución:

a) La resistencia de la bombilla es:

$$R = \frac{(V_1 - V_2)^2}{P} = \frac{(110 \text{ V})^2}{40 \text{ W}} = 302{,}5 \ \Omega$$

Si esta bombilla se conecta a 220 V, la potencia consumida será:

$$P = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} = \frac{(220 \text{ V})^2}{302{,}5 \ \Omega} = \boxed{160 \text{ W}}$$

b) Cuando funciona correctamente, la intensidad de corriente que circula por la bombilla es:

$$I = \frac{P}{V_1 - V_2} = \frac{40 \text{ W}}{110 \text{ V}} = \frac{4}{11} \text{ A}$$

Llamemos R' a la resistencia que es necesario intercalar en serie para que al conectar la bombilla de 220 V, la intensidad que circule por ella sea de $\frac{4}{11}$ A. Aplicando la ley de Ohm, tenemos:

$$\frac{4}{11} \text{ A} \cdot (R' + 302{,}5)\ \Omega = 220 \text{ V}$$

de donde:

$$\boxed{R' = 302{,}5\ \Omega}$$

c) La potencia total consumida es:

$$P = I \cdot (V_1 - V_2) = \frac{4}{11} \text{ A} \cdot 220 \text{ V} = \boxed{80 \text{ W}}$$

y la energía consumida en 12 horas:

$$W = P \cdot t = 0{,}080 \text{ kW} \cdot 12 \text{ h} = \boxed{0{,}96 \text{ kW-h}}$$

17.20. ***(*) Una bombilla de 120 V y 60 W se monta en paralelo con una resistencia de 80 Ω. Si disponemos de una alimentación de 220 V, ¿qué resistencia debe ponerse en serie con el conjunto para que no se funda la bombilla?***

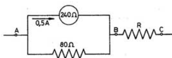


Fig. 17.2

Solución: La bombilla ha sido fabricada para soportar una intensidad:

$$I = \frac{P}{V_1 - V_2} = \frac{60 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 0{,}5 \text{ A}$$

y la resistencia de su filamento es:

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{120 \text{ V}}{0{,}5 \text{ A}} = 240\ \Omega$$

Al conectar la bombilla de la forma señalada en el problema (fig. 17.2) tenemos que la resistencia equivalente a las dos asociadas en paralelo es: $R_{AB} = 60\ \Omega$, y la equivalente a toda la asociación:

$$R_{AC} = (60 + R)\ \Omega$$

Como la intensidad que circula por la bombilla no puede superar 0,5 A, la que circulará por la resistencia de 80 Ω será, como máximo, de 1,5 A, y la intensidad total:

$$I = I_1 + I_2 = 0{,}5\ \text{A} + 1{,}5\ \text{A} = 2\ \text{A}$$

Por tanto, aplicando la ley de Ohm, tenemos:

$$2\ \text{A} = \frac{220\ \text{V}}{(60 + R)\ \Omega}$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{R = 50\ \Omega}}$$

17.21. *En un circuito eléctrico ¿dónde se debe conectar un amperímetro: antes o después de la resistencia de consumo?*

Solución: El amperímetro puede conectarse en cualquier punto del circuito, ya que la intensidad de corriente es constante en todo él.

17.22. *¿Qué ocurrirá si se monta un amperímetro en paralelo? ¿Y un voltímetro en serie?*

Solución: Si un amperímetro se conecta en paralelo, como su resistencia interna es muy pequeña, pasará por él una intensidad de corriente demasiado elevada, que puede llegar incluso a deteriorarlo, si no existe fusible de protección.

Por el contrario, la resistencia de un voltímetro es muy elevada; por ello, si se conecta en serie en un circuito, la intensidad de corriente que lo atraviesa resulta prácticamente despreciable, no experimentando deterioro alguno.

17.23. *¿Cuáles son las magnitudes características de un generador?*

Solución: Las dos magnitudes características de todo generador, e independientes de sus condiciones de funcionamiento, son la **fuerza electromotriz** y la **resistencia interna.**

17.24. *Cuando ponemos en funcionamiento en nuestra casa un aparato de gran consumo (estufa, plancha, etc.) la luz de las bombillas disminuye. ¿A qué se debe esto?*

Solución: Al conectar a la red un aparato de gran consumo el voltaje de la línea ($V = E - I \cdot r$) disminuye, a causa del aumento que experimenta la intensidad de corriente total. Esta disminución de la tensión se traduce en una disminución de la intensidad de corriente que atraviesa los filamentos de las bombillas, que iluminarán menos de lo normal.

17.25. *Uniendo mediante una resistencia de 8 Ω los polos de una batería de 10 V de fuerza electromotriz, circula una corriente de 1 amperio. Calcular:*

a) La resistencia interna de la batería.
b) La potencia eléctrica producida.
c) La potencia absorbida por la resistencia exterior.
d) La potencia absorbida por la batería.
e) El calor producido durante 10 minutos dentro de la batería.

Solución:

a) Sustituyendo en la expresión:

$$I = \frac{E}{R + r}$$

tenemos:

$$1\ A = \frac{10\ V}{8\ \Omega + r}$$

de donde:

$$\boxed{r = 2\ \Omega}$$

b) $$P = E \cdot I = 10\ V \cdot 1\ A = \boxed{10\ W}$$

c) $$P = I^2 \cdot R = (1\ A)^2 \cdot 8\ \Omega = \boxed{8\ W}$$

d) $$P = I^2 \cdot r = (1\ A)^2 \cdot 2\ \Omega = \boxed{2\ W}$$

e) $$\text{Calor} = 0{,}24\ I^2 \cdot r \cdot t =$$

$$= 0{,}24\ \frac{cal}{J} \cdot (1\ A)^2 \cdot 2\ \Omega \cdot 10\ min \cdot \frac{60\ s}{1\ min} = \boxed{288\ cal}$$

17.26. *La intensidad de corriente producida por un generador es de 11 A cuando el circuito exterior es de 5 Ω y de 6 A cuando se duplica la resistencia exterior. Calcular la fuerza electromotriz del generador y su resistencia interna.*

Solución: Aplicando dos veces la ecuación $I = \dfrac{E}{R + r}$, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 11\ A &= \frac{E}{5 + r} \\ 6\ A &= \frac{E}{10 + r} \end{aligned}\right\}$$

La resolución de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas conduce a:

$$\boxed{E = 66\ V} \qquad \boxed{r = 1\ \Omega}$$

17.27. ***Dos resistencias están montadas en derivación en un circuito cuya intensidad principal es 0,5 A. Una de las resistencias está en el interior de un calorímetro, produciendo 288 calorías en 10 minutos.***

a) Sabiendo que la intensidad de corriente que pasa por la otra resistencia es de 0,4 A, calcular el valor de la resistencia introducida en el calorímetro.

b) Calcular la resistencia equivalente a las dos en derivación.

c) Calcular la fuerza electromotriz del generador capaz de mantener en el circuito la intensidad de 0,5 A, si su resistencia interna es de 1 Ω.

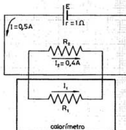


Fig. 17.3

Solución (fig. 17.3):

a) Como $I = I_1 + I_2$:

$$I_1 = I - I_2 =$$
$$= 0{,}5\ A - 0{,}4\ A = 0{,}1\ A$$

De acuerdo con la ley de Joule:

$$\text{Calor} = 0{,}24\ I_1^2 \cdot R_1 \cdot t$$

de donde:

$$R_1 = \frac{\text{Calor}}{0{,}24\ I_1^2 \cdot t} = \frac{288\ \text{cal}}{0{,}24\ \dfrac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot (0{,}1\ A)^2 \cdot 600\ s} = \boxed{200\ \Omega}$$

b) Hallemos, en primer lugar, el valor de R_2. Como $I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2$, resulta:

$$R_2 = \frac{I_1 \cdot R_1}{I_2} = \frac{0{,}1\ A \cdot 200\ \Omega}{0{,}4\ A} = 50\ \Omega$$

Teniendo esto en cuenta, la resistencia equivalente a las dos en derivación será:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{200\ \Omega} + \frac{1}{50\ \Omega} = \frac{1}{40\ \Omega}$$

de donde:

$$\boxed{R = 40\ \Omega}$$

c) La fuerza electromotriz del generador se calcula aplicando la ley de Ohm generalizada:

$$E = I \cdot (R + r) = 0{,}5\ A \cdot [40\ \Omega + 1\ \Omega] = \boxed{20{,}5\ V}$$

17.28. ***Por un motor conectado a una línea de 220 V circula una corriente de 9,1 A. Calcular:***

a) ***La potencia absorbida por el motor.***
b) ***El rendimiento del motor al elevar 10 m³ de agua a 48 m de altura en 50 minutos.***
c) ***Ídem, en el caso de que el trabajo se realice en 40 minutos.***

Considérese 1 kgm = 10 J.

Solución:

a) La potencia absorbida por el motor es:

$$P = I \cdot (V_1 - V_2) = 9{,}1 \text{ A} \cdot 220 \text{ V} = \boxed{2\,000 \text{ W}}$$

b) La potencia útil es:

$$P_{\text{útil}} = \frac{10^5 \text{ N} \cdot 48 \text{ m}}{3\,000 \text{ s}} = 1\,600 \text{ W}$$

mientras que la teórica es 2 000 W.
Por tanto, el rendimiento del motor valdrá:

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Potencia útil}}{\text{Potencia teórica}} \cdot 100 = \frac{1\,600 \text{ W}}{2\,000 \text{ W}} \cdot 100 = \boxed{80\ \%}$$

c) En este caso la potencia útil es:

$$P_{\text{útil}} = \frac{10^5 \text{ N} \cdot 48 \text{ m}}{2\,400 \text{ s}} = 2\,000 \text{ W}$$

y el rendimiento:

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Potencia útil}}{\text{Potencia teórica}} \cdot 100 = \frac{2\,000 \text{ W}}{2\,000 \text{ W}} \cdot 100 = \boxed{100\ \%}$$

17.29. ***Un generador, de fuerza electromotriz 26 V y resistencia interna 1 Ω, se conecta a los extremos de una asociación formada por la unión en paralelo de dos resistencias de 20 Ω y 30 Ω. Calcular:***

a) ***La intensidad de corriente que pasa por el generador.***
b) ***La diferencia de potencial entre los bornes del generador.***
c) ***La potencia consumida en la resistencia de 30 Ω.***

Solución (fig. 17.4):

a) Calculemos, en primer lugar, la resistencia equivalente de las dos asociadas en paralelo:

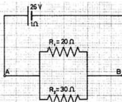


Fig. 17.4

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{30\ \Omega} = \frac{1}{12\ \Omega}$$

de donde:

$$R = 12\ \Omega$$

Aplicando ahora la ley de Ohm generalizada, resulta:

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{26\ V}{12\ \Omega + 1\ \Omega} = \boxed{2\ A}$$

b) La diferencia de potencial entre los bornes del generador valdrá:

$$V_A - V_B = E - I \cdot r = 26\ V - 2\ A \cdot 1\ \Omega = \boxed{24\ V}$$

c) La diferencia de potencial entre los extremos de la asociación en paralelo es:

$$V_A - V_B = 2\ A \cdot 12\ \Omega = 24\ V$$

Por consiguiente, la intensidad de corriente que atraviesa la resistencia de 30 Ω es:

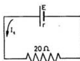
$$I_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2} = \frac{24\ V}{30\ \Omega} = 0{,}8\ A$$

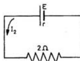
y la potencia que en ella se consume:

$$P = I_2^2 \cdot R_2 = (0{,}8\ A)^2 \cdot 30\ \Omega = \boxed{19{,}2\ W}$$

17.30. *Disponemos de un generador de fuerza electromotriz y resistencia interna desconocidas, cuyos polos se conectan, sucesivamente, a dos resistencias de 20 Ω y 2 Ω, resultando que la cantidad de calor producida por unidad de tiempo en las dos resistencias es la misma. Calcular, en base a estos datos, la resistencia interna de la pila.*

Solución: Llamemos E a la fuerza electromotriz del generador y r a su resistencia interna (fig. 17.5). Aplicando a la ley de Ohm generalizada en ambos casos, tenemos:





$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{E}{20 + r} \\ I_2 &= \frac{E}{2 + r} \end{aligned}\right\}$$

Fig. 17.5

Dividiendo miembro a miembro las dos ecuaciones anteriores, resulta:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{2 + r}{20 + r}$$

Por otra parte, como el calor desprendido por unidad de tiempo en las dos resistencias es el mismo, se cumple que:

$$I_1^2 \cdot R_1 = I_2^2 \cdot R_2$$

de donde:

$$\frac{I_1^2}{I_2^2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{2\ \Omega}{20\ \Omega} = \frac{1}{10}$$

Tenemos así el sistema formado por las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{I_1}{I_2} &= \frac{2 + r}{20 + r} \\ \frac{I_1^2}{I_2^2} &= \frac{1}{10} \end{aligned}\right\}$$

Su resolución:

$$\frac{(2 + r)^2}{(20 + r)^2} = \frac{1}{10}; \quad 360 = 9\, r^2$$

conduce a:

$$\boxed{\mathbf{r = \sqrt{40}\ \Omega = 6{,}324\ \Omega}}$$

17.31. *La resistencia interna de una pila es de 0,1 Ω. Al medir la diferencia de potencial entre sus polos se obtiene un valor de 4,5 V en circuito abierto, el cual se reduce a 4,2 V cuando se cierra el circuito a través de una resistencia. Hallar el valor de dicha resistencia, así como la intensidad de corriente que la atraviesa.*

Solución: Si la diferencia de potencial entre los polos de la pila en circuito abierto es 4,5 V, entonces E = 4,5 V.

Aplicando ahora la expresión $E = V_1 - V_2 + I \cdot r$ al circuito cerrado, tenemos:

$$4{,}5\ V = 4{,}2\ V + I \cdot 0{,}1\ \Omega$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{I = 3\ A}}$$

Por último, como:

$$I = \frac{E}{R + r}$$

sustituyendo, se obtiene:

$$3\ A = \frac{4{,}5\ V}{R + 0{,}1\ \Omega}$$

de donde resulta:

$$\boxed{\mathbf{R = 1{,}4\ \Omega}}$$

17.32. ***Una dinamo de fuerza electromotriz 130 V y resistencia interna 0,65 Ω, puesta en circuito con una resistencia exterior, da una corriente de 20 A. Calcular:***

a) La diferencia de potencial entre los bornes de la dinamo.
b) La potencia útil.
c) La resistencia exterior.
d) El rendimiento eléctrico de la dinamo.

Solución:

a) La diferencia de potencial entre los bornes de la dinamo es:

$$V_A - V_B = E - I \cdot r = 130\ V - 20\ A \cdot 0{,}65\ \Omega = \boxed{\mathbf{117\ V}}$$

b) La potencia útil del generador es:

$$P = I \cdot (V_A - V_B) = 20\ A \cdot 117\ V = \boxed{\mathbf{2\,340\ W}}$$

c) La resistencia exterior se calcula aplicando la ley de Ohm generalizada al circuito:

$$20\ A = \frac{130\ V}{R + 0{,}65\ \Omega}$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{R = 5{,}85\ \Omega}}$$

d) Hallemos, por último, el rendimiento eléctrico de la dinamo:

$$\text{Rendimiento} = \frac{R}{R + r} = \frac{5{,}85\ \Omega}{5{,}85\ \Omega + 0{,}65\ \Omega} = 0{,}90 = \boxed{\mathbf{90\ \%}}$$

17.33. ***En el circuito de la figura 17.6 calcular:***

a) La intensidad de corriente que circula.
b) Las diferencias de potencial $V_a - V_h$, $V_d - V_h$ y $V_e - V_i$.

Solución:

a) Dada la polaridad de los generadores del circuito, la corriente circulará en sentido contrario a las agujas del reloj. Este detalle, no obstante,

carece de importancia, pues en caso de que el sentido supuesto no sea el correcto, la intensidad de corriente obtenida resultará negativa, y ello nos indicará la necesidad de cambiar el sentido inicialmente asignado. Aplicando la ley de Ohm generalizada, tenemos:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{8\ V + 20\ V - 18\ V}{(1 + 2 + 1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 1 + 7 + 2)\ \Omega} = \boxed{0,4\ A}$$

Obsérvese que el generador de 18 V, conectado en oposición a los otros dos, se comporta como un receptor y consume energía eléctrica, en vez de producirla.

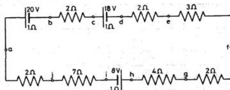


Fig. 17.6

b) $V_a - V_h = I \cdot \Sigma R - \Sigma E = 0,4\ A \cdot (2 + 7 + 1)\ \Omega - 8\ V = \boxed{-4\ V}$

$$V_d - V_h = I \cdot \Sigma R - \Sigma E = 0,4\ A \cdot (1 + 2 + 1 + 2 + 7 + 1)\ \Omega - - (-18 + 20 + 8)\ V = \boxed{-4,4\ V}$$

También podríamos calcular esta diferencia de potencial recorriendo el conductor desde d hasta h, en el mismo sentido de las agujas del reloj. Procediendo de esta forma, resulta:

$$V_d - V_h = -0,4\ A \cdot (2 + 3 + 2 + 4)\ \Omega = \boxed{-4,4\ V}$$

$$V_c - V_i = I \cdot \Sigma R - \Sigma E = 0,4\ A \cdot (2 + 1 + 2 + 7)\ \Omega - 20\ V = \boxed{-15,2\ V}$$

17.34. ***Determinar el valor que ha de tener la fuerza electromotriz, E, de la batería intercalada en el circuito de la figura 17.7, para que el potencial del punto A sea $V_A = 9$ V.***

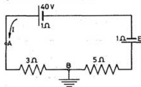


Fig. 17.7

Solución: Ya que el punto B está conectado a tierra, $V_B = 0$ V, y, en consecuencia, $V_A - V_B = 9$ V. Aplicando la ley de Ohm al conductor AB, podemos calcular la intensidad de corriente del circuito:

$$I = \frac{V_A - V_B}{R_{AB}} = \frac{9\ V}{3\ \Omega} = 3\ A$$

Si aplicamos ahora la ley de Ohm generalizada: $I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R}$, a todo el circuito, tenemos:

$$3\ A = \frac{(40 - E)\ V}{(1 + 3 + 5 + 1)\ \Omega}$$

de donde:

$$\boxed{E = 10\ V}$$

17.35. ***Una dinamo tiene una fuerza electromotriz de 400 V y alimenta un motor cuya fuerza contraelectromotriz es de 300 V en régimen normal de funcionamiento, estando unidos mediante conductores cuya resistencia total es de 5 Ω. La resistencia interior de la dinamo y el motor es de 10 Ω cada una. Calcular:***

a) La intensidad de corriente durante el funcionamiento normal del motor.
b) La intensidad de corriente durante el momento del arranque.
c) La potencia del motor.
d) El rendimiento de la instalación.

Solución:

a) Apliquemos la ley de Ohm generalizada al circuito:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{400\ V - 300\ V}{5\ \Omega + 20\ \Omega} = \boxed{4\ A}$$

b) En el momento del arranque, el motor se comporta como una resistencia muerta, pues ya que su rotor no gira, no hay que tener en cuenta la fuerza contraelectromotriz:

$$I = \frac{400\ V}{5\ \Omega + 20\ \Omega} = \boxed{16\ A}$$

c) La potencia del motor será:

$$P = E' \cdot I = 300\ V \cdot 4\ A = \boxed{1\,200\ W}$$

d) La potencia suministrada por la dinamo es:

$$P = E \cdot I = 400\ V \cdot 4\ A = 1\,600\ W$$

y la útil del motor, 1 200 W. Por tanto, el rendimiento de la instalación será:

$$\text{Rendimiento} = \frac{1\,200\ W}{1\,600\ W} \cdot 100 = \boxed{75\ \%}$$

17.36. *Un generador de fuerza electromotriz 100 V y resistencia interna despreciable forma circuito con una resistencia de 10 Ω y un motor, colocados en serie.*

La resistencia está introducida en un calorímetro y se comprueba que si el motor no gira, en el calorímetro se producen 2 000 calorías en 1 minuto; en cambio, si gira el motor, en el mismo tiempo se producen 200 calorías. Con estos datos, calcular:

a) Intensidad de corriente en ambos casos.
b) Resistencia interna del motor.
c) Fuerza contraelectromotriz del motor.

Solución:

a) Aplicando la ley de Joule en el primer caso, cuando el motor no gira:

$$I = \sqrt{\frac{\text{Calor}}{0{,}24\ R \cdot t}} = \sqrt{\frac{2\,000\ \text{cal}}{0{,}24\ \frac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot 10\ \Omega \cdot 60\ \text{s}}} = \boxed{3{,}73\ \text{A}}$$

mientras que en el segundo, cuando gira el motor:

$$I' = \sqrt{\frac{\text{Calor}'}{0{,}24\ R \cdot t}} = \sqrt{\frac{200\ \text{cal}}{0{,}24\ \frac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot 10\ \Omega \cdot 60\ \text{s}}} = \boxed{1{,}18\ \text{A}}$$

b) Cuando el motor no gira se comporta como una resistencia pura por la que circula una corriente de 3,73 A. Aplicando en este caso la ley de Ohm generalizada, tenemos:

$$3{,}73\ \text{A} = \frac{100\ \text{V}}{10\ \Omega + r'}$$

de donde:

$$\boxed{r' = 16{,}8\ \Omega}$$

c) Aplicando la ley de Ohm generalizada al circuito cuando el motor gira, se obtiene:

$$1{,}18\ \text{A} = \frac{100\ \text{V} - E'}{10\ \Omega + 16{,}8\ \Omega}$$

de donde:

$$\boxed{E' = 68{,}38\ \text{V}}$$

17.37. *¿Por qué no se deben montar nunca generadores de distinta fuerza electromotriz en paralelo?*

Solución: Conectarlos de esta forma equivale a montarlos en oposición, con lo que circularía la corriente de uno a otro y al formarse un cortocircuito (por no existir resistencia exterior) **ambos generadores se podrían deteriorar.**

17.38. ***Un circuito en serie se compone de una batería de 12 V, una resistencia de 3,7 Ω y un interruptor. La resistencia interna de la batería es 0,3 Ω. Si el interruptor está abierto, ¿cuál será la indicación de un voltímetro de gran resistencia al conectarlo:***

a) a los bornes de la batería?;
b) a los de la resistencia?;
c) a los del interruptor?

Repetir las respuestas para cuando el interruptor esté cerrado.

Solución:

a) El voltímetro indica siempre la diferencia de potencial entre los puntos a los que se conecta, en este caso los bornes de la batería (fig. 17.8).

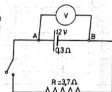


Fig. 17.8

Si el interruptor está abierto, esta diferencia de potencial será igual a la fuerza electromotriz de la batería:

$$\boxed{V = 12\ V}$$

En cambio, si el interruptor está cerrado, V' = E − I · r. Como la intensidad de corriente que circula es:

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{12\ V}{3{,}7\ \Omega + 0{,}3\ \Omega} = 3\ A$$

la diferencia de potencial entre los bornes de la batería valdrá:

$$V' = E - I \cdot r = 12\ V - 3\ A \cdot 0{,}3\ \Omega = \boxed{11{,}1\ V}$$

b) Este caso aparece representado en la figura 17.9.

Si el interruptor está abierto, la intensidad de corriente es nula y el voltímetro indicará:

$$\boxed{V = 0\ V}$$

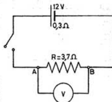


Fig. 17.9

Si cerramos el interruptor, circula una corriente de 3 A de intensidad y el voltímetro señalará la diferencia de potencial existente entre los bornes de la resistencia:

$$V' = I \cdot R = 3\ A \cdot 3{,}7\ \Omega = \boxed{11{,}1\ V}$$

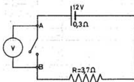
Compruébese que esta diferencia de potencial es la misma que entre los bornes del generador.

c) Si el interruptor está abierto (fig. 17.10):

$$V_A - V_B = I \cdot \Sigma R - \Sigma E = $$
$$= 12 \text{ V}$$

ya que $I = 0$.

$$\boxed{V = 12 \text{ V}}$$



Si está cerrado, $I = 3$ A, y, por consiguiente:

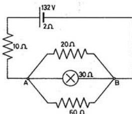
Fig. 17.10

$$V_A - V_B = I \cdot \Sigma R - \Sigma E = 3 \text{ A} \cdot 4 \,\Omega - 12 \text{ V} = 0 \text{ V}$$

$$\boxed{V' = 0 \text{ V}}$$

17.39. ***Determinar el valor de la potencia eléctrica disipada por la lámpara X del circuito de la figura 17.11.***

Solución: Calculemos, en primer lugar, la intensidad de corriente en el circuito. Como $R_{AB} = 10 \,\Omega$, tenemos:



$$I = \frac{E}{\Sigma R} = $$
$$= \frac{132 \text{ V}}{10 \,\Omega + 10 \,\Omega + 2 \,\Omega} = 6 \text{ A}$$

de donde se deduce, por aplicación de la ley de Ohm:

Fig. 17.11

$$V_A - V_B = I \cdot R_{AB} = 6 \text{ A} \cdot 10 \,\Omega = 60 \text{ V}$$

La intensidad que circula a través de la lámpara X es:

$$I_X = \frac{V_A - V_B}{R_X} = \frac{60 \text{ V}}{30 \,\Omega} = 2 \text{ A}$$

y la potencia disipada por dicha lámpara será:

$$P = I_X \cdot (V_A - V_B) = 2 \text{ A} \cdot 60 \text{ V} = \boxed{120 \text{ W}}$$

17.40. ***La diferencia de potencial entre los bornes de la lámpara X del circuito de la figura 17.12 es 5 V. Calcular:***

a) La intensidad de corriente que circula por el circuito.
b) La potencia consumida por la bombilla.
c) La intensidad de corriente que circula a través de la resistencia de 40 Ω.

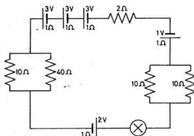


Fig. 17.12

Solución:

a) Las dos asociaciones en paralelo de resistencias que aparecen en el circuito, poseen una resistencia equivalente de 8 Ω y 5 Ω.
Aplicando a todo el circuito la ley de Ohm generalizada, tenemos:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{(3 + 3 + 3 + 2 - 5 - 1)\ V}{(1 + 1 + 1 + 8 + 1 + 5 + 1 + 2)\ \Omega} = \boxed{0{,}25\ A}$$

b) La potencia consumida por la bombilla es:

$$P = I \cdot \Delta V = 0{,}25\ A \cdot 5\ V = \boxed{1{,}25\ W}$$

c) La diferencia de potencial entre los extremos de la asociación en paralelo, en la izquierda de la figura 17.12 es:

$$\Delta V = 0{,}25\ A \cdot 8\ \Omega = 2\ V$$

Por tanto:

$$I_{40} = \frac{2\ V}{40\ \Omega} = \boxed{0{,}05\ A}$$

17.41. *Determinar las indicaciones del amperímetro y del voltímetro conectados conforme se indica en el circuito de la figura 17.13.*

Solución: La resistencia equivalente de las tres asociadas en paralelo es 1 Ω, y la equivalente a las otras dos, también en paralelo, es 2 Ω. Aplicando la ley de Ohm generalizada al circuito, tenemos:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{100\ V - 48\ V - 10\ V}{(0{,}5 + 0{,}5 + 2 + 1 + 1 + 2)\ \Omega} = 6\ A$$

La diferencia de potencial entre los puntos X e Y es:

$$V_X - V_Y = 6\ A \cdot 1\ \Omega = 6\ V$$

Por tanto, la intensidad de corriente que pasa por la rama del medio, y que es la que marca el amperímetro A, será:

$$I = \frac{6\ V}{3\ \Omega} = \boxed{2\ A}$$

El voltímetro señalará la diferencia de potencial entre los bornes del motor:

$$V_1 - V_2 = E' + I \cdot r' = 10\ V + 6\ A \cdot 1\ \Omega = \boxed{16\ V}$$

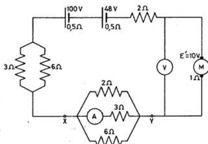


Fig. 17.13

17.42. ***Una línea de conducción eléctrica de longitud L = 145 km, tiene una resistencia total R_1 = 290 Ω. En un punto de la línea se produce una derivación entre ambos hilos. Hallar la distancia de dicho punto al origen de la línea, sabiendo que la resistencia de la línea con la derivación es R_2 = 165,9 Ω y que si la línea se desconecta en su extremo, su resistencia con derivación es R_3 = 240 Ω.***

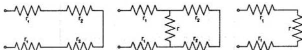


Fig. 17.14

Solución: La figura 17.14 representa los tres casos descritos en el enunciado del problema, y en ella designamos por r_1 la resistencia de cada hilo de la línea hasta el punto donde se verifica la derivación; r_2, la resistencia desde este mismo punto hasta el final, y r, la resistencia de la derivación.

Aplicando las leyes correspondientes a la asociación de resistencias, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,r_1 + 2\,r_2 = 290\ \Omega \\ 2\,r_1 + \dfrac{2\,r \cdot r_2}{2\,r_2 + r} = 165{,}9\ \Omega \\ 2\,r_1 + r = 240\ \Omega \end{array}\right\}$$

La resolución de este sistema de ecuaciones conduce a:

$$r_1 = 35\ \Omega; \quad r_2 = 110\ \Omega; \quad r = 170\ \Omega$$

Como las resistencias de cada tramo de la línea son proporcionales a sus longitudes, si designamos por d la distancia desde el origen a la derivación, podemos escribir:

$$\frac{2\,r_1}{d} = \frac{2\,r_1 + 2\,r_2}{145\ \text{km}} = \frac{290\ \Omega}{145\ \text{km}}$$

de donde:

$$d = \frac{145\ \text{km} \cdot 2\,r_1}{290\ \Omega} = \frac{145\ \text{km} \cdot 70\ \Omega}{290\ \Omega} = \boxed{\mathbf{35\ km}}$$

17.43. *Calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B del circuito de la figura 17.15.*

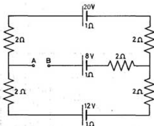


Fig. 17.15

Solución: La intensidad de la única corriente que existe en el circuito es:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{20\ V - 12\ V}{(1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2)\ \Omega} = \frac{4}{5}\ A$$

La diferencia de potencial entre los puntos A y B será:

$$V_A - V_B = I \Sigma R - \Sigma E =$$

$$= -\frac{4}{5} \text{ A} \cdot [2 + 1 + 2] \ \Omega - (-20 + 8) \text{ V} = \boxed{8 \text{ V}}$$

17.44. *Un acumulador tiene una fuerza electromotriz de 6 V y una resistencia interna de 0,05 Ω. Calcular la diferencia de potencial entre los bornes del acumulador:*

a) Cuando se descarga dando 5 A.
b) Cuando se carga con una corriente de 5 A.

Solución:

a) Cuando el acumulador se descarga, se comporta como un generador, y la diferencia de potencial entre sus bornes será:

$$V_1 - V_2 = E - I \cdot r = 6 \text{ V} - 5 \text{ A} \cdot 0{,}05 \ \Omega = \boxed{5{,}75 \text{ V}}$$

b) Cuando el acumulador se carga, funciona como receptor. En este caso:

$$V_1 - V_2 = E' + I \cdot r = 6 \text{ V} + 5 \text{ A} \cdot 0{,}05 \ \Omega = \boxed{6{,}25 \text{ V}}$$

17.45. *Las aristas de un cubo son resistencias de 1 Ω cada una. ¿Cuál es la resistencia equivalente entre dos vértices extremos de una diagonal del cubo?*

Solución: Debido a la simetría existente en el cubo, la intensidad de corriente, I, que llega a uno de los vértices se reparte simétricamente por todas las ramas (véase fig. 17.16). Si aplicamos la ley de Ohm entre los puntos A y B a lo largo de cualquier camino, resulta:

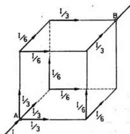


Fig. 17.16

$$V_A - V_B = \frac{I}{3} \cdot 1 \ \Omega + \frac{I}{6} \cdot 1 \ \Omega + \frac{I}{3} \cdot 1 \ \Omega = \frac{5}{6} \text{ I (V)}$$

Por tanto, la resistencia equivalente entre ambos vértices valdrá:

$$R = \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{\frac{5}{6} \text{ I (V)}}{\text{I (A)}} = \boxed{\frac{5}{6} \ \Omega}$$

17.46. *Con seis conductores iguales de 2 Ω cada uno se construye un tetraedro, conectando dos de sus vértices a los polos de una batería de 1,5 V. La resistencia de las conexiones y la resistencia interna de la batería se consideran des-*

preciables. Calcular la intensidad de corriente que pasa por el circuito y la que pasa por cada resistencia.

Solución: El esquema del montaje del circuito viene representado en la figura 17.17.

El potencial en los puntos C y D del circuito es el mismo, puesto que dichos puntos son extremos de dos resistencias iguales por las que circula la misma intensidad de corriente. En consecuencia, por la resistencia que une dichos puntos C y D no pasa corriente alguna, y a efectos prácticos es como si no existiera.

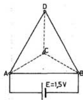


Fig. 17.17

El circuito quedaría, entonces, como el representado en la figura 17.18. Este circuito corresponde a una asociación mixta constituida por dos series montadas en paralelo entre sí y en paralelo con otra resistencia. La resistencia equivalente de la primera serie es: 2 Ω + 2 Ω = 4 Ω y la de la segunda serie, 2 Ω + 2 Ω = 4 Ω. Por tanto, la resistencia equivalente de todo el tetraedro es:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{4\ \Omega} + \frac{1}{4\ \Omega} + \frac{1}{2\ \Omega} = \frac{1}{1\ \Omega}$$

de donde: R = 1 Ω.

La intensidad de corriente producida por la batería es:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{1,5\ V}{1\ \Omega} = 1,5\ A$$

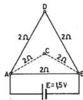


Fig. 17.18

Calculemos ahora las intensidades de corriente que atraviesan cada una de las ramas:

— Por la rama ADB:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{1,5\ V}{4\ \Omega} = 0,375\ A$$

— Por la rama AC:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{1,5\ V}{4\ \Omega} = 0,375\ A$$

— Por el conductor AB:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{1,5\ V}{2\ \Omega} = 0,75\ A$$

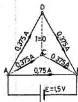


Fig. 17.19

En resumen:

Las intensidades de corriente pedidas vienen señaladas en la figura 17.19.

17.47. *Hallar las intensidades de corriente en la red de la figura 17.20.*

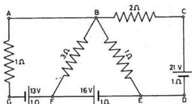


Fig. 17.20

Solución: Como hay cinco ramas, habrá cinco intensidades de corriente, cuyos valores y sentidos vamos a asignar arbitrariamente (fig. 17.21).

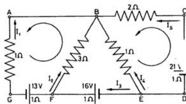


Fig. 17.21

Para resolver el problema tendremos que plantear un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas. Ya que en la red hay tres nudos (B, F y E), aplicaremos la regla de los nudos a dos cualesqüiera (por ejemplo, el E y el F). Tenemos así:

$$I_3 + I_4 + I_5 = 0 \text{ (nudo E)}$$

$$I_3 - I_1 - I_2 = 0 \text{ (nudo F)}$$

Las tres ecuaciones restantes las obtendremos aplicando la segunda regla de Kirchhoff a las mallas AGFBA, FBEF y EDCBE, que son las más sencillas en que se puede descomponer la red y que vamos a recorrer en el sentido indicado en la figura 17.21. Se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} -2\,I_1 + 3\,I_2 &= 13 \text{ (malla AGFBA)} \\ 3\,I_2 - I_4 + I_3 &= 16 \text{ (malla FBEF)} \\ 3\,I_5 - I_4 &= 21 \text{ (malla EDCBE)} \end{aligned}\right\}$$

La resolución del sistema conduce a:

$$\boxed{I_1 = -2\ A;\ I_2 = 3\ A;\ I_3 = 1\ A;\ I_4 = -6\ A;\ I_5 = 5\ A}$$

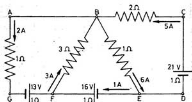


Fig. 17.22

El signo negativo obtenido para las intensidades I_1 e I_4 pone de manifiesto que su sentido es el opuesto al que les asignamos arbitrariamente al comienzo. En la figura 17.22 se indican los valores y sentidos de todas las intensidades que circulan por las distintas ramas de la red.

17.48. ***En el circuito de la figura 17.23 ¿cuáles son las intensidades que circulan por cada una de las resistencias?***

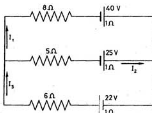


Fig. 17.23

Solución: En el diagrama de la figura 17.23 ya aparece supuesto un sentido para las intensidades I_1, I_2 e I_3.

Aplicando la regla de los nudos al nudo de la izquierda, tenemos:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \qquad [1]$$

Aplicando la segunda regla de Kirchhoff a la malla de arriba, la cual recorreremos en el sentido de las agujas del reloj, se obtiene:

$$8\ I_1 + I_1 - I_2 - 5\ I_2 = 40 - 25 \qquad [2]$$

y haciendo lo mismo con la malla de abajo:

$$5 I_2 + I_2 + I_3 + 6 I_3 = 25 + 22 \qquad [3]$$

Simplificando estas ecuaciones, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} I_3 = I_1 + I_2 \\ 3 I_1 - 2 I_2 = 5 \\ 6 I_2 + 7 I_3 = 47 \end{array}\right\}$$

La resolución del anterior sistema conduce a:

$$\boxed{I_1 = 3 \text{ A};\quad I_2 = 2 \text{ A};\quad I_3 = 5 \text{ A}}$$

Los valores positivos obtenidos para las intensidades de corriente, confirman el acierto en la elección inicial de sentido.

17.49. *Calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B en el circuito de la figura 17.24.*

Solución: Por aplicación de la primera regla de Kirchhoff al nudo A, se deduce que la intensidad de corriente en el conductor AB es de 1 A, en el sentido de B a A.

Calculemos ahora la diferencia de potencial entre los puntos A y B:

$$V_A - V_B = I \Sigma R - \Sigma E = -1 \text{ A} \cdot [1 \,\Omega + 4 \,\Omega] - (-18 \text{ V}) = \boxed{13 \text{ V}}$$

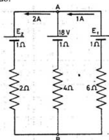


Fig. 17.24

Nota: Para la resolución del problema no es necesario hallar las fuerzas electromotrices E_1 y E_2, si bien su cálculo, por aplicación de la segunda regla de Kirchhoff, conduce a los valores: $E_1 = 20$ V y $E_2 = 7$ V.

17.50. *Calcular la intensidad de corriente que señala el amperímetro del circuito de la figura 17.25.*

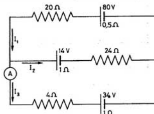


Fig. 17.25

Solución: Aplicando la regla de los nudos al de la izquierda:

$$I_2 + I_3 - I_1 = 0 \qquad [1]$$

Apliquemos ahora la segunda regla de Kirchhoff a la malla superior:

$$0{,}5\, I_1 + 20\, I_1 + I_2 + 24\, I_2 = 80 - 14 \qquad [2]$$

y a la inferior:

$$-I_2 - 24\, I_2 + 4\, I_3 + I_3 = 14 - 34 \qquad [3]$$

La resolución de este sistema da como resultado:

$$\boxed{I_3 = 1\ \text{A}}$$

17.51. ***Dos pilas de fuerzas electromotrices y resistencias internas respectivas $E_1 = 21$ V, $r_1 = 1\ \Omega$, $E_2 = 23$ V, $r_2 = 1\ \Omega$, se conectan en paralelo, uniendo los polos del mismo signo. Calcular la intensidad de corriente que pasa por una resistencia de 5 Ω conectada en serie con el sistema que forman las dos pilas.***

Solución: La figura 17.26 representa un esquema del circuito. Aplicando al nudo B la primera regla de Kirchhoff:

$$I_3 - I_1 - I_2 = 0 \qquad [1]$$

Si aplicamos ahora a las mallas ABEF y BCDE la segunda regla de Kirchhoff, obtenemos:

$$I_2 - I_1 = 23 - 21 \qquad [2]$$

$$-I_2 - 5\, I_3 = -23 \qquad [3]$$

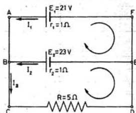


Fig. 17.26

La resolución de este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas conduce a:

$$\boxed{I_3 = 4\ \text{A}}$$

17.52. ***En la red de la figura 17.27, calcular cada una de las intensidades de corriente y la carga del condensador. Las resistencias internas de los generadores son despreciables.***

Solución: En esta red existen dos nudos y dos mallas independientes, ya que a través del condensador no pasa corriente.

Aplicando la primera regla de Kirchhoff al nudo de la izquierda, tenemos:

$$I_2 - I_1 - I_3 = 0 \qquad [1]$$

Aplicando ahora la segunda regla de Kirchhoff a las mallas superior e inferior, se obtiene:

$$8\ I_1 = 12 + 4 \qquad [2]$$

$$6\ I_3 = 12 \qquad [3]$$

La resolución del anterior sistema da como resultado:

$$\boxed{\begin{array}{l} I_1 = 2\ \mathrm{A} \\ I_2 = 4\ \mathrm{A} \\ I_3 = 2\ \mathrm{A} \end{array}}$$

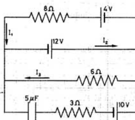


Fig. 17.27

La diferencia de potencial entre las armaduras del condensador es:

$$V_1 - V_2 = I\ \Sigma\ R - \Sigma\ E = 2\ \mathrm{A} \cdot 6\ \Omega - 10\ \mathrm{V} = 2\ \mathrm{V}$$

Por tanto, su carga valdrá:

$$Q = C \cdot (V_1 - V_2) = 5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F} \cdot 2\ \mathrm{V} = \boxed{10^{-5}\ \mathrm{C}}$$

17.53. ***¿Qué intensidad de corriente pasa por la resistencia de 6 Ω en la figura 17.28?***

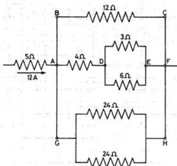


Fig. 17.28

Solución: Como las resistencias de 3 Ω y 6 Ω están en paralelo:

$$\frac{1}{R_{DE}} = \frac{1}{3\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega}$$

de donde: $R_{DE} = 2\ \Omega$.
Por lo tanto:

$$R_{AE} = 4\ \Omega + 2\ \Omega = 6\ \Omega$$

Tenemos ahora cuatro resistencias asociadas en paralelo (12 Ω, 6 Ω, 24 Ω y 24 Ω). La resistencia equivalente valdrá:

$$\frac{1}{R_{AF}} = \frac{1}{12\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega} + \frac{1}{24\ \Omega} + \frac{1}{24\ \Omega} = \frac{1}{3\ \Omega}$$

de donde:

$$R_{AF} = 3\ \Omega$$

La diferencia de potencial entre los puntos A y F será:

$$V_A - V_F = I \cdot R_{AF} = 12\ A \cdot 3\ \Omega = 36\ V$$

Por consiguiente, la intensidad de corriente que circula por la rama AE es:

$$I_{AE} = \frac{V_A - V_F}{R_{AE}} = \frac{36\ V}{6\ \Omega} = 6\ A$$

Por último, como:

$$V_D - V_E = I_{AE} \cdot R_{DE} = 6\ A \cdot 2\ \Omega = 12\ V$$

resulta:

$$I_6 = \frac{V_D - V_E}{R_6} = \frac{12\ V}{6\ \Omega} = \boxed{2\ A}$$

17.54. *Determinar la manera de asociar n generadores iguales, de manera que sea máxima la intensidad de corriente producida.*

Solución: Para hallar las condiciones que hacen máxima la intensidad de corriente tendremos que derivar la expresión:

$$I = \frac{n \cdot p \cdot E}{n \cdot R + p^2 \cdot r}$$

con respecto a p, e igualar a cero dicha derivada:

$$\frac{dI}{dp} = \frac{n \cdot E \cdot (n \cdot R + p^2 \cdot r) - npE \cdot 2pr}{(n \cdot R + p^2 \cdot r)^2} =$$

$$= \frac{E \cdot n^2 \cdot R - E \cdot n \cdot p^2 \cdot r}{(n \cdot R + p^2 \cdot r)^2} = 0$$

De aquí resulta:

$$E \cdot n^2 \cdot R - E \cdot n \cdot p^2 \cdot r = 0$$

de donde:

$$n \cdot R = p^2 \cdot r$$

o bien:

$$p \cdot q \cdot R = p^2 \cdot r$$

o sea:

$$\boxed{R = \frac{p \cdot r}{q}}$$

Si hallamos la derivada segunda de I con respecto a p y sustituimos el valor de R que acabamos de obtener, resulta:

$$\frac{d^2I}{dp^2} < 0$$

lo cual demuestra que se trata de un máximo.

17.55. ***Dos grupos de pilas, de 6 pilas en serie cada uno, están conectados en paralelo. La fuerza electromotriz de cada pila es 1,5 V y su resistencia interna 0,5 Ω. La resistencia exterior del circuito es 1 Ω. Hallar la intensidad de corriente que circula por la resistencia exterior.***

Solución: Designando por n el número de pilas de la asociación y por p el de las que integran cada serie, resulta:

$$I = \frac{n \cdot p \cdot E}{n \cdot R + p^2 \cdot r} = \frac{12 \cdot 6 \cdot 1{,}5\ \text{V}}{12 \cdot 1\ \Omega + 6^2 \cdot 0{,}5\ \Omega} = \boxed{3{,}6\ \text{A}}$$

17.56. ***¿Cómo se han de instalar 36 pilas, de 0,2 Ω de resistencia interna cada una, para que sea máxima la intensidad de corriente que circula al conectarlas a una resistencia exterior de 0,8 Ω?***

Solución: Como $n = 36$, $R = 0{,}8\ \Omega$ y $r = 0{,}2\ \Omega$, resulta:

$$I = \frac{36\ E \cdot p}{36 \cdot 0{,}8 + p^2 \cdot 0{,}2} = \frac{36\ E \cdot p}{28{,}8 + 0{,}2\ p^2}$$

Para que la intensidad sea máxima se ha de cumplir que:

$$\frac{dI}{dp} = 0$$

Por tanto:

$$\frac{dI}{dp} = \frac{36\ E \cdot (28{,}8 + 0{,}2\ p^2) - 0{,}4\ p \cdot 36\ E \cdot p}{(28{,}8 + 0{,}2\ p^2)^2} =$$

$$= \frac{36\ E\ [28{,}8 + 0{,}2\ p^2 - 0{,}4\ p^2]}{(28{,}8 + 0{,}2\ p^2)^2} = 0$$

de donde:

$$28{,}8 + 0{,}2\ p^2 - 0{,}4\ p^2 = 0; \quad 28{,}8 = 0{,}2\ p^2; \quad p = 12$$

Como $p \cdot q = n$:

$$q = \frac{n}{p} = \frac{36}{12} = 3$$

En tres grupos en paralelo, de 12 pilas en serie cada uno.

17.57. ***Cuatro resistencias iguales de 10 Ω cada una se unen formando un cuadro. Uniendo dos vértices opuestos se coloca otra resistencia de 5 Ω, y los otros dos vértices se unen a los polos de un generador de 10 V de fuerza electromotriz y resistencia interna despreciable.***

Calcular la resistencia equivalente al conjunto y la intensidad de corriente que pasa por cada resistencia asociada.

Solución: Este circuito (véase fig. 17.29 a) es un puente de Wheatstone, puesto que el producto de las resistencias enfrentadas es constante.

Al ser igual el potencial en los puntos B y C, no pasará corriente por la resistencia de 5 Ω intercalada entre ellos. Por tanto, este conductor se comporta físicamente como si no existiera. El circuito queda como se representa en la figura 17.29 b. Se trata de una asociación mixta constituida por dos series asociadas en paralelo, siendo la resistencia de cada serie 20 Ω. Por tanto, la resistencia equivalente total será:

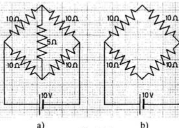


Fig. 17.29

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{20\ \Omega} = \frac{1}{10\ \Omega}$$

de donde:

$$\mathbf{R = 10\ \Omega}$$

La intensidad de corriente principal viene dada por:

$$I = \frac{10\ \text{V}}{10\ \Omega} = 1\ \text{A}$$

Esta corriente se bifurca por dos resistencias iguales de 20 Ω cada una. La intensidad de corriente que pasará por ellas es de 0,5 A.

Como estas resistencias de 20 Ω proceden de una asociación en serie de dos resistencias de 10 Ω, por cada resistencia asociada pasará la misma corriente que por la equivalente, es decir: 0.5 A.

Por las resistencias de 10 Ω pasan corrientes de 0,5 A. Por la resistencia de 5 Ω no pasará corriente.

17.58. *(*) Utilizando una resistencia patrón de (25,3 ± 0,1) Ω se consigue equilibrar el puente (fig. 17.30) cuando el cursor está situado en cualquier posición entre las divisiones 410 y 417 mm de un puente de 1 metro, estando la resistencia problema en su brazo izquierdo. ¿Cuál es el valor, escrito correctamente, de la resistencia medida?*

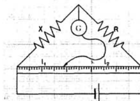


Fig. 17.30

Solución: De acuerdo con la ley que rige el puente de hilo:

$$X = R \cdot \frac{L_1}{L_2} \qquad [1]$$

Como:

$$L_1 = \frac{410\ \text{mm} + 417\ \text{mm}}{2} = 413\ \text{mm}; \quad L_1 = (413 \pm 4)\ \text{mm}$$

$$L_2 = 1\,000\ \text{mm} - 413\ \text{mm}; \quad L_2 = (587 \pm 4)\ \text{mm}$$

se deduce que:

$$X = 25{,}3\ \Omega \cdot \frac{413\ \text{mm}}{587\ \text{mm}} = 17{,}8\ \Omega$$

Tomando logaritmos neperianos en los dos miembros de la expresión [1], tenemos:

$$\ln X = \ln R + \ln L_1 - \ln L_2$$

Diferenciando, resulta:

$$\frac{dX}{X} = \frac{dR}{R} + \frac{dL_1}{L_1} - \frac{dL_2}{L_2}$$

Sustituyendo las diferenciales por los errores absolutos, se llega a:

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{\Delta L_2}{L_2} =$$

$$= \frac{0,1\ \Omega}{25,3\ \Omega} + \frac{4\ \text{mm}}{413\ \text{mm}} + \frac{4\ \text{mm}}{587\ \text{mm}} =$$

$$= 0,0039 + 0,0097 + 0,0068 = 0,02$$

De aquí que:

$$X = 0,02 \cdot 17,8\ \Omega = 0,356\ \Omega \simeq 0,4\ \Omega$$

Por tanto:

$$\boxed{X = (17,8 \pm 0,4)\ \Omega}$$

17.59. ***La resistencia de un galvanómetro es 20 Ω y la corriente necesaria para que se desvíe toda la escala es 25 mA.***

a) ***¿Cómo puede convertirse en un amperímetro, cuya escala completa indique 5 A? Calcular el valor del shunt necesario.***

b) ***¿Cómo puede convertirse en un voltímetro, cuya escala completa indique 150 V? Calcular el valor de la resistencia en serie necesaria.***

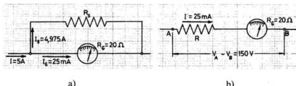


Fig. 17.31

Solución:

a) **Es necesario conectarle un shunt** (fig. 17.31 a). De acuerdo con la ley de las corrientes derivadas, su valor será:

$$R_s = \frac{I_G \cdot R_G}{I_s} = \frac{0,025\ \text{A} \cdot 20\ \Omega}{4,975\ \text{A}} = \boxed{0,1005\ \Omega}$$

O también, como:

$$n = \frac{I}{I_s} = \frac{5\ \text{A}}{25 \cdot 10^{-3}\ \text{A}} = 200$$

resulta:

$$R_s = \frac{R_G}{n-1} = \frac{20\ \Omega}{200-1} = \frac{20\ \Omega}{199} = \boxed{0{,}1005\ \Omega}$$

b) **Habrá que conectar una resistencia, R, en serie,** de manera que entre los puntos A y B la diferencia de potencial sea de 150 V cuando la aguja del galvanómetro se desvíe la escala completa (fig. 17.31 b). La intensidad de corriente que en ese momento circula por el galvanómetro es de 25 mA. Por lo tanto, aplicando la ley de Ohm, tenemos:

$$I = \frac{V_A - V_B}{R + R_G};\quad 0{,}025\ A = \frac{150\ V}{(R + 20)\ \Omega}$$

de donde:

$$\boxed{R = 5\,980\ \Omega}$$

17.60. *(*) En el circuito de la figura 17.32 se desea conocer experimentalmente la intensidad de corriente que circula, para lo cual disponemos de un amperímetro que, colocado adecuadamente nos da una corriente de 0,18 amperios.*

a) ¿Cuál es la resistencia interna del amperímetro?

b) ¿Cuál es el error en la apreciación de la intensidad que mide este amperímetro?

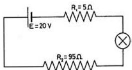


Fig. 17.32

Solución:

a) Aplicando a todo el circuito la ley de Ohm generalizada, tenemos:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R};\quad 0{,}18\ A = \frac{20\ V}{(5 + 95 + r)\ \Omega}$$

de donde:

$$\boxed{r = 11{,}11\ \Omega}$$

b) Si no estuviese intercalado el amperímetro, la intensidad de corriente sería:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{20\ V}{(5 + 95)\ \Omega} = 0{,}2\ A$$

Por tanto, el error absoluto será:

$$x_i = 0{,}18\ A - 0{,}2\ A = -0{,}02\ A \text{ (por defecto)}$$

y el error relativo:

$$x_{r_{rj}} = \frac{0{,}02\ A}{0{,}2\ A} \cdot 100 = \boxed{10\ \%}$$

17.61. *Una lámpara de incandescencia es alimentada a 110 V. En el circuito esta intercalado un amperímetro con escala de 0 a 2 amperios, dividida en divisiones de media décima de amperio. La resistencia del amperímetro es de 0,2 Ω y esta shuntado con una resistencia de 1/45 Ω (fig. 17.33).*

En funcionamiento normal, la aguja del amperímetro señala la cuarta división. Calcular:

a) La intensidad de corriente principal que pasa por la lámpara.
b) La resistencia de dicha lámpara.

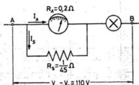


Fig. 17.33

Solución:

a) Ya que en funcionamiento normal la aguja del amperímetro señala la cuarta división, y cada una de estas divisiones equivale a media décima de amperio, la intensidad de corriente que atraviesa el amperímetro es $I_A = 0{,}2$ A.

De acuerdo con la ley de las corrientes derivadas, la intensidad que pasa por el shunt será:

$$I_s = \frac{I_A \cdot R_A}{R_s} = \frac{0{,}2\ A \cdot 0{,}2\ \Omega}{1/45\ \Omega} = 1{,}8\ A$$

y la intensidad principal en el circuito (fig. 17.33), que será la que pasa por la lámpara, tendrá de valor:

$$I = I_A + I_s = 0{,}2\ A + 1{,}8\ A = \boxed{2\ A}$$

b) Aplicando la ley de Ohm entre los puntos A y B y considerando como despreciable la resistencia del amperímetro shuntado (0,02 Ω), tenemos:

$$2\ A = \frac{110\ V}{R}$$

de donde:

$$\boxed{R = 55\ \Omega}$$

17.62. *Un amperímetro señala 15 A al conectarlo a una cierta diferencia de potencial. Si se vuelve a conectar a la misma diferencia de potencial, tras intercalar en serie con él una resistencia de 20 Ω, el amperímetro señala 3 A. ¿Cuál es la resistencia del amperímetro y la diferencia de potencial a la que se conecta?*

Solución: Aplicando la ley de Ohm en ambos casos, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 - V_2 = 15\ \text{A} \cdot \text{R} \\ V_1 - V_2 = 3\ \text{A} \cdot (\text{R} + 20)\ \Omega \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones, resulta:

$$\boxed{\mathbf{R = 5\ \Omega;\quad V_1 - V_2 = 75\ V}}$$

17.63. *Un voltímetro de 150 V tiene una resistencia de 10 000 Ω. Si le conectamos en serie con una resistencia R a una línea de 220 V, el voltímetro señala 5 V. Calcular el valor de la resistencia R.*

Solución: Para que el voltímetro de 150 V se desvíe la escala completa tendrá que circular por él una corriente de intensidad:

$$I = \frac{150\ \text{V}}{10\ 000\ \Omega} = 0{,}015\ \text{A}$$

Cuando el voltímetro señala 5 V la intensidad será:

$$I = \frac{5\ \text{V}}{10\ 000\ \Omega} = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{A}$$

Por consiguiente, aplicando la ley de Ohm, tenemos:

$$5 \cdot 10^{-4}\ \text{A} = \frac{220\ \text{V}}{(\text{R} + 10\ 000)\ \Omega}$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{R = 430\ 000\ \Omega}}$$

17.64. *Dos voltímetros de 150 V, uno de 20 000 Ω y otro de 180 000 Ω de resistencia, se conectan en serie a una línea de corriente continua de 120 V. Calcular la indicación de cada voltímetro.*

Solución: La resistencia equivalente entre A y C (véase fig. 17.34) es:

$$\text{R} = 20\ 000\ \Omega + 180\ 000\ \Omega = 200\ 000\ \Omega$$

y la intensidad de corriente que circula entre ambos puntos:

$$I = \frac{V_A - V_C}{\text{R}} = \frac{120\ \text{V}}{200\ 000\ \Omega} = 6 \cdot 10^{-4}\ \text{A}$$

El primer voltímetro indicará:

$$V_1 = 6 \cdot 10^{-4}\ A \cdot 2 \cdot 10^4\ \Omega = \boxed{\mathbf{12\ V}}$$

y el segundo:

$$V_2 = 6 \cdot 10^{-4}\ A \cdot 18 \cdot 10^4\ \Omega = \boxed{\mathbf{108\ V}}$$

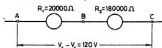


Fig. 17.34

17.65. ***Queremos medir la fuerza electromotriz de una pila seca mediante un potenciómetro. Una pila patrón de fuerza electromotriz 1,2 V deja la aguja del galvanómetro en cero cuando entre sus polos quedan comprendidos 30 cm de resistencia. La pila seca produce el equilibrio cuando la resistencia comprendida entre sus polos es de 45 cm. Calcular la fuerza electromotriz de la pila.***

Solución:

$$E = E_p \cdot \frac{l}{l'} = 1{,}2\ V \cdot \frac{45\ cm}{30\ cm} = \boxed{\mathbf{1{,}8\ V}}$$

18. ELECTROMAGNETISMO

FORMULARIO-RESUMEN	
FLUJO MAGNÉTICO A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE	
$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \varphi$	B = inducción magnética. S = superficie. φ = ángulo que forma el campo con la normal a la superficie.
Fuerza ejercida por un campo magnético de inducción $\vec{B}$ sobre:	una carga móvil: $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B})$ (fuerza de Lorentz).
	una corriente rectilínea: $\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \wedge \vec{B})$ (primera ley de Laplace)
	una corriente rectangular o circular: $\vec{M}$ (momento) $= I \cdot (\vec{S} \wedge \vec{B})$
	una bobina: $\vec{M} = N \cdot I \cdot (\vec{S} \wedge \vec{B}) = \vec{m} \wedge \vec{B}$ ($\vec{m} = N \cdot I \cdot \vec{S}$ = momento magnético de la bobina).
Campo magnético creado por:	una carga elemental móvil a una distancia r: $d\vec{B} = k \cdot \frac{dq\,(\vec{v} \wedge \vec{r})}{r^3}$; $\left(k = \frac{\mu}{4\pi}\right)$
	un elemento de corriente: $d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot (d\vec{l} \wedge \vec{r})}{r^3}$

<table>
<tr><td rowspan="7">Campo magnético creado por:</td><td colspan="2">una corriente rectilínea:
$$B = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{s} \quad \text{(ley de Biot y Savart)}$$
(s = distancia del punto considerado a la corriente).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">una espira circular de radio r</td><td>En su centro: $B = \mu \cdot \frac{I}{2r}$</td></tr>
<tr><td>En un punto del eje: $B = \mu \cdot \frac{I \cdot r^2}{2\,(r^2 + b^2)^{3/2}}$
(b = distancia del punto al centro de la espira).</td></tr>
<tr><td colspan="2">una bobina en un punto del eje:
$$B = \mu \cdot \frac{I \cdot r^2}{2\,(r^2 + b^2)^{3/2}} \cdot N$$
(N = número de espiras de la bobina).</td></tr>
<tr><td colspan="2">un solenoide: $B = \mu \cdot \frac{I \cdot N}{l}$ $\left\{\begin{array}{l} N = \text{número de espiras.} \\ l = \text{longitud del solenoide.} \end{array}\right.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si el medio es el vacío, $\mu = \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}\ N \cdot A^{-2}$.</td></tr>
</table>

ACCIONES MUTUAS ENTRE CORRIENTES

$$F = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{d} \cdot l \quad \left\{\begin{array}{ll} I_1 \text{ e } I_2 & = \text{intensidades en los conductores.} \\ d & = \text{distancia entre los conductores.} \\ l & = \text{longitud de los conductores.} \end{array}\right.$$

18. ELECTROMAGNETISMO

18.1. *¿Qué son imanes naturales y artificiales? ¿Cuándo un imán es permanente y cuándo temporal? Citar una aplicación de cada uno de ellos.*

Solución: Imanes naturales son aquellas sustancias que presentan, por su naturaleza, propiedades magnéticas. Ejemplo: la magnetita (óxido ferroso férrico).

Imanes artificiales son aquellas sustancias que poseen propiedades magnéticas debido a la manipulación del hombre sobre ellas. Ejemplo: el acero imantado.

Un imán es permanente cuando presenta propiedades magnéticas durante un intervalo de tiempo muy grande. Ejemplos: la magnetita, el acero imantado, etc.

Por el contrario, los imanes temporales sólo manifiestan propiedades magnéticas mientras actúa la causa que los imana. Por ejemplo, el hierro dulce únicamene se comporta como imán mientras pasa corriente a través de una bobina que lo envuelve.

Los imanes permanentes se emplean en dinamos, altavoces, platos magnéticos de motocicletas...; los temporales, en la construcción de timbres eléctricos, circuitos de alarma, telegrafía...

18.2. *¿Cómo se podría demostrar, sin tocarlo, que por un conductor circula una corriente?*

Solución: Basta colocar paralelamente a él una aguja magnética. En el caso de que pase corriente por el conductor se producirá una desviación de la aguja magnética según la regla de Oersted.

18.3. *¿Qué le ocurrirá a un muelle si es recorrido por una corriente de gran intensidad?*

Solución: Debido al campo magnético que crea cada una de las espiras, se producirá una atracción entre ellas y tenderán a aproximarse unas a otras.

18.4. *¿En qué se diferencian esencialmente un amperímetro y un voltímetro?*

Solución: El amperímetro es un aparato destinado a medir la intensidad de corriente. Por eso, por ellos debe pasar toda la corriente cuya intensidad se pretende medir y, con objeto de evitar que se calienten, el hilo de la bobina que los constituye debe ser de poca resistencia. Por tanto, ha de ser corto y grueso. Los amperímetros se montan en serie con el circuito.

Los voltímetros son aparatos destinados a medir diferencias de potencial. Por ellos no interesa que pase toda la corriente, sino una fracción muy pequeña de la misma. Por eso se montan en derivación con la resistencia cuya tensión en sus extremos se desea medir. Con objeto de que por el voltímetro pase una corriente de intensidad muy pequeña, su resistencia interior ha de ser grande; de ahí que el hilo que la constituye sea largo y fino.

En la figura 18.1 se muestra un esquema de montaje de un amperímetro y de un voltímetro en un circuito.

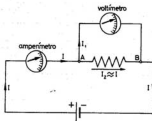


Fig. 18.1

18.5. *¿Cómo se podría transformar un amperímetro en un voltímetro?*

Solución: Todo amperímetro puede ser transformado en voltímetro con sólo añadirle en serie con su resistencia interior otra resistencia exterior, que habrá de ser tanto mayor cuanto mayor sea la escala de medición que se desea obtener (véase fig. 18.2). Si el amperímetro va provisto de un shunt en derivación, debe quitársele previamente.

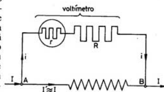


Fig. 18.2

18.6. *¿Qué explicación física tiene el hecho de que al someter una barra de acero a la acción de un campo magnético se obtenga un imán permanente?*

Solución: Una sustancia no imantada se comporta como si estuviera constituida por pequeños campos magnéticos —originados por los movimientos de electrones al girar alrededor del núcleo y también sobre sí mismos— distribuidos al azar.

Sometiendo estos pequeños imanes a la acción de un campo magnético exterior fuerte, se producirá una orientación de los mismos, en cuyo caso la sustancia adquiere propiedades magnéticas (imanes artificiales).

Si esta orientación de los diminutos imanes es permanente —caso del acero imantado—, el imán obtenido se denomina permanente.

18.7. *La inducción de un campo magnético es 10 T. ¿Qué flujo atravesará una superficie de 50 cm² en los siguientes casos: a) el campo es perpendicular a la superficie; b) el campo y la normal a la superficie forman un ángulo de 60°.*

Solución: En el primer caso:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\varphi = 10\ T \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ m^2 \cdot 1 = \boxed{5 \cdot 10^{-2}\ Wb}$$

y en el segundo:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \varphi = 10 \text{ T} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{2{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}}$$

18.8. ***Un electrón penetra en un campo magnético de inducción 100 Wb/m² con una velocidad de 10⁵ m/s, de modo que forma un ángulo de 30° con la dirección del campo. Deduce el radio de la órbita que describe el electrón.***

Solución: La fuerza que actúa sobre el electrón en movimiento, al ser perpendicular a la dirección de la velocidad, es una **fuerza centrípeta.**
Su valor será:

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } \varphi = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

De donde:

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B \cdot \text{sen } \varphi} = \frac{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 10^5 \text{ m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 100 \text{ T} \cdot 0{,}5} = \boxed{1{,}125 \cdot 10^{-8} \text{ m}}$$

18.9. ***Un electrón parte del reposo y es acelerado por una diferencia de potencial de 100 V. Si, con la velocidad que adquiere, penetra en un campo magnético perpendicularmente a la dirección del campo, ¿qué radio de órbita describirá? El campo tiene una inducción de 5 gauss.***

Solución: La energía que adquiere el electrón al ser sometido a la acción de un campo eléctrico viene dada por la expresión:

$$E_c = q \cdot (V_a - V_b) = \frac{1}{2} mv^2$$

Por tanto:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot (V_a - V_b)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot 100 \text{ V}}{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} =$$

$$= 0{,}597 \cdot 10^7 \text{ m/s} \simeq 6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Procediendo como en el caso anterior, se obtendría para el radio de la órbita el valor de:

$$\boxed{r = 6{,}75 \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$

18.10. ***Un electrón penetra en un campo magnético de inducción B = 0,02 T perpendicularmente a las líneas de inducción. ¿Qué fuerza actúa sobre él si su velocidad es de 1 500 m/s?***

Solución:

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } \varphi = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3 \text{ m/s} \cdot 0{,}02 \text{ T} \cdot 1 =$$

$$= \boxed{4{,}8 \cdot 10^{-18} \text{ N}}$$

18.11. *Un haz de electrones penetra en un campo magnético de inducción 0,005 T en dirección perpendicular a las líneas del campo. La fuerza con que éste actúa sobre cada electrón le obliga a describir una trayectoria circular. ¿Cuál es el radio de la trayectoria descrita por cada electrón del haz, si su velocidad es $48 \cdot 10^6$ m/s?*

Solución:

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B \cdot \text{sen}\,\varphi} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 48 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ \text{T} \cdot 1} = \boxed{5{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}$$

18.12. *Al penetrar un electrón en un campo magnético, actúa sobre él una fuerza que le obliga a describir una trayectoria circular. ¿Qué velocidad deberá poseer un electrón para que al penetrar perpendicularmente a las líneas de inducción de un campo magnético de 0,001 miriagauss describa una circunferencia de 2 cm de radio?*

Solución: Los datos del problema, expresados en unidades del Sistema Internacional, son:

$$q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C};\quad B = 10^{-3}\ \text{T}$$
$$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg};\quad r = 2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

Por tanto:

$$v = \frac{q \cdot B \cdot r \cdot \text{sen}\,\varphi}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 10^{-3}\ \text{T} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot 1}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} =$$
$$= \boxed{3{,}5 \cdot 10^{6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

18.13. *(*) Un protón con una energía cinética de 1 MeV se mueve perpendicularmente a un campo magnético de 1,5 T. Calcúlese la fuerza que actúa sobre esta partícula.*
Masa del protón: $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ ***kg.***
Carga del protón: $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ ***C.***

Solución: La velocidad de la partícula vendrá dada por la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{6}\ \text{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}} = 1{,}38 \cdot 10^{7}\ \text{m/s}$$

El valor de la fuerza que actúa sobre el protón viene dado por:

$$F = q \cdot v \cdot B = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{7}\ \text{m/s} \cdot 1{,}5\ \text{T} =$$
$$= \boxed{3{,}3 \cdot 10^{-12}\ \text{N}}$$

18.14. *Una carga positiva de 5 microculombios se mueve con una velocidad dada por la expresión:*

$$\vec{v} = 5\,\vec{i} - 5\,\vec{k} \quad (SI)$$

en el interior de un campo magnético:

$$\vec{B} = \vec{i} + 2\,\vec{j} - \vec{k} \quad (SI)$$

Deducir la fuerza que actúa sobre dicha carga.

Solución: Según la ley de Lorentz, el vector fuerza con que el campo actúa sobre la carga viene dado por $\vec{F} = q\,(\vec{v} \wedge \vec{B})$.

Por tanto:

$$\vec{F} = 5 \cdot 10^{-6} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10^{-6}\,(10\,\vec{i} + 10\,\vec{k}) =$$

$$= \boxed{5 \cdot 10^{-5}\,\vec{i} + 5 \cdot 10^{-5}\,\vec{k} \quad (SI)}$$

18.15. *Por un conductor recto, dirigido a lo largo del eje OY, circula en el sentido positivo del citado eje una intensidad de corriente de 20 A.*

Calcular la fuerza que el campo magnético $\vec{B} = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{k}$ (SI) ejerce, por unidad de longitud, sobre dicho conductor.

Solución: De acuerdo con la ley de Laplace, tenemos que:

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \wedge \vec{B}) = 20 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 20 \cdot (3\,\vec{i} - 2\,\vec{k}) = \boxed{60\,\vec{i} - 40\,\vec{k} \quad (SI)}$$

18.16. *La inducción de un campo magnético es $B = 8 \cdot 10^{-5}$ T. ¿Con qué fuerza actuará este campo sobre un alambre conductor de longitud 20 cm, situado perpendicularmente a la dirección del campo, por el que circula una corriente de 10 A?*

Solución:

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \text{sen}\,\varphi = 10\ \text{A} \cdot 0{,}2\ \text{m} \cdot 8 \cdot 10^{-5}\ \text{T} \cdot 1 = \boxed{1{,}6 \cdot 10^{-4}\ \text{N}}$$

18.17. *La energía cinética de un electrón vale $6 \cdot 10^{-16}$ J. Dicho electrón penetra perpendicularmente a las líneas de inducción en un campo magnético cuyo valor de B es 0,004 T. ¿Cuánto mide el radio de la trayectoria que describe?*

Solución: La velocidad del electrón vendrá dada por:

$$v = \sqrt{\frac{2\,E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \cdot 10^{-16}\ \text{J}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 3{,}63 \cdot 10^{7}\ \text{m/s}$$

El radio de la trayectoria descrita por el electrón será:

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B \cdot \text{sen } \varphi} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 3,63 \cdot 10^7\ \text{m/s}}{1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ \text{T} \cdot 1} = \boxed{5,16 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}$$

18.18. ***Un protón, inicialmente en reposo, es acelerado a través de una diferencia de potencial de 8 · 10⁶ V, penetrando luego en dirección perpendicular en un campo magnético uniforme de 0,4 T. Calcular:***

a) La velocidad del protón al llegar al campo magnético.
b) El radio de la órbita descrita por el protón.
c) El tiempo que invierte el protón en recorrer una órbita completa.

Solución:

a) El campo eléctrico comunica al protón una energía:

$$E_c = q \cdot \Delta V$$

siendo ΔV la diferencia de potencial y q la carga del protón. De acuerdo con el teorema de las fuerzas vivas, podemos escribir:

$$q \cdot \Delta V = \frac{1}{2}\ m \cdot v^2$$

de donde:

$$v = \sqrt{\frac{2\ q \cdot \Delta V}{m}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 8 \cdot 10^6\ \text{V}}{1,67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}} = \boxed{3,9 \cdot 10^7\ \text{m/s}}$$

Nota: Prescindimos de la variación relativista de la masa del protón con la velocidad.

b) Cuando el protón penetra en el campo magnético, en dirección perpendicular a él, se ve sometido a la fuerza de Lorentz, que le obliga a describir una trayectoria circular. Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene:

$$q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } \varphi = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

de donde:

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B \cdot \text{sen } \varphi} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 3,9 \cdot 10^7\ \text{m/s}}{1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0,4\ \text{T} \cdot 1} = \boxed{1,01\ \text{m}}$$

c) El tiempo que tarda el protón en describir una orbita (período) es:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot 1,01\ \text{m}}{3,9 \cdot 10^7\ \text{m/s}} = \boxed{1,63 \cdot 10^{-7}\ \text{s}}$$

18.19. *En un mismo punto de un campo magnético $\vec{B}$ dejamos en libertad un protón y un electrón, dotados ambos de la misma velocidad, perpendicular a las líneas del campo.*

Deducir la relación existente:

a) Entre los radios de las órbitas que describen.
b) Entre los periodos de las mismas.

Solución:

a) Los radios de las órbitas descritas por el protón y el electrón son, respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} r_p &= \frac{m_p \cdot v_p}{q_p \cdot B} \\ r_e &= \frac{m_e \cdot v_e}{q_e \cdot B} \end{aligned}\right\}$$

Dividiendo ambas expresiones, teniendo en cuenta, además, que las cargas y velocidades de ambas partículas son idénticas, resulta:

$$\boxed{\frac{r_p}{r_e} = \frac{m_p}{m_e} = 1\,836}$$

b) Los períodos de las órbitas son:

$$\left.\begin{aligned} T_p &= \frac{2\pi \cdot r_p}{v_p} \\ T_e &= \frac{2\pi \cdot r_e}{v_e} \end{aligned}\right\}$$

Por división se obtiene:

$$\boxed{\frac{T_p}{T_e} = \frac{r_p}{r_e} = 1\,836}$$

18.20. *Deducir el valor de la fuerza que actúa sobre un protón que se mueve con una velocidad de $2 \cdot 10^6$ m/s en el sentido positivo del eje OY, en el interior de un campo magnético de 4 T dirigido en el sentido negativo del eje OX. ¿Cuál sería esa fuerza si en vez de un protón fuese un electrón el que se moviera?*

Solución: En el primer caso la fuerza que actúa sobre el protón, dado que $\vec{v} = 2 \cdot 10^6\ \vec{j}$ y $\vec{B} = -4\ \vec{i}$, será:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \wedge \vec{B}) = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 \cdot 10^6 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{1{,}28 \cdot 10^{-12}\ \vec{k}\ \text{(N)}}$$

Si se trata de un electrón:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \wedge \vec{B}) = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 \cdot 10^{6} & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-1{,}28 \cdot 10^{-12}\ \vec{k}\ (N)}$$

18.21. ***Dos partículas de cargas iguales y signos contrarios se lanzan desde dos puntos distintos, con velocidades diferentes, paralelas entre sí y del mismo sentido, en dirección normal a un campo magnético uniforme. Ambas partículas se encuentran, tras haber girado 90° la primera y 150° la segunda. Calcular:***

a) La relación entre los radios de las órbitas descritas por las dos partículas.
b) La relación entre sus velocidades.
c) La relación entre sus masas.

Solución:

a) La observación de la figura 18.3 conduce a la conclusión:

$$\frac{R_1}{R_2} = \text{sen } 30^\circ = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Ya que en el mismo tiempo la primera partícula describe un arco de 90° y la segunda de 150°, tenemos:

$$\omega_1 = \frac{90^\circ}{t}\ ;\ \omega_2 = \frac{150^\circ}{t}$$

de donde se obtiene:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{90^\circ}{150^\circ} = \frac{3}{5}$$

Por lo tanto:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_1 \cdot R_1}{\omega_2 \cdot R_2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = $$

$$= \boxed{\frac{3}{10}}$$

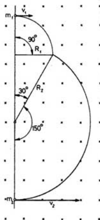


Fig. 18.3

c) Cuando una partícula cargada se mueve perpendicularmente a la dirección de un campo magnético uniforme, la fuerza de Lorentz le obliga a describir una trayectoria circular, cumpliéndose, en virtud de la segunda ley de Newton, que:

$$q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

de donde se deduce, por simplificación:

$$m \cdot v = q \cdot B \cdot R$$

Para la primera partícula:

$$m_1 \cdot v_1 = q \cdot B \cdot R_1$$

y para la segunda:

$$m_2 \cdot v_2 = q \cdot B \cdot R_2$$

Por lo tanto:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

18.22. ***La espira rectangular de la figura 18.4, cuyas dimensiones son: $l = 10$ cm y $l' = 8$ cm, y por la que circula una corriente de 20 A en el sentido que indican las flechas, puede girar alrededor del eje OZ, en el interior del campo magnético uniforme:***

$$\vec{B} = 0{,}4\,\vec{j} \text{ (SI)}$$

a) Calcular las fuerzas que el campo magnético ejerce sobre cada lado de la espira, así como el momento necesario para mantenerla en la posición indicada.

b) Ídem, cuando el campo magnético es: $\vec{B} = 0{,}4\,\vec{i}$ (SI).

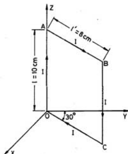


Fig. 18.4

Solución:

a) Designemos por $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$ las fuerzas que actúan sobre los lados OA, AB, BC y CO, respectivamente. De acuerdo con la segunda ley de Laplace, tenemos:

$$\vec{F}_1 = I \cdot (\vec{l} \wedge \vec{B}) = 20 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-0{,}8\,\vec{i} \text{ (SI)}}$$

$$\vec{F}_2 = I \cdot (\vec{l}' \wedge \vec{B}) = 20 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}04 & 0{,}04\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{0{,}32\,\vec{k} \text{ (SI)}}$$

$$\vec{F}_3 = I \cdot (\vec{l} \wedge \vec{B}) = 20 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{0{,}8\ \vec{i}\ (SI)}}$$

$$\vec{F}_4 = I \cdot (\vec{l'} \wedge \vec{B}) = 20 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0{,}04 & -0{,}04\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{-0{,}32\ \vec{k}\ (SI)}}$$

Estas cuatro fuerzas aparecen representadas en la figura 18.5. Puede observarse que $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_4$ tienen igual módulo y dirección, pero sentidos contrarios, anulándose mutuamente. Por otra parte, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_3$ constituyen un par de fuerzas, cuyo momento es:

$$\vec{M} = I \cdot (\vec{S} \wedge \vec{B}) = 20 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4\sqrt{3} \cdot 10^{-3} & 4 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{-3{,}2\ \sqrt{3} \cdot 10^{-2}\ \vec{k}\ (SI)}$$

El momento necesario para mantener la espira en la posición indicada será el opuesto al anterior:

$$\boxed{\mathbf{\vec{M}' = -\vec{M} = 3{,}2\sqrt{3} \cdot 10^{-2}\ \vec{k}\ (SI)}}$$

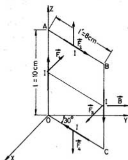


Fig. 18.5

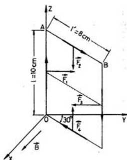


Fig. 18.6

b) Análogamente al caso anterior, las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$ (véase fig. 18.6) valen:

$$\vec{F}_1 = I \cdot (\vec{l} \wedge \vec{B}) = 20 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{0{,}8\ \vec{j}\ (SI)}}$$

$$\vec{F}_2 = I \cdot (\vec{l}' \wedge \vec{B}) = 20 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}04 & 0{,}04\sqrt{3} & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-0{,}32\sqrt{3}\,\vec{k}\ \text{(SI)}}$$

$$\vec{F}_3 = I \cdot (\vec{l} \wedge \vec{B}) = 20 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -0{,}1 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-0{,}8\,\vec{j}\ \text{(SI)}}$$

$$\vec{F}_4 = I \cdot (\vec{l}' \wedge \vec{B}) = 20 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0{,}04 & -0{,}04\sqrt{3} & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{0{,}32\sqrt{3}\,\vec{k}\ \text{(SI)}}$$

Hallemos, por último, el momento necesario para mantener la espira en la posición indicada:

$$\vec{M} = -I \cdot (\vec{S} \wedge \vec{B}) = -20 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4\sqrt{3} \cdot 10^{-3} & 4 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \boxed{0{,}032\,\vec{k}\ \text{(SI)}}$$

18.23. *Calcular la fuerza que ejerce sobre un conductor rectilíneo de 0,15 m de longitud, un campo magnético perpendicular a él, de inducción 1,2 · 10⁻⁴ T, siendo 5 A la intensidad de corriente que circula por el conductor.*

Solución: De acuerdo con la ley de Laplace:

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \operatorname{sen} \alpha = 5\ \text{A} \cdot 0{,}15\ \text{m} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{T} \cdot 1 = \boxed{9 \cdot 10^{-5}\ \text{N}}$$

18.24. *Un núcleo de helio penetra en un campo magnético de inducción 1,2 T con una velocidad perpendicular al campo de 25 · 10⁴ m/s. ¿Qué fuerza actúa sobre él?*

Solución: La carga del núcleo de helio es: $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C. Por tanto:

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \operatorname{sen} \alpha = 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 25 \cdot 10^4\ \text{m/s} \cdot 1{,}2\ \text{T} \cdot 1 =$$

$$= \boxed{9{,}6 \cdot 10^{-14}\ \text{N}}$$

18.25. ***Deducir el momento del par que actúa sobre un conductor rectangular colocado verticalmente en un campo magnético horizontal, en las siguientes condiciones: a) el conductor mide 12 cm de alto por 10 cm de ancho; b) la intensidad de la corriente que circula por él es 4 A; c) la inducción del campo vale 0,5 T.***

Solución: Aunque no se especifica en el enunciado del problema, consideraremos que la normal a la superficie delimitada por el conductor es perperpendicular a la dirección del campo.

Como:

$$S = 12\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm} = 120\ \text{cm}^2 = 1{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2$$

resulta:

$$M = I \cdot B \cdot S \cdot \text{sen}\ \alpha = 4\ \text{A} \cdot 0{,}5\ \text{T} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2 \cdot 1 =$$

$$= \boxed{2{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{N} \cdot \text{m}}$$

18.26. *(*) La bobina móvil de un galvanómetro tiene una superficie de 4 cm^2 y 200 espiras. En cualquier posición de la bobina, el campo magnético de 0,01 T se encuentra en su plano. La constante de torsión del hilo del que se suspende la bobina vale 10^{-7} N · m · grado^{-1}. Calcúlese la intensidad de corriente que corresponde a un giro de la bobina de 5°.*

Solución: El momento del par de fuerzas que actúa sobre la bobina es:

$$M = N \cdot I \cdot B \cdot S \cdot \text{sen}\ \alpha$$

siendo N el número de espiras de la bobina, I la intensidad de corriente que circula por ella, B la inducción magnética del campo, S la superficie de la bobina y α el ángulo que forma la normal a la bobina con la dirección del campo (en el caso del problema, $\alpha = 90°$).

La bobina gira hasta que el par de torsión del hilo de suspensión:

$$M_r = K \cdot \theta$$

(K es la constante de torsión del hilo y θ el ángulo girado) se haga igual al momento del par actuante. Se cumplirá entonces que:

$$N \cdot I \cdot B \cdot S \cdot \text{sen}\ \alpha = K \cdot \theta$$

de donde:

$$I = \frac{K \cdot \theta}{N \cdot B \cdot S \cdot \text{sen}\ \alpha} = \frac{10^{-7}\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{grado}^{-1} \cdot 5°}{200 \cdot 0{,}01\ \text{T} \cdot 4 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \cdot 1} = \boxed{6{,}25 \cdot 10^{-4}\ \text{A}}$$

18.27. *Con un voltímetro de resistencia interior 1 000 ohmios y escala 0-10 V se desea medir una diferencia de potencial de 65 V. ¿Qué resistencia en serie deberá acoplarse para ello?*

Solución: Con objeto de hacer medidas lo más directas posible, intentaremos ampliar la escala de medida del voltímetro de 0 a 100 V. De este modo, bastará multiplicar por 10 la diferencia de potencial señalada por el voltímetro para conocer la diferencia de potencial total.

El voltímetro dado puede admitir una intensidad máxima de corriente de 0,01 A (I = V/R = 10 V/1 000 Ω = 0,01 A). Si hacemos que la tensión sea 100 V, es decir, 10 veces mayor, la resistencia total del aparato habrá de ser 10 veces mayor que la inicial, con el fin de que se siga manteniendo la misma intensidad. Por tanto, la resistencia total del voltímetro habrá de ser de 10 000 ohmios.

Como inicialmente ya tenía una resistencia de 1 000 ohmios, habrá que añadirle en serie otra resistencia de **9 000 ohmios.**

En efecto: si queremos medir una diferencia de potencial de 65 V, tendremos:

a) Intensidad de corriente:

$$I = \frac{65\ V}{10\ 000\ \Omega} = 65 \cdot 10^{-4}\ A$$

b) Diferencia de potencial en la resistencia exterior:

$$V = I \cdot R = 65 \cdot 10^{-4}\ A \cdot 9 \cdot 10^{3}\ \Omega = 58{,}5\ V$$

c) Diferencia de potencial en la resistencia interior:

$$V = 65 \cdot 10^{-4}\ A \cdot 1\ 000\ \Omega = 6{,}5\ V$$

d) Diferencia de potencial total = 58,5 V + 6,5 V = 65 V.

18.28. *Un voltímetro de 250 V tiene una resistencia de 30 000 Ω. Si se conecta en serie con una resistencia X a una línea de 125 V, señala una tensión de 12,5 V. ¿Cuál es el valor de esa resistencia? ¿Cuánto vale la intensidad de la corriente? ¿Qué potencia consume?*

Solución: La intensidad de corriente que pasa por el voltímetro y, por tanto, por la resistencia X, será:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12{,}5\ V}{30\ 000\ \Omega} = \frac{125}{3} \cdot 10^{-5}\ A = \boxed{\mathbf{4{,}17 \cdot 10^{-4}\ A}}$$

La diferencia de potencial en los extremos de la resistencia X valdrá:

$$V_x = 125\ V - 12{,}5\ V = 112{,}5\ V$$

y el valor de esta resistencia será:

$$R = \frac{V_x}{I} = \frac{112{,}5\ V}{\frac{125}{3} \cdot 10^{-5}\ A} = \boxed{\mathbf{2{,}7 \cdot 10^{5}\ \Omega}}$$

La potencia que consume el voltímetro en las condiciones exigidas por el problema será:

$$P = I \cdot (V_a - V_b) = \frac{125}{3} \cdot 10^{-5}\ A \cdot 12{,}5\ V = \boxed{\mathbf{5{,}2 \cdot 10^{-3}\ W}}$$

18.29. *El electrón existente en la corteza de un átomo de hidrógeno describe en su giro alrededor del núcleo una órbita circular de radio 0,53 Å, con una velocidad de 2,2 · 10⁶ m/s. Calcúlese la inducción magnética en el centro de la órbita.*

Solución: La longitud recorrida por el electrón será:

$$s = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}53 \cdot 10^{-10}\ \text{m} = 1{,}06\ \pi \cdot 10^{-10}\ \text{m}$$

y el tiempo empleado en recorrer la órbita, supuesto uniforme el movimiento:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1{,}06\ \pi \cdot 10^{-10}\ \text{m}}{2{,}2 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}} = 1{,}51 \cdot 10^{-16}\ \text{s}$$

La intensidad de corriente valdrá:

$$I = \frac{q}{t} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}{1{,}51 \cdot 10^{-16}\ \text{s}} = 1{,}06 \cdot 10^{-3}\ \text{A}$$

Y el valor del campo será:

$$B = \mu_o \cdot \frac{I}{2r} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{N} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \frac{1{,}06 \cdot 10^{-3}\ \text{A}}{2 \cdot 0{,}53 \cdot 10^{-10}\ \text{m}} = \boxed{\mathbf{12{,}57\ T}}$$

18.30. *Una bobina circular plana, de 20 espiras, tiene un radio de 10 cm. ¿Qué intensidad de corriente debe circular por ella para que la inducción magnética en su centro valga 2 · 10⁻⁴ T?*

Solución: Si la expresión general:

$$B = \mu_o \cdot \frac{I}{2r} \cdot N$$

despejamos I, se tiene:

$$I = \frac{2\ B \cdot r}{\mu_o \cdot N}$$

Sustituyendo valores:

$$I = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}\ \text{T} \cdot 10^{-1}\ \text{m}}{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{N} \cdot \text{A}^{-2} \cdot 20} = \boxed{\mathbf{1{,}6\ A}}$$

18.31. *Calcular el campo magnético creado por un hilo de 3 m de longitud por el que circula una corriente de 100 A, en un punto situado a 1 cm del hilo.*

Solución:

$$B = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{I}{s} = 2 \cdot 10^{-7}\ \text{N} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \frac{100\ \text{A}}{10^{-2}\ \text{m}} = \boxed{\mathbf{2 \cdot 10^{-3}\ T}}$$

18.32. *(*) Calcúlese el campo magnético en el centro de una espira cuadrada, en el vacío, de lado a, por la que circula una corriente eléctrica de intensidad I.*

Solución: Consideremos, en principio, uno de los lados de dicha espira. El campo magnético, dB, que un elemento infinitesimal, dl, crea en el centro de la espira (véase fig. 18.7) viene dado por:

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \operatorname{sen}\theta}{r^2} \qquad [1]$$

Se deduce de la consideración de la figura que:

$$r = \frac{a}{2\operatorname{sen}\theta}; \quad l = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\theta$$

$$dl = -\frac{a \cdot d\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión [1], tenemos:

$$dB = -\frac{\mu_o}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\frac{a^2}{4\operatorname{sen}^2\theta}} \cdot$$

$$\cdot \frac{a \cdot d\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta} = -\frac{\mu_o \cdot I}{2\pi \cdot a}\operatorname{sen}\theta \cdot d\theta \quad [2]$$

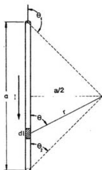


Fig. 18.7

El campo magnético creado por un lado entero de la espira se obtiene integrando la expresión [2] entre los límites $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$ y $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$.

$$B = -\frac{\mu_o \cdot I}{2\pi \cdot a}\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\operatorname{sen}\theta \cdot d\theta = -\frac{\mu_o \cdot I}{2\pi \cdot a}\left[-\cos\theta\right]_{3\pi/4}^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\mu_o \cdot I}{2\pi \cdot a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\mu_o \cdot I}{\pi \cdot a}$$

Los otros tres lados de la espira dan lugar, en el centro, a campos magnéticos de igual módulo que el que acabamos de considerar y, de acuerdo con la regla de la mano derecha, de la misma dirección y sentido. Por tanto, el campo magnético total valdrá:

$$\mathbf{B_T = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\mu_o \cdot I}{\pi \cdot a}}$$

18.33. *a) Por el conductor infinitamente largo, AB, de la figura 18.8 circula una corriente de intensidad I. Determinar el flujo magnético que atraviesa la superficie rectangular CDEF.*

b) Particularizar la expresión anterior al caso en el que I valga 20 A; l = 20 cm.; a = 5 cm y b = 20 cm.

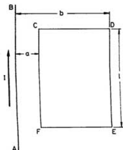


Fig. 18.8

Solución:

a) Aislemos, conforme se puede apreciar en la figura 18.9, una franja elemental de la superficie rectangular, de grosor dx, paralela al conductor AB y a una distancia x de él. De acuerdo con la ley de Biot y Savart, la inducción magnética en un punto cualquiera de dicha franja vale:

$$B = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{I}{x}$$

siendo su dirección perpendicular a la superficie y dirigida hacia dentro.

El flujo total que atraviesa la franja aislada es:

$$d\Phi = B \cdot ds = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot I \cdot l \cdot \frac{dx}{x} \qquad [1]$$

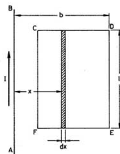


Fig. 18.9

El flujo total a través de la superficie rectangular se obtendrá integrando la expresión [1] entre los valores x = a y x = b.

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu_o}{2\pi}\, I \cdot l \int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o}{2\pi}\, I \cdot l \cdot \ln\, \frac{b}{a}$$

$$\boxed{\Phi = \frac{\mu_o}{2\pi}\, I \cdot l \cdot \ln\, \frac{b}{a}} \qquad [2]$$

b) Sustituyendo en la expresión [2] los datos numéricos del enunciado del problema, resulta:

$$\Phi = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N \cdot A^{-2}}}{2\pi} \cdot 20\ \mathrm{A} \cdot 0{,}2\ \mathrm{m} \cdot \ln \frac{20}{5} = \boxed{\mathbf{1{,}11 \cdot 10^{-6}\ Wb}}$$

18.34. ***Por dos conductores paralelos rectilíneos, de 8 m de longitud, separados 2 cm de distancia, pasan corrientes del mismo signo, de 2 A cada una. Calcular la fuerza con que se atraen mutuamente.***

Solución:

$$F = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot l}{d} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N \cdot A^{-2}} \cdot \frac{2\ \mathrm{A} \cdot 2\ \mathrm{A} \cdot 8\ \mathrm{m}}{2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} = \boxed{\mathbf{3{,}2 \cdot 10^{-4}\ N}}$$

18.35. ***Dos alambres rectilíneos y paralelos, de 1 m de longitud, están recorridos por una misma corriente de 5 A y separados por una distancia de 10 cm. ¿Con qué fuerza se atraen?***

Solución:

$$F = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot l}{d} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N \cdot A^{-2}} \cdot \frac{5\ \mathrm{A} \cdot 5\ \mathrm{A} \cdot 1\ \mathrm{m}}{10^{-1}\ \mathrm{m}} = \boxed{\mathbf{2 \cdot 10^{-5}\ N}}$$

18.36. ***Dos conductores rectilíneos y paralelos transportan una corriente de 2 A y 6 A, respectivamente, y están separados por una distancia de 4 cm. ¿Qué fuerza por unidad de longitud actúa sobre ellos si:***

a) las corrientes son del mismo sentido;
b) son de sentido contrario?

Solución:

a) En el primer caso la fuerza es atractiva, siendo su valor:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{d} = 2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N \cdot A^{-2}} \cdot \frac{2\ \mathrm{A} \cdot 6\ \mathrm{A}}{4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} = 6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N/m}$$

$$\boxed{\textbf{Fuerza atractiva} = \mathbf{6 \cdot 10^{-5}\ N/m}}$$

b) Si las corrientes son de sentido contrario, la fuerza tiene el mismo valor que antes, pero es repulsiva.

$$\boxed{\textbf{Fuerza repulsiva} = \mathbf{6 \cdot 10^{-5}\ N/m}}$$

18.37. *A través de una bobina que consta de 500 espiras y tiene un radio de 5 cm circula una corriente de 2 A. Calcular la inducción magnética en un punto del eje de la bobina que dista de su centro: a) 0 cm; b) 5 cm; c) 10 cm.*

Solución: La inducción magnética en un punto del eje de una bobina de radio r viene dada por:

$$B = \mu_o \cdot \frac{I \cdot r^2}{2\,(r^2 + b^2)^{3/2}} \cdot N$$

siendo b la distancia del punto en cuestión al centro de la bobina y N el número de espiras de que consta.

Apliquemos la expresión anterior a cada uno de los casos citados en el enunciado del problema:

a) $$B = 2\pi \cdot 10^{-7}\,N \cdot A^{-2} \cdot \frac{2\,A \cdot (5 \cdot 10^{-2}\,m)^2}{[(5 \cdot 10^{-2}\,m)^2 + (0\,m)^2]^{3/2}} \cdot 500 = \boxed{\mathbf{12{,}57 \cdot 10^{-3}\,T}}$$

b) $$B = 2\pi \cdot 10^{-7}\,N \cdot A^{-2} \cdot \frac{2\,A \cdot (5 \cdot 10^{-2}\,m)^2}{[(5 \cdot 10^{-2}\,m)^2 + (5 \cdot 10^{-2}\,m)^2]^{3/2}} \cdot 500 = \boxed{\mathbf{4{,}44 \cdot 10^{-3}\,T}}$$

c) $$B = 2\pi \cdot 10^{-7}\,N \cdot A^{-2} \cdot \frac{2\,A \cdot (5 \cdot 10^{-2}\,m)^2}{[(5 \cdot 10^{-2}\,m)^2 + (10 \cdot 10^{-2}\,m)^2]^{3/2}} \cdot 500 = \boxed{\mathbf{1{,}12 \cdot 10^{-3}\,T}}$$

18.38. *a) Un conductor rectilíneo infinitamente largo, AB, por el que circula una corriente de intensidad I_1, crea en todo su alrededor un campo magnético. Determinar el módulo, dirección y sentido de las fuerzas que dicho campo magnético ejerce sobre los cuatro lados del conductor rectangular de la figura 18.10, por el que pasa una corriente I_2 y dispuesto de tal forma que sus lados mayores, de longitud l, son paralelos al conductor. Los sentidos de las corrientes I_1 e I_2 vienen indicados por las flechas correspondientes.*

b) Particularizar la expresión anterior al caso en que I_1 = 50 A; I_2 = 20 A; l = 20 cm; a = 10 cm, y b = 20 cm.

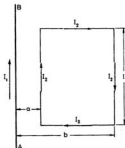


Fig. 18.10

Solución:

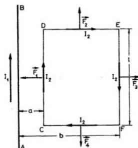
a) La dirección y el sentido de las cuatro fuerzas son las que se representan gráficamente en la figura 18.11.

En los puntos del lado CD la inducción magnética viene dada por la ley de Biot y Savart:

$$B_1 = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{a}$$

En consecuencia, dicho lado se encuentra sometido a una fuerza dada por la primera ley de Laplace:

$$\vec{F}_1 = I_2 \cdot (\vec{l} \wedge \vec{B}_1)$$



El módulo de dicha fuerza es:

Fig. 18.11

$$F_1 = I_2 \cdot l \cdot B_1 \cdot \text{sen } 90° = I_2 \cdot l \cdot B_1 = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \frac{l}{a}$$

$$\boxed{\mathbf{F_1 = \frac{\mu_o}{2\pi}\ I_1 \cdot I_2 \cdot \frac{l}{a}}}$$

Análogamente, sobre el lado EF, paralelo al anterior, situado a una distancia b del conductor AB, la fuerza actuante tiene de valor:

$$\boxed{\mathbf{F_3 = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \frac{l}{b}}}$$

En lo que respecta al lado DE, consideremos un punto de él, situado a una distancia x del conductor AB. En tal punto el campo magnético vale:

$$B_x = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{x}$$

La fuerza actuante sobre un elemento de longitud dx de dicho lado conductor es:

$$dF_2 = B_x \cdot I_2 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \frac{dx}{x}$$

Para obtener la fuerza correspondiente a todo el lado DE tendremos que integrar la expresión anterior entre los valores x = a y x = b:

$$F_2 = \frac{\mu_o}{2\pi} I_1 \cdot I_2 \cdot \int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o}{2\pi}\ I_1 \cdot I_2 \cdot \ln \frac{b}{a}$$

$$\boxed{\mathbf{F_2 = \frac{\mu_o}{2\pi}\ I_1 \cdot I_2 \cdot \ln \frac{b}{a}}}$$

Análogamente, la fuerza actuante sobre el lado FC tiene el mismo valor:

$$\boxed{F_4 = \frac{\mu_o}{2\pi} I_1 \cdot I_2 \cdot \ln \frac{b}{a}}$$

b) Sustituyendo en las anteriores expresiones los valores numéricos del enunciado del problema, se obtiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} F_1 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ N} \\ F_3 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ N} \\ F_2 = F_4 = 1{,}386 \cdot 10^{-4} \text{ N} \end{array}}$$

18.39. ***Dos hilos conductores, paralelos, rectilíneos e infinitamente largos, de 20 g/m de densidad lineal, por los que circula la misma intensidad de corriente, pero en sentido contrario, están suspendidos de un eje común mediante dos cuerdas inextensibles de peso despreciable y de 5 cm de longitud, que forman con la vertical un ángulo de 30°. Determinar la corriente que transportan ambos conductores.***

Solución: La fuerza, por unidad de longitud ($\frac{F}{l}$), con que se repelen dos conductores paralelos por los que circulan corrientes I_1 e I_2 de sentidos contrarios viene dada por:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{d} \qquad [1]$$

siendo d la distancia entre los conductores.

Sean P y P' las posiciones de los dos hilos conductores que forman con la vertical un ángulo de 30°, y consideremos uno cualquiera de ellos, por ejemplo el situado en P. En el diagrama de la figura 18.12 se representan las fuerzas, por unidad de longitud, que actúan sobre él. Descompongamos la tensión de la cuerda en sus componentes horizontal y vertical. Ya que el hilo conductor está en equilibrio, se ha de verificar que:

$$T \cdot \text{sen}\ \varphi = \frac{F}{l} \qquad [2]$$

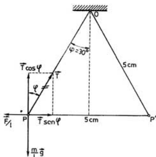


Fig. 18.12

$$T \cdot \cos \varphi = \frac{m}{l}\, g \qquad [3]$$

Dividiendo entre sí las expresiones [2] y [3], se obtiene:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F/l}{\frac{m}{l} \cdot g}$$

de donde:

$$\frac{F}{l} = \frac{m}{l}\, g \cdot \operatorname{tg} \varphi = 2 \cdot 10^{-2}\ \frac{kg}{m} \cdot 9{,}8\ m \cdot s^{-2} \cdot \operatorname{tg} 30° =$$

$$= 2 \cdot 10^{-2}\ \frac{kg}{m} \cdot 9{,}8\ m \cdot s^{-2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}113\ N/m$$

Sustituyendo este valor en la expresión [1], teniendo en cuenta que $I_1 = I_2 = I$ y $d = 5\ cm = 5 \cdot 10^{-2}\ m$, resulta:

$$\boxed{I = 168{,}2\ A}$$

18.40. ***Dos hilos conductores rectilíneos, infinitamente largos y paralelos, C y C', distan entre sí 40 cm. El hilo C está recorrido por una intensidad de corriente I = 12 A, dirigida de abajo a arriba.***

a) Determinar el valor y el sentido de la corriente I' que ha de circular por el otro hilo C' para que el campo magnético en el punto P_1 de la figura 18.13 sea nulo.

b) ¿Cuál es el valor, en magnitud, dirección y sentido, del campo magnético en el punto P_2?

c) Ídem, en el punto P_3, distante 32 cm del conductor C y 24 cm del C'.

Solución:

a) Para que el campo magnético en el punto P_1 sea nulo, se ha de cumplir que los campos magnéticos creados en dicho punto por los conductores C y C' sea iguales de módulo y de sentido contrario:

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{d_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I'}{d_1'}$$

de donde:

$$I' = I \cdot \frac{d_1'}{d_1} = 12\ A \cdot \frac{20\ cm}{60\ cm} = \boxed{4\ A}$$

estando dirigida en sentido contrario de I,

de arriba a abajo.

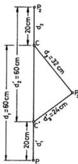


Fig. 18.13

b) Ya que las corrientes I e I' son de sentido contrario, el campo magnético en el punto P_2 valdrá:

$$B_{P_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{d} - \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I'}{d'_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{I}{d_2} - \frac{I'}{d'_2} \right] =$$

$$= 2 \cdot 10^{-7}\ N \cdot A^{-2} \cdot \left[\frac{12\ A}{0{,}2\ m} - \frac{4\ A}{0{,}6\ m} \right] =$$

= 1,07 · 10^{-5} T, viniendo representado por un vector situado en el plano del papel, perpendicular a la recta P_1P_2 hacia la izquierda en la figura.

c) El campo magnético creado en el punto P_3 por el conductor C es:

$$B_{P_3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{d_3} = 2 \cdot 10^{-7}\ N \cdot A^{-2} \cdot \frac{12\ A}{0{,}32\ m} = \frac{3}{4} \cdot 10^{-5}\ T$$

mientras que el que crea el conductor C' vale:

$$B'_{P_3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I'}{d'_3} = 2 \cdot 10^{-7}\ N \cdot A^{-2} \cdot \frac{4\ A}{0{,}24\ m} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-5}\ T$$

Los vectores representativos de ambos campos en el punto P_3 son perpendiculares, conforme se puede apreciar en la figura 18.14. Por lo tanto, el campo total valdrá:

$$B_{T(P_3)} = \sqrt{B_{P_3}^2 + B_{P_3}'^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4} \cdot 10^{-5}\ T\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot 10^{-5}\ T\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{97}}{12} \cdot 10^{-5}\ T = 8{,}21 \cdot 10^{-6}\ T$$

El campo en el punto P_3 vale 8,21 · 10^{-6} T, siendo su dirección y sentido los señalados en la figura 18.14.

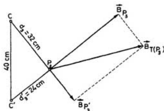


Fig. 18.14

19. INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA. CORRIENTE ALTERNA

FORMULARIO-RESUMEN

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Ley de Faraday:

$$E = -\frac{\Delta\ \Phi}{\Delta t} \cdot N = -\frac{d\ \Phi}{dt} \cdot N;\ (N = \text{número de espiras})$$

Fuerza electromotriz inducida: $E = \vec{v} \cdot (\vec{l} \wedge \vec{B})$

Si $\vec{v}$, $\vec{l}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares: $E = B \cdot l \cdot v$

Fuerza electromotriz autoinducida:

$$E = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t};\ (L = \text{coeficiente de autoinducción})$$

CORRIENTES ALTERNAS

$e = E_{máx} \cdot \text{sen}\ \omega t$; $E = \dfrac{E_{máx}}{\sqrt{2}}$

- e = fuerza electromotriz instantánea.
- E = fuerza electromotriz eficaz.
- $E_{máx}$ = fuerza electromotriz máxima.

$i = I_{máx} \cdot \text{sen}\ (\omega t - \varphi)$; $I = \dfrac{I_{máx}}{\sqrt{2}}$

- i = intensidad instantánea.
- I = intensidad eficaz.
- $I_{máx}$ = intensidad máxima.

Reactancia inductiva o inductancia: $X_L = L \cdot 2\pi \cdot \nu$

Reactancia capacitiva o capacitancia: $X_C = \dfrac{1}{C \cdot 2\pi \cdot \nu}$

Impedancia: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

Ley de Ohm:

$$I = \frac{E}{Z}$$

$$\varphi = \textbf{ángulo de desfasaje} \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{R}{Z} \\ \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{X_L - X_C}{R} \end{cases}$$

Asociaciones en serie de elementos R, L y C

Elementos	R	L	C	RL	RC	LC	RLC
Impedancia, Z	R	$L\omega$	$\dfrac{1}{C\omega}$	$\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$	$\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(C\omega)^2}}$	$L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$	$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$
Ángulo de desfasaje φ	0	$\pi/2$	$-\pi/2$	$\operatorname{arc\,tg} (L\omega/R)$	$\operatorname{arc\,tg} (-1/RC\omega)$	$\pm\pi/2$	$\operatorname{arc\,tg} \left(\dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}\right)$

Asociación de impedancias en serie y en derivación (notación compleja):

En serie
$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \Sigma \vec{V}_x \\ \vec{Z} = \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 + \vec{Z}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \Sigma \vec{Z}_x \\ \vec{I} = \text{común para todas las impedancias.} \end{cases}$$

En derivación
$$\begin{cases} \vec{E} = \text{común para todas las ramas de la derivación.} \\ \vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \Sigma \vec{I}_x \\ \dfrac{1}{\vec{Z}} = \dfrac{1}{\vec{Z}_1} + \dfrac{1}{\vec{Z}_2} + \dfrac{1}{\vec{Z}_3} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \Sigma \dfrac{1}{\vec{Z}_x} \end{cases}$$

Potencia de una corriente alterna: $P = E \cdot I \cdot \cos \varphi$; $P_{máx} = E \cdot I$

Resonancia de un circuito	$X_L = X_C$	$Z = R$	$T = 2\pi \sqrt{L \cdot C}$
	$\cos \varphi = 1$	$I = \dfrac{E}{R}$	$\nu = \dfrac{1}{2\pi \sqrt{L \cdot C}}$

Transformadores: $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{n_1}{n_2} = n$ (relación de transformación)

$\{ E_1, I_1$ y n_1 = tensión, intensidad y número de espiras del primario.
$\{ E_2, I_2$ y n_2 = ídem del secundario.

19. INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA. CORRIENTE ALTERNA

19.1. *Por el interior de una bobina, cuyos extremos están conectados a un galvanómetro, se pasa, de un lado a otro, un imán recto. ¿Qué desviaciones acusa la aguja del galvanómetro?*

Solución: Cuando se produce una variación decreciente del flujo se origina una corriente inducida que circula en el sentido de las agujas del reloj (fig. 19.1 b). Cuando la variación del flujo es positiva se origina una corriente cuyo sentido es contrario al de las agujas del reloj (fig. 19.1 a).

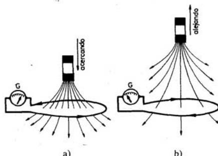


Fig. 19.1

19.2. *¿Cómo pueden evitarse las corrientes de Foucault?*

Solución: Para evitar —o, mejor aún, disminuir— las corrientes de Foucault en los conductores —por ejemplo, en los núcleos de hierro de los electroimanes y alternadores— se procura que dichos núcleos no sean macizos, sino que estén formados por la superposición de láminas de hierro convenientemente aisladas entre sí; con lo que se logra disminuir notablemente la circulación de esas corrientes.

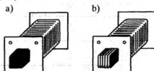


Fig. 19.2

19.3. *¿De qué factores depende el coeficiente de autoinducción de un solenoide?*

Solución: Depende de su forma geométrica y de sus dimensiones. Así, por ejemplo, la autoinducción de un conductor rectilíneo es, prácticamente, nula, y la autoinducción de ese mismo conductor arrollado en espiral es muy grande; sobre todo, si en su interior se coloca un núcleo de hierro cerrado. En el caso de una bobina, el coeficiente de autoinducción depende del número de espiras del carrete, del área de su sección y de su longitud.

19.4. *¿Por qué salta una chispa en un interruptor al cortar la corriente en un circuito y, sin embargo, no salta al cerrarlo?*

Solución: Por el circuito circula una corriente de intensidad determinada, normalmente constante, y en él no se producen fenómenos de autoinducción. Al interrumpir el circuito se origina una fuerte variación en la intensidad de corriente, dando lugar a una fuerza electromotriz autoinducida en el circuito, capaz de producir un salto de chispa entre los bornes del interruptor. Por el contrario, al cerrar el circuito, la extracorriente que se origina es de sentido contrario a la principal, a la cual debilita, no produciéndose, por ello, chispa alguna.

19.5. *Moviendo un conductor rectangular cerrado en un campo magnético se puede inducir en él una corriente o no. ¿Qué debe hacerse para que se origine corriente?*

Solución: Si el conductor se mueve paralelamente a las líneas de fuerza sin cortarlas, o de forma que no varíe el flujo magnético a través de él, no se originará corriente inducida alguna.

Para que exista producción de corrientes inducidas es condición necesaria que varíe el flujo magnético a través de la superficie limitada por el conductor cerrado.

Haciendo girar el conductor rectangular, representado en la figura 19.3, entre los polos de un imán se origina en él una fuerza electromotriz inducida debido a que, al variar su posición relativa respecto a las líneas de inducción, varía el flujo magnético a través de la superficie limitada por él.

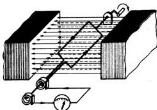


Fig. 19.3

19.6. *¿Qué le sucederá a un anillo metálico si lo haces girar encima de una mesa? ¿Por qué?*

Solución: Debido a la componente vertical del campo magnético terrestre, en el anillo se producirán corrientes inducidas.

19.7. *¿Qué misión desempeñan el cebador y la bobina en la instalación de un tubo fluorescente?*

Solución: El cebador suele constar de un contacto fijo y una pieza bimetálica montada sobre un contacto móvil. Al conectar la corriente, ésta circula en circuito cerrado por el cebador, y al elevarse su temperatura se separa la pieza bimetálica y se abre el circuito, provocándose —por un fenómeno de inducción electromagnética— una tensión muy elevada que, aplicada a los terminales del tubo, produce su descarga y consiguiente encendido. Mien-

tras el tubo está en funcionamiento la tensión entre sus terminales es inferior a la necesaria para cerrar el circuito del cebador, el cual permanece inactivo.

La bobina tiene como objeto limitar la corriente de la descarga en el tubo, evitando la producción de un cortocircuito en la línea, que destruiría los dos filamentos del tubo.

19.8. *El salto de chispa en la bujía de un motor de explosión requiere una tensión elevada. ¿Cómo se consigue esa tensión si la batería del coche únicamente posee 12 V?*

Solución: La corriente producida por la batería del coche se hace circular a través del arrollamiento primario de una bobina de inducción, y al interrumpirse esta corriente la descarga de alto voltaje que se origina produce el salto de chispa en la bujía.

19.9. *(*) Un cuadro de 400 cm² de sección y con 20 espiras se encuentra situado en dirección normal a un campo magnético de 0,12 T, y gira hasta situarse paralelamente al campo, transcurriendo 0,25 s. ¿Cuál es el valor de la fuerza electromotriz inducida?*

Solución: Cuando gira el cuadro, la variación del flujo magnético que lo atraviesa es:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = B \cdot S \cdot (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) =$$
$$= B \cdot S \cdot [\cos 90^\circ - \cos 0^\circ] = -B \cdot S \cdot \cos 0^\circ =$$
$$= -0{,}12\ T \cdot 4 \cdot 10^{-2}\ m^2 \cdot 1 = -4{,}8 \cdot 10^{-3}\ Wb$$

Aplicando la ley de Faraday de la inducción, tenemos:

$$E = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -20 \cdot \frac{-4{,}8 \cdot 10^{-3}\ Wb}{0{,}25\ s} = \boxed{0{,}384\ V}$$

19.10. *El flujo magnético que atraviesa una espira varía con el tiempo, de acuerdo con la expresión:*

$$\Phi = 20\ t^4 - 6\ t^2\ (SI)$$

Calcule el valor de la fuerza electromotriz inducida al cabo de 2 segundos.

Solución: De acuerdo con la ley de Faraday de la inducción, tenemos:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -80\ t^3 + 12\ t\ (SI)$$

Al cabo de 2 segundos, el valor absoluto de la fuerza electromotriz inducida será:

$$\boxed{E = 616\ V}$$

19.11. *(*) Una bobina de 200 espiras y radio 0,10 m se coloca perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,2 teslas. Hallar la fuerza electromotriz inducida en la bobina, si en 0,1 s:*

a) se duplica el campo magnético;
b) el campo se anula;
c) se invierte el sentido del campo;
d) se gira la bobina 90° en torno al eje paralelo al campo;
e) se gira la bobina 90° en torno al eje perpendicular al campo.

Solución: Toda variación del flujo magnético que atraviesa una bobina da lugar a una fuerza electromotriz inducida que, de acuerdo con la ley de Faraday de la inducción, valdrá:

$$E = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Esta ley es aplicable en todos los casos del problema. Por tanto:

a)

$$E = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N \cdot S \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = -N \cdot S \cdot \frac{B_2 - B_1}{\Delta t} =$$

$$= -200 \cdot \pi\,(0{,}1\text{ m})^2 \cdot \frac{0{,}4\text{ T} - 0{,}2\text{ T}}{0{,}1\text{ s}} = \boxed{-12{,}56\text{ V}}$$

b)

$$E = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N \cdot S \cdot \frac{B_2 - B_1}{\Delta t} =$$

$$= -200 \cdot \pi\,(0{,}1\text{ m})^2 \cdot \frac{0\text{ T} - 0{,}2\text{ T}}{0{,}1\text{ s}} = \boxed{12{,}56\text{ V}}$$

c)

$$E = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N \cdot S \cdot \frac{B_2 - B_1}{\Delta t} =$$

$$= -200 \cdot \pi\,(0{,}1\text{ m})^2 \cdot \frac{-0{,}2\text{ T} - 0{,}2\text{ T}}{0{,}1\text{ s}} = \boxed{25{,}12\text{ V}}$$

d) Como $\Delta\Phi = 0$, resulta:

$$\boxed{E = 0\text{ V}}$$

e)

$$E = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N \cdot B \cdot S \cdot \frac{(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}{\Delta t} =$$

$$= -200 \cdot 0{,}2\text{ T} \cdot \pi\,(0{,}1\text{ m})^2 \cdot \frac{\cos 90° - \cos 0°}{0{,}1\text{ s}} = \boxed{12{,}56\text{ V}}$$

19.12. *a)* *Una varilla metálica, de longitud $l = b - a$, se desplaza con velocidad v paralelamente a un conductor rectilíneo infinitamente largo, por el que circula una corriente de intensidad I, conforme indica la figura 19.4. Determinar el valor de la fuerza electromotriz inducida en la varilla.*

b) *Particularizar la expresión anterior al caso en que $I = 50$ A; $v = 10$ m/s; $a = 1$ cm, y $b = 40$ cm.*

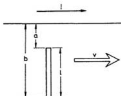


Fig. 19.4

Solución:

a) Aislemos un trozo elemental de varilla, de longitud dr, a una distancia r del alambre conductor. El área barrida por dicho elemento diferencial en un tiempo dt será:

$$dS = v \cdot dt \cdot dr$$

Como a dicha distancia el valor de la inducción magnética del campo creado por el alambre es:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

resulta que la variación de flujo magnético que acompaña al movimiento del trozo elemental de varilla que hemos aislado será:

$$d\Phi = B \cdot dS = B \cdot v \cdot dt \cdot dr = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I \cdot v \cdot dt \cdot \frac{dr}{r} \qquad [1]$$

La variación de flujo total correspondiente a toda la varilla se obtendrá integrando la expresión [1] entre los límites $r = a$ y $r = b$:

$$d\Phi_T = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I \cdot v \cdot dt \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot I \cdot v \cdot dt \cdot \ln \frac{b}{a}$$

Aplicando la ley de Faraday de la inducción, se obtiene para la fuerza electromotriz inducida el valor absoluto:

$$\boxed{\mathbf{E} = \left| -\frac{d\Phi_T}{dt} \right| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{v} \cdot \ln \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}} \qquad [2]$$

b) Sustituyendo en la expresión [2] los datos numéricos del enunciado del problema, tenemos:

$$E = 2 \cdot 10^{-7}\ N \cdot A^{-2} \cdot 50\ A \cdot 10\ m \cdot s^{-1} \cdot \ln \frac{4 \cdot 10^{-1}\ m}{10^{-2}\ m} = \boxed{\mathbf{3{,}7 \cdot 10^{-4}\ V}}$$

19.13. *El conductor rectangular de la figura 19.5, de dimensiones 0,6 m y 0,3 m, cuya resistencia es de 2,7 Ω, y que se encuentra situado en el interior del campo magnético:*

$$\vec{B} = (5 - y)\ \vec{i}\ (SI)$$

se desplaza en la dirección del eje OY y en su sentido positivo. Sabiendo que en el momento inicial el lado izquierdo del conductor rectangular coincide con el eje OZ, calcular la intensidad de corriente que circula a través de él en los casos siguientes:

a) Si se desplaza con velocidad constante de 1,5 m/s.

b) Al cabo de 20 s de comenzar su movimiento, partiendo del reposo, con la aceleración de 3 m/s².

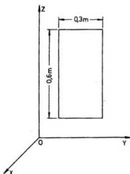


Fig. 19.5

Solución: Consideremos una franja elemental de la superficie encerrada por el conductor, a una distancia y del plano XZ. La longitud de tal franja es 0,6 m y su grosor dy, valiendo su superficie: dS = 0,6 · dy.

El flujo elemental a través de tal franja es:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = (5 - y) \cdot 0,6 \cdot dy$$

y el flujo a través de toda la superficie encerrada por el conductor valdrá:

$$\Phi = \int_{y}^{y+0,3} (5 - y) \cdot 0,6 \cdot dy = 0,6 \left[5y - \frac{y^2}{2}\right]_{y}^{y+0,3} = 0,873 - 0,18\ y \quad [1]$$

a) En este caso, y = v · t = 1,5 · t, valor que, sustituido en [1], conduce a:

$$\Phi = 0,873 - 0,27\ t$$

De acuerdo con la ley de Faraday, la fuerza electromotriz inducida en el conductor rectangular será:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(0,873 - 0,27\ t) = 0,27\ V$$

y, por consiguiente, la intensidad de corriente valdrá:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{0,27\ V}{2,7\ \Omega} = \boxed{\mathbf{0,1\ A}}$$

b) De modo análogo al apartado anterior:

$$y = \frac{1}{2}\ a \cdot t^2 = 1{,}5 \cdot t^2$$

y, por tanto:

$$\Phi = 0{,}873 - 0{,}27\ t^2$$

$$E = -\ \frac{d\Phi}{dt} = -\ \frac{d}{dt}\ (0{,}873 - 0{,}27\ t^2) = 0{,}54\ t\ (V)$$

Al cabo de 20 s:

$$E_{t=20\ s} = 0{,}54 \cdot 20 = 10{,}8\ V$$

y la intensidad de corriente que circula será:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{10{,}8\ V}{2{,}7\ \Omega} = \boxed{4\ A}$$

19.14. *Un disco metálico de 20 cm de radio gira a razón de 1 200 r.p.m. alrededor de un eje perpendicular a él y que pasa por su centro. El disco está situado en el interior de un campo magnético paralelo al eje de rotación, de inducción 2 T (fig. 19.6). ¿Qué diferencia de potencial aparece entre el centro y el borde del disco?*

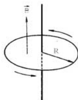


Fig. 19.6

Solución: Consideremos uno de los infinitos radios del disco. Al girar, en un tiempo dt barre un área:

$$dS = \frac{1}{2}\ R^2 \cdot d\theta = \frac{1}{2}\ R^2 \cdot \omega \cdot dt$$

siendo ω la velocidad angular del disco. Este giro ocasiona una variación de flujo de:

$$d\Phi = \frac{1}{2}\ B \cdot R^2 \cdot \omega \cdot dt$$

y, por consiguiente, de acuerdo con la ley de Faraday, se induce una fuerza electromotriz (diferencia de potencial entre el centro y el borde del disco) cuyo valor absoluto es:

$$E = \left| -\ \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{1}{2}\ B \cdot R^2 \cdot \omega$$

Sustituyendo en la expresión anterior los datos numéricos del enunciado, tenemos:

$$E = \frac{1}{2}\ 2\ T \cdot (0{,}2\ m)^2 \cdot 1\ 200\ \frac{rev}{min} \cdot \frac{2\pi\ rad}{1\ rev} \cdot \frac{1\ min}{60\ s} \simeq \boxed{5\ V}$$

19.15. *Sobre dos rieles rectilíneos paralelos, de resistencia despreciable, dispuestos horizontalmente a 2 m de distancia uno de otro, se colocan dos varillas metálicas conductoras, que se pueden mover paralelamente a sí mismas, manteniéndose en todo momento perpendiculares a los rieles (fig. 19.7). Las dos varillas son idénticas, de 3 Ω de resistencia y 2,5 kg de masa cada una, y todo el sistema se encuentra en el interior de un campo magnético uniforme vertical, de 0,5 T de inducción. Una de las varillas se aleja de la otra con la velocidad de 8 m/s. Hallar la velocidad constante que adquiere la segunda varilla, sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre las varillas y los rieles es μ = 0,05.*

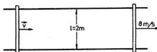


Fig. 19.7

Solución: De acuerdo con la ley de Lenz, la segunda varilla se moverá tendiendo a acercarse a la primera, para así oponerse a la variación de flujo producida. En el momento en que esta segunda varilla adquiera una velocidad constante, la variación de flujo que tiene lugar en un tiempo dt es:

$$d\Phi = B \cdot dS = B \cdot l \cdot (8 - v) \cdot dt$$

induciéndose una fuerza electromotriz cuyo valor absoluto es:

$$E = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = B \cdot l \cdot (8 - v)$$

y circulando a través de las varillas y los rieles una intensidad de corriente:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{B \cdot l \cdot (8 - v)}{R}$$

El campo magnético actúa sobre la segunda varilla con una fuerza que viene dada por la primera ley de Laplace: $\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \wedge \vec{B})$. El módulo de dicha fuerza es:

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \text{sen } 90° = \frac{B^2 \cdot l^2 \cdot (8 - v)}{R}$$

y su dirección y sentido tales que obligan a moverse a la segunda varilla hacia la primera. En el momento en que esta fuerza se haga igual a la de rozamiento, la varilla se moverá con velocidad constante, cumpliéndose que:

$$\frac{B^2 \cdot l^2 \cdot (8 - v)}{R} = \mu m \cdot g$$

de donde:

$$v = 8 - \frac{\mu m \cdot g \cdot R}{B^2 \cdot l^2}$$

Sustituyendo los valores numéricos del enunciado del problema, tenemos:

$$v = 8\ m/s - \frac{0{,}05 \cdot 2{,}5\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 6\ \Omega}{(0{,}5\ T)^2 \cdot (2\ m)^2} = \boxed{0{,}65\ m/s}$$

19.16. *(*) Una varilla conductora AG, de 0,5 m de longitud, se apoya sobre dos raíles CA y DG. El conjunto está situado en un campo magnético uniforme de 0,5 teslas, perpendicular al plano de la figura 19.8 y dirigido hacia dentro.*

Se pide:

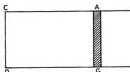


Fig. 19.8

a) Calcular la fuerza electromotriz inducida en la varilla cuando se desplaza hacia la derecha con una velocidad de 4 m/s.

b) Suponiendo la resistencia del circuito AGDC constante e igual a 0,2 Ω, calcular la fuerza que hay que aplicar a la varilla para que siga su movimiento.

c) Calcular el trabajo mecánico realizado en la unidad de tiempo por dicha fuerza.

d) Calcular la cantidad de calor desprendida en la unidad de tiempo en el circuito.

Solución:

a) La fuerza electromotriz inducida viene dada por:

$$E = \vec{v} \cdot (\vec{l} \wedge \vec{B})$$

que, cuando $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{l}$ y a $\vec{B}$, vale:

$$E = B \cdot l \cdot v \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

siendo α el ángulo que forman $\vec{l}$ y $\vec{B}$. En el caso del problema, $\alpha = 90°$. Por lo tanto:

$$E = 0{,}5\ T \cdot 0{,}5\ m \cdot 4\ m/s \cdot \operatorname{sen} 90° = \boxed{1\ V}$$

b) La intensidad de corriente que atraviesa el circuito es:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{1\ V}{0{,}2\ \Omega} = 5\ A$$

Por consiguiente, la fuerza que el campo magnético ejerce sobre la varilla será:

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \operatorname{sen} \alpha = 5\ A \cdot 0{,}5\ m \cdot 0{,}5\ T \cdot \operatorname{sen} 90° = 1{,}25\ N$$

siendo su sentido hacia la izquierda, contrario al movimiento. Para mantenerlo habrá que aplicar, por lo tanto, una fuerza igual y de sentido contrario:

$$\boxed{F = 1{,}25\ \text{N}}$$

c) El trabajo mecánico realizado en la unidad de tiempo (potencia mecánica) será:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = I \cdot (\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = E \cdot I = 1\ \text{V} \cdot 5\ \text{A} = \boxed{5\ \text{W}}$$

d) Calculemos, por último, la cantidad de calor desprendida por unidad de tiempo en el circuito:

$$\frac{Q}{t} = 0{,}24 \cdot P = 0{,}24\ \frac{\text{cal}}{\text{J}} \cdot 5\ \text{W} = \boxed{1{,}2\ \text{cal/s}}$$

19.17. *a) Un alambre conductor de sección cuadrada, de longitud l, masa m y resistencia eléctrica R, desliza sin rozamiento, bajando a lo largo de dos rieles paralelos, de resistencia eléctrica despreciable, inclinados un ángulo α y unidos en su extremo inferior por otro conductor de resistencia nula, conforme se indica en la figura 19.9. Todo el sistema se encuentra en el interior de un campo magnético uniforme vertical ascendente, de inducción B. Hallar el valor de su velocidad constante que alcanza el alambre en su movimiento de descenso.*

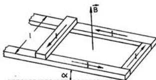


Fig. 19.9

b) Particularizar la expresión acabada de obtener al caso en que l = 40 cm, m = 15 g; R = 1 Ω; B = 0,5 T, y α = 30°.

Solución:

a) Mientras el alambre va descendiendo con velocidad v, la variación de flujo magnético que atraviesa el circuito cerrado es:

$$d\Phi = -B \cdot l \cdot v \cdot dt \cdot \cos \alpha$$

Esta variación de flujo origina, de acuerdo con la ley de Faraday, una fuerza electromotriz inducida:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot l \cdot v \cdot \cos \alpha$$

siendo la intensidad de corriente que atraviesa el circuito:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{B \cdot l \cdot v \cdot \cos \alpha}{R} \qquad [1]$$

y su sentido el señalado en la figura.

La fuerza que actúa sobre el alambre conductor en el interior del campo magnético viene dada por la primera ley de Laplace: $\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \wedge \vec{B})$. El módulo de dicha fuerza es: $F = I \cdot l \cdot B$, estando dirigida hacia arriba del plano (véase la fig. 19.10, en la cual se esquematizan todas las fuerzas actuantes sobre el conductor). En el momento de alcanzarse el equilibrio y, por lo tanto, velocidad constante, se cumplirá que:

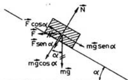


Fig. 19.10

$$F \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha$$

$$I \cdot l \cdot B \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha \qquad [2]$$

Sustituyendo en la expresión [2] el valor de I dado por la [1], tenemos:

$$\frac{B^2 \cdot l^2 \cdot v}{R} \cdot \cos^2 \alpha = m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha$$

de donde:

$$\boxed{v = \frac{R \cdot m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha}{B^2 \cdot l^2 \cdot \cos^2 \alpha}} \qquad [3]$$

b) Teniendo en cuenta los datos numéricos del enunciado del problema, por sustitución en la ecuación [3], resulta:

$$v = \frac{1\ \Omega \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{kg} \cdot 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 1/2}{(0{,}5\ \text{T})^2 \cdot (0{,}4\ \text{m})^2 \cdot 3/4} = \boxed{2{,}5\ \text{m/s}}$$

19.18. *Una corriente continua de 2,5 A alimenta a una bobina de 500 espiras y produce en ella un flujo de inducción magnética de 3,6 · 10⁻⁴ Wb. Deducir la autoinducción en la bobina cuando la corriente se interrumpe 0,06 segundos después de iniciada.*

Solución:

$$L = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta I} = 500 \cdot \frac{3{,}6 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}}{2{,}5\ \text{A}} = 0{,}072\ \text{H} = \boxed{72\ \text{mH}}$$

19.19. *Calcular la autoinducción de un circuito en el que se produce una fuerza electromotriz de autoinducción de 5 V cuando la corriente varía de una manera uniforme de 0 a 2,5 A en 0,25 segundos.*

Solución: Ya que:

$$E = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

se deduce:

$$L = -\frac{E}{\Delta I/\Delta t} = -\frac{-5\ V}{\dfrac{(2,5 - 0)\ A}{0,25\ s}} = \boxed{0,5\ H}$$

19.20. *¿Qué ventajas ofrecen las corrientes alternas sobre las continuas?*

Solución: Actualmente los centros de consumo de energía eléctrica están muy distantes de los centros de producción de dicha energía, lo que obliga a un largo transporte de la corriente. Por tanto, se hace necesario reducir lo más posible las pérdidas energéticas —fundamentalmente debidas al efecto Joule— experimentadas a lo largo de la conducción.

Como, merced al uso de transformadores, la corriente eléctrica puede transportarse a muy baja intensidad —aunque a elevado potencial—, se reducen enormemente dichas pérdidas; lo que no sería posible si la corriente fuese continua.

Por otra parte, los aparatos productores de corriente alterna tienen mayor duración que los de continua. Además, los motores trifásicos de corriente alterna son, a igualdad de potencia, más económicos y sólidos que los de continua.

19.21. *¿Por qué se habla de valores eficaces de las corrientes alternas?*

Solución: Se entiende por valor eficaz de una corriente alterna —tanto para la tensión como para la intensidad— aquel valor que debería tener una corriente continua para producir la misma cantidad de calor en las mismas condiciones; es decir, en el mismo tiempo y a través de la misma resistencia.

A efectos prácticos, se habla de valores eficaces de las corrientes alternas, porque los valores instantáneos varían continuamente con el tiempo y los valores medios en cada período son nulos.

19.22. *¿Cumplen las corrientes alternas la ley de Ohm?*

Solución: Las corrientes alternas cumplen la ley de Ohm. Únicamente ha de tenerse en cuenta que, en este caso, la resistencia total del circuito no es sólo la resistencia óhmica pura, sino el conjunto de las resistencias óhmicas puras y las posibles inductancias y capacitancias existentes.

19.23. *¿Qué condición ha de cumplirse para que la impedancia de un circuito LCR, en serie, se reduzca al valor de la resistencia óhmica?*

Solución: Como:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

para que $Z = R$, ha de cumplirse que $X_L = X_C$: **la reactancia inductiva y la capacitiva han de ser iguales.**

19.24. *¿En qué casos es máxima la potencia de una corriente alterna?*

Solución: Como la potencia de una corriente alterna viene dada por la expresión $P = E \cdot I \cdot \cos \varphi$, su valor será máximo cuando $\cos \varphi = 1$, es decir, cuando no exista desfasaje, lo cual sucederá:

— Si el circuito posee sólo resistencia óhmica.
— Si se encuentra en resonancia (las reactancias inductiva y capacitiva poseen el mismo valor).

19.25. *Un transformador de corriente puede ser elevador o reductor. ¿De qué depende el que actúe de uno u otro modo?*

Solución: Los transformadores elevadores aumentan el valor de la tensión aplicada, para lo cual el número de espiras del arrollamiento secundario es mayor que el del primario. Por el contrario, los reductores disminuyen la tensión, y poseen en el primario mayor número de espiras que en el secundario.

19.26. ***¿Ofrece una bobina la misma resistencia a una corriente alterna que a una continua?***

¿Ofrece una bobina la misma resistencia a todas las corrientes alternas?

Solución: La resistencia que ofrece una bobina al paso de una corriente continua es R. Sin embargo, frente a una corriente alterna su resistencia es:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} > R$$

Por otra parte, como $X_L = L \cdot \omega = L \cdot 2\pi\nu$, cuanto mayor sea la frecuencia de una corriente alterna mayor será la resistencia ofrecida por la bobina.

19.27. ***Un salto de agua de 20 m de altura y 48 m³/s de caudal mueve un alternador que produce una corriente eléctrica de 2 000 V y 4 000 A. Calcular:***

a) La potencia del salto:
b) La potencia del alternador.
c) El rendimiento de la instalación.
d) ¿Cómo se lograría que la tensión de la corriente fuese 100 veces mayor?
e) ¿Cuál sería en este caso la intensidad de la corriente?

Solución:

a) La potencia del salto viene dada por:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = \frac{48 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 20 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \boxed{9{,}42 \cdot 10^6 \text{ W}}$$

b) La potencia del alternador será:

$$P = E \cdot I = 2\,000\ V \cdot 4\,000\ A = \boxed{8 \cdot 10^6\ W}$$

c) Calculemos, ahora, el rendimiento de la instalación:

$$\text{Rendimiento} = \frac{8 \cdot 10^6\ W}{9{,}42 \cdot 10^6\ W} \cdot 100 = \boxed{85\ \%}$$

d) **Con un transformador elevador, cuyo número de espiras del secundario sea 100 veces mayor que el del primario.**

e) En ambos casos la potencia de la corriente ha de ser la misma. Por tanto:

$$2\,000\ V \cdot 4\,000\ A = 200\,000\ V \cdot I$$

de donde:

$$\boxed{I = 40\ A}$$

19.28. *Calcular la impedancia de un circuito en el que hay una resistencia óhmica de 100 ohmios y una capacidad de 31,4 microfaradios, si la frecuencia de la corriente que lo atraviesa es 50 hertzios. ¿Cuánto vale la intensidad si la tensión es 120 V?*

Solución: El valor de la reactancia capacitiva es:

$$X_C = \frac{1}{C \cdot \omega} = \frac{1}{C \cdot 2\pi \cdot \nu} = \frac{1}{31{,}4 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 2\pi \cdot 50\ Hz} = 100\ \Omega$$

Por lo tanto, la impedancia valdrá:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(100\ \Omega)^2 + (100\ \Omega)^2} = \boxed{100\ \sqrt{2}\ \Omega}$$

y la intensidad de corriente:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{120\ V}{100\ \sqrt{2}\ \Omega} = \boxed{0{,}85\ A}$$

19.29. *(*) Un circuito posee una resistencia óhmica de 20 Ω y un coeficiente de autoinducción de 0,1 henrios. Dar el valor de su impedancia cuando está recorrido por una corriente de 50 c.p.s.*

Solución:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + (L \cdot 2\pi \cdot \nu)^2} =$$

$$= \sqrt{(20\ \Omega)^2 + (0{,}1\ H \cdot 2\pi \cdot 50\ s^{-1})^2} = \boxed{37{,}2\ \Omega}$$

19.30. *La resistencia de un circuito de corriente alterna es 20 ohmios; su reactancia inductiva es 40 ohmios y su reactancia capacitiva 30 ohmios. Calcular:*

a) La impedancia del circuito.
b) La intensidad de corriente que pasará por él si está conectado a una tensión de 224 V.
c) El ángulo de desfasaje.

Solución:

a)

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(20\ \Omega)^2 + (40\ \Omega - 30\ \Omega)^2} = \boxed{22{,}4\ \Omega}$$

b)

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{224\ V}{22{,}4\ \Omega} = \boxed{10\ A}$$

c)

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{20\ \Omega}{22{,}4\ \Omega} = 0{,}8944$$

Por tanto:

$$\varphi = \text{arc cos } 0{,}8944 = \boxed{26°\ 34'}$$

19.31. *Si una bobina se conecta a una fuente de 120 V de corriente continua, la intensidad es 0,4 A. Si se conecta a una fuente de 120 V de corriente alterna, la intensidad es 0,24 A. Calcular:*

a) La resistencia óhmica de la bobina.
b) La impedancia del circuito.
c) La reactancia inductiva de la bobina.

Solución:

a) La resistencia óhmica de la bobina se obtiene aplicando la ley de Ohm al circuito de corriente continua:

$$R = \frac{E}{I} = \frac{120\ V}{0{,}4\ A} = \boxed{300\ \Omega}$$

b) Por aplicación de la ley de Ohm al circuito de corriente alterna se obtiene la impedancia del circuito:

$$Z = \frac{E}{I} = \frac{120\ V}{0{,}24\ A} = \boxed{500\ \Omega}$$

c) Como $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$, resulta:

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(500\ \Omega)^2 - (300\ \Omega)^2} = \boxed{400\ \Omega}$$

19.32. *Un condensador cuya capacidad es 5/π microfaradios se conecta a una fuente de tensión de 120 V de corriente alterna cuya frecuencia es 50 s⁻¹. Se supone que en el circuito no existen resistencias puras. Calcular:*

a) La reactancia capacitiva del condensador.
b) La intensidad de la corriente.

Solución:

a) La reactancia capacitiva del condensador es:

$$X_C = \frac{1}{C \cdot \omega} = \frac{1}{\frac{5}{\pi} \cdot 10^{-6}\ F \cdot 2\pi \cdot 50\ s^{-1}} = \boxed{2\ 000\ \Omega}$$

b) La intensidad de corriente se obtiene aplicando la ley de Ohm:

$$I = \frac{E}{X_C} = \frac{120\ V}{2\ 000\ \Omega} = \boxed{0{,}06\ A}$$

19.32. *(*) Un circuito serie de corriente alterna está formado por una autoinducción de 1/10π henrios y resistencia óhmica despreciable, y por dos resistencias de 5 Ω y 11 Ω. Sabiendo que la tensión en la red es de 100 V y la frecuencia de 60 Hz, calcular la lectura de un voltímetro conectado de tal manera que entre los bornes comprenda la autoinducción y la resistencia de 5 Ω.*

Solución: Hallemos, en primer lugar, la intensidad eficaz en el circuito:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} =$$

$$= \frac{100\ V}{\sqrt{(5\ \Omega + 11\ \Omega)^2 + \left(\frac{1}{10\pi}\ H \cdot 2\pi \cdot 60\ s^{-1}\right)^2}} = 5\ A$$

La lectura del voltímetro (diferencia de potencial entre los puntos a y b de la figura 19.11) será:

$$V_{ab} = I \cdot Z_{ab} = 5\ A \cdot \sqrt{(5\ \Omega)^2 + (12\ \Omega)^2} = 5\ A \cdot 13\ \Omega = \boxed{65\ V}$$

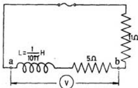


Fig. 19.11

19.33. *(*) Se aplica una tensión eficaz de 110 V y 50 Hz a un circuito serie formado por una resistencia de 10 Ω y una inductancia de $\frac{1}{10}$ H y resistencia despreciable. Calcular:*

a) La intensidad eficaz que circula por el circuito.
b) El ángulo de desfase entre la corriente y la tensión en los bornes del circuito.
c) La potencia consumida.

Solución:

a)

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} =$$

$$= \frac{110\ V}{\sqrt{(10\ \Omega)^2 + \left(\frac{1}{10}\ H \cdot 2\pi \cdot 50\ Hz\right)^2}} =$$

$$= \frac{110\ V}{32{,}97\ \Omega} = \boxed{3{,}33\ A}$$

b)

$$\text{tg}\ \varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{31{,}4\ \Omega}{10\ \Omega} = 3{,}14; \quad \varphi = \text{arc tg}\ 3{,}14 = \boxed{72^\circ\ 20'}$$

c)

$$P = E \cdot I \cdot \cos\varphi = E \cdot I \cdot \frac{R}{Z} = \frac{E^2}{Z^2} \cdot R = \frac{(110\ V)^2}{(32{,}97\ \Omega)^2} \cdot 10\ \Omega = \boxed{111{,}3\ W}$$

19.34. *(*) Una bobina de reactancia inductiva $L \cdot \omega = 20\ \Omega$ y resistencia óhmica 15 Ω está conectada a una fuente de corriente alterna de 100 V eficaces y 50 Hz. Determinar la potencia consumida por dicha bobina y su coeficiente de autoinducción.*

Solución: La intensidad eficaz que atraviesa la bobina es:

$$I = \frac{100\ V}{\sqrt{R^2 + (L \cdot \omega)^2}} = \frac{100\ V}{\sqrt{(15\ \Omega)^2 + (20\ \Omega)^2}} = \frac{100\ V}{25\ \Omega} = 4\ A$$

Por otra parte:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{15\ \Omega}{25\ \Omega} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Por consiguiente:

$$P = E \cdot I \cdot \cos\varphi = 100\ V \cdot 4\ A \cdot 0{,}6 = \boxed{240\ W}$$

Hallemos, por último, el coeficiente de autoinducción de la bobina:

$$L = \frac{X_L}{2 \cdot \pi \cdot \nu} = \frac{20\ \Omega}{2 \cdot \pi \cdot 50\ \text{Hz}} = \boxed{6{,}37 \cdot 10^{-2}\text{H}}$$

19.35. *Al conectar a una red de 110 V una bobina con una resistencia óhmica de 3 ohmios circula una corriente de 10 A y 50 Hz. Deducir:*

a) La impedancia de la bobina.
b) El coeficiente de autoinducción.
c) La fórmula general de la intensidad instantánea.

Solución:

a) Según la ley de Ohm:

$$I = \frac{E}{Z}$$

por tanto:

$$Z = \frac{E}{I} = \frac{110\ \text{V}}{10\ \text{A}} = \boxed{11\ \Omega}$$

b) Como en el circuito no existen capacidades, la expresión general de la impedancia se reduce a:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

de donde:

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(11\ \Omega)^2 - (3\ \Omega)^2} = 10{,}58\ \Omega$$

Recordando que $X_L = L \cdot 2\pi \cdot \nu$, resulta:

$$L = \frac{X_L}{2\pi \cdot \nu} = \frac{10{,}58\ \Omega}{2\pi \cdot 50\ \text{Hz}} = \boxed{0{,}0337\ \text{H}}$$

c) Si la intensidad eficaz es de 10 A, la intensidad máxima valdrá:

$$I_{máx} = I \cdot \sqrt{2} = 10\ \text{A} \cdot 1{,}41 = 14{,}1\ \text{A}$$

Por tanto, la ecuación general de la intensidad instantánea será:

$$i = I_{máx} \cdot \text{sen}\ 2\pi\nu t = 14{,}1 \cdot \text{sen}\ 100\pi t\ (\text{A})$$

$$\boxed{i = 14{,}1 \cdot \text{sen}\ 100\pi t\ (\text{A})}$$

Esta ecuación es válida siempre que comencemos a contar el tiempo en el instante en que la intensidad se anula. Ahora bien, al existir autoin-

ducción en el circuito, la intensidad está retrasada con respecto a la fuerza electromotriz un ángulo φ tal que:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{3\ \Omega}{11\ \Omega} = 0{,}2727$$

de donde: $\varphi = 74°\ 10'$.

Por consiguiente, podremos escribir la ecuación general de la intensidad en la forma:

$$\boxed{\mathbf{i = 14{,}1 \cdot sen\ (100\pi t - 74°\ 10')\ (A)}}$$

19.36. *¿Cuál es la frecuencia de resonancia de un circuito que incluye una bobina de 1 henry de coeficiente de autoinducción y un condensador de 1 microfaradio de capacidad?*

Solución: La frecuencia de resonancia valdrá:

$$\nu = \frac{1}{2\pi\ \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi\ \sqrt{1\ H \cdot 10^{-6}\ F}} = \boxed{\mathbf{159\ s^{-1}}}$$

19.37. *Un circuito serie está constituido por los siguientes elementos: una resistencia pura de 25 ohmios, un condensador de 10 microfaradios y una bobina de 0,1 henrys y 12 ohmios de resistencia óhmica. Deducir: a) la impedancia del circuito; b) la intensidad de la corriente ($E = 220\ V$; $\nu = 50\ s^{-1}$).*

Solución:

a)

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L \cdot 2\pi \cdot \nu - \frac{1}{C \cdot 2\pi \cdot \nu}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(25\ \Omega)^2 + \left[0{,}1\ H \cdot 2\pi \cdot 50\ s^{-1} - \frac{1}{10 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 2\pi \cdot 50\ s^{-1}}\right]^2} =$$

$$= \boxed{\mathbf{288}\ \Omega}$$

b)

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{220\ V}{288\ \Omega} = \boxed{\mathbf{0{,}76\ A}}$$

19.38. *Una bobina cuyo coeficiente de autoinducción es 0,2 henrys y cuya resistencia óhmica es despreciable se conecta en serie con un condensador. El conjunto se alimenta con una tensión de 120 V en corriente alterna de frecuencia 50 s^{-1}. Si la intensidad de corriente es 3 A, ¿cuál es el valor de la reactancia capacitiva del condensador?*

Solución: Calculemos, en primer lugar, la impedancia del circuito y la reactancia inductiva de la bobina:

$$Z = \frac{E}{I} = \frac{120\ V}{3\ A} = 40\ \Omega$$

$$X_L = L \cdot 2\pi \cdot \nu = 0{,}2\ \text{H} \cdot 2\pi \cdot 50\ \text{s}^{-1} = 20\pi\ \Omega$$

Como en este caso: $Z = X_L - X_C$, resulta:

$$X_C = X_L - Z = 20\pi\ \Omega - 40\ \Omega = \boxed{22{,}8\ \Omega}$$

19.39. ***Un circuito de corriente alterna ofrece una resistencia pura de 75 Ω y tiene una impedancia de 150 Ω. ¿Qué potencia consume al aplicarle una tensión eficaz de 120 V?***

Solución: La intensidad de corriente es:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{120\ \text{V}}{150\ \Omega} = 0{,}8\ \text{A}$$

y el factor de potencia:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{75\ \Omega}{150\ \Omega} = 0{,}5$$

Por tanto, la potencia consumida en el circuito valdrá:

$$P = E \cdot I \cdot \cos \varphi = 120\ \text{V} \cdot 0{,}8\ \text{A} \cdot 0{,}5 = \boxed{48\ \text{W}}$$

19.40. ***Un circuito tiene una impedancia de 50 Ω y un factor de potencia 0,6 cuando se alimenta con una corriente alterna de 60 s^{-1}, estando el voltaje retrasado respecto a la intensidad.***

a) ¿Qué elementos componen el circuito?
b) ¿Qué resistencia ofrece cada uno?
c) ¿Qué elemento debiera colocarse en serie con él si se desea que su factor de potencia sea 1?
d) ¿Cuánto valdrá la reactancia de dicho elemento?

Solución:

a) Si el voltaje está retrasado respecto a la intensidad, el ángulo de desfasaje será negativo, y ello significa que el circuito está integrado por **una resistencia pura y un condensador,** o caso de haber una autoinducción, la reactancia capacitiva predomina sobre la inductiva.

b) Como:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = 0{,}6,\ R = 0{,}6 \cdot Z = 0{,}6 \cdot 50\ \Omega = 30\ \Omega$$

Ya que:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2},\ X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(50\ \Omega)^2 - (30\ \Omega)^2} = 40\ \Omega$$

$$\boxed{R = 30\ \Omega;\ X_C = 40\ \Omega}$$

c) Para que $\cos \varphi = 1$, ha de cumplirse que $Z = R$, y con ese objeto ha de intercalarse en serie en el circuito **una bobina.**

d) La reactancia inductiva de la bobina habrá de ser de **40** Ω, para así compensar la reactancia capacitiva del condensador. En cuanto al coeficiente de autoinducción de la bobina será:

$$L = \frac{X_L}{2\pi \cdot \nu} = \frac{40\ \Omega}{2\pi \cdot 60\ s^{-1}} = \boxed{\mathbf{0{,}106\ H}}$$

19.41. *Una bobina de coeficiente de autoinducción 0,7 henrys, un condensador de 10 microfaradios y una resistencia pura de 100 ohmios forman un circuito en serie, en cuyos extremos se aplica una diferencia de potencial eficaz de 115 V a 60 s^{-1}. Calcular:*

a) La reactancia inductiva.
b) La reactancia capacitiva.
c) La impedancia del circuito.
d) La intensidad eficaz.

Solución:

a) El valor de la reactancia inductiva es:

$$X_L = L \cdot \omega = L \cdot 2\pi \cdot \nu = 0{,}7\ H \cdot 2\pi \cdot 60\ s^{-1} = \boxed{\mathbf{264\ \Omega}}$$

b) Calculemos ahora la reactancia capacitiva:

$$X_C = \frac{1}{C \cdot \omega} = \frac{1}{C \cdot 2\pi \cdot \nu} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 2\pi \cdot 60\ s^{-1}} = \boxed{\mathbf{266\ \Omega}}$$

c) La impedancia del circuito valdrá:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(100\ \Omega)^2 + (264\ \Omega - 266\ \Omega)^2} \simeq \boxed{\mathbf{100\ \Omega}}$$

d)

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{115\ V}{100\ \Omega} = \boxed{\mathbf{1{,}15\ A}}$$

19.42. *Una fuerza electromotriz eficaz de 220 V y 50 s^{-1} de frecuencia está aplicada sobre una resistencia de 500 Ω en paralelo con un condensador de 4 microfaradios. ¿Qué intensidad de corriente atraviesa la resistencia? ¿Y el condensador?*

Solución: La intensidad de corriente que atraviesa la resistencia es:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{220\ V}{500\ \Omega} = \boxed{\mathbf{0{,}44\ A}}$$

Como la reactancia capacitiva del condensador es:

$$X_C = \frac{1}{C \cdot 2\pi \cdot \nu} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-6}\ F \cdot 2\pi \cdot 50\ s^{-1}} = 795{,}8\ \Omega$$

la intensidad que lo atraviesa será:

$$I = \frac{E}{X_C} = \frac{220 \text{ V}}{795{,}8 \ \Omega} = \boxed{0{,}28 \text{ A}}$$

19.43. *Una resistencia de 100 ohmios y una autoinducción de 0,1 henrys se conectan en serie a un generador de alterna de 220 V y 50 s^{-1}. Calcular:*

a) La impedancia del circuito.
b) La intensidad eficaz que lo recorre.
c) La intensidad máxima.
d) El desfasaje entre la intensidad y la tensión.

Solución:

a)

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (L \cdot 2\pi \cdot \nu)^2} =$$

$$= \sqrt{(100 \ \Omega)^2 + (0{,}1 \text{ H} \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1})^2} = \boxed{104{,}8 \ \Omega}$$

b) La intensidad eficaz que recorre el circuito será:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{220 \text{ V}}{104{,}8 \ \Omega} = \boxed{2{,}1 \text{ A}}$$

c)

$$I_{\text{máx}} = I \cdot \sqrt{2} = 2{,}1 \text{ A} \cdot \sqrt{2} = \boxed{2{,}97 \text{ A}}$$

d)

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{100 \ \Omega}{104{,}8 \ \Omega} = 0{,}9542$$

de donde:

$$\boxed{\varphi = 17{,}4°}$$

19.44. *Un circuito de tensión máxima 100 V y frecuencia 50 Hz contiene un condensador de 1 microfaradio. ¿Qué intensidad eficaz lo atraviesa?*

Solución: La tensión eficaz es:

$$E = \frac{E_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = \frac{100 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 70{,}7 \text{ V}$$

y la reactancia capacitiva:

$$X_C = \frac{1}{C \cdot 2\pi \cdot \nu} = \frac{1}{10^{-6} \text{ F} \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1}} = 3\,183{,}1 \ \Omega$$

Por tanto, la intensidad eficaz que atraviesa el circuito valdrá:

$$I = \frac{E}{X_C} = \frac{70{,}7\ V}{3\ 183{,}1\ \Omega} = \boxed{0{,}022\ A}$$

19.45. *Un circuito de control de sintonía se compone de una resistencia de 100 ohmios en serie con un condensador. El circuito ha sido proyectado para tener a 100 s⁻¹ una impedancia doble que a 300 s⁻¹. ¿Cuál ha de ser la capacidad del condensador?*

Solución: La impedancia de un circuito integrado por una resistencia y un condensador en serie viene dada por:

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(C \cdot 2\pi \cdot \nu)^2}}$$

Si la frecuencia de la corriente es de 300 s^{-1}:

$$Z = \sqrt{(100\ \Omega)^2 + \frac{1}{(C \cdot 2\pi \cdot 300\ s^{-1})^2}} \qquad [1]$$

mientras que a 100 s^{-1}:

$$2\,Z = \sqrt{(100\ \Omega)^2 + \frac{1}{(C \cdot 2\pi \cdot 100\ s^{-1})^2}} \qquad [2]$$

Dividiendo entre sí las expresiones [1] y [2] y elevando posteriormente al cuadrado, se obtiene:

$$4 = \frac{10\ 000 + \dfrac{1}{(C \cdot 2\pi \cdot 100)^2}}{10\ 000 + \dfrac{1}{(C \cdot 2\pi \cdot 300)^2}}$$

de donde resulta:

$$\boxed{C = 6{,}85\ \mu F}$$

19.46. *Un circuito de corriente alterna está constituido por los siguientes elementos, conectados en serie: un alternador que suministra una tensión máxima de 120 V, una resistencia óhmica de 80 ohmios, una reactancia inductiva de 70 ohmios y una reactancia capacitiva de 10 ohmios. Calcular:*

a) El desfasaje entre la intensidad y la tensión.
b) La intensidad máxima y su expresión compleja.
c) El coeficiente de autoinducción de la bobina si la frecuencia de la corriente es 50 Hz.
d) La intensidad eficaz de la corriente.

Solución:

a) La tangente del ángulo de desfasaje viene dada por:

$$\text{tg } \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{70\ \Omega - 10\ \Omega}{80\ \Omega} = 0{,}75$$

de donde:

$$\varphi = \text{arc tg } 0{,}75 = \boxed{36^\circ\ 52'}$$

b) Calcularemos primero la expresión compleja de la tensión. Las proyecciones del vector $\vec{E}$ sobre los ejes horizontal y vertical nos darán las componentes real e imaginaria, según se indica en la figura 19.12:

$a = E \cdot \cos \varphi = 120 \cdot 0{,}8 = 96$
$b = E \cdot \text{sen } \varphi = 120 \cdot 0{,}6 = 72$

Por tanto:

$$\vec{E} = 96 + 72\ i$$

La expresión compleja de la impedancia vendrá dada por:

$$\vec{Z} = R + (X_L - X_C)\ i = 80 + 60\ i$$

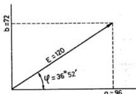


Fig. 19.12

y la intensidad compleja por:

$$\vec{I} = \frac{\vec{E}}{\vec{Z}} = \frac{96 + 72\ i}{80 + 60\ i} = 1{,}2 + 0\ i = 1{,}2$$

El valor máximo de la intensidad será:

$$I = \sqrt{1{,}2^2 + 0^2} = \boxed{1{,}2\ \text{A}}$$

c) El valor de la reactancia inductiva viene expresado por:

$$X_L = L \cdot 2\pi \cdot \nu$$

Por tanto:

$$L = \frac{X_L}{2\pi \cdot \nu} = \frac{70\ \Omega}{100\pi\ \text{s}^{-1}} = \boxed{0{,}223\ \text{H}}$$

d) La intensidad eficaz valdrá:

$$I = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}2\ \text{A}}{\sqrt{2}} = \boxed{0{,}85\ \text{A}}$$

19.47. *Un circuito está formado por un generador de corriente alterna, una bobina de autoinducción $L = 0{,}1$ H, una resistencia R y un condensador de capacidad C, todos los dispositivos conectados en serie. Los valores instantáneos de la tensión, en voltios, y de la intensidad, en amperios, cuando t está expresado en segundos, son, respectivamente:*

$$E = 200\sqrt{2} \cdot \text{sen}\,(300t - 15°)\ ;\ I = 10 \cdot \text{sen}\,(300t - 60°)$$

Calcular:

a) El valor de la resistencia R.
b) La capacidad C del condensador.

Solución:

a) La diferencia de fase, φ, entre la intensidad y la tensión es:

$$\varphi = 60° - 15° = 45°$$

Luego:

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = 1$$

de donde:

$$X_L - X_C = R$$

Además:

$$Z = \frac{E_{máx}}{I_{máx}} = \frac{200\sqrt{2}\ \text{V}}{10\ \text{A}} = 20\sqrt{2}\ \Omega$$

Por lo tanto:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} = 20\sqrt{2}\ \Omega$$

de donde se deduce:

$$\boxed{\mathbf{R = 20\ \Omega}}$$

b) Sabemos que:

$$X_L = L \cdot \omega = 0{,}1\ \text{H} \cdot 300\ \text{rad/s} = 30\ \Omega$$

Por lo tanto:

$$X_C = X_L - R = 30\ \Omega - 20\ \Omega = 10\ \Omega$$

Como $X_C = \dfrac{1}{C \cdot \omega}$, nos quedará:

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{300\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 10\ \Omega} = \boxed{\mathbf{\frac{1}{3} \cdot 10^{-3}\ F}}$$

19.48. *Un circuito de corriente alterna está constituido por dos ramas en paralelo: la primera de 3 Ω de resistencia óhmica y 4 Ω de inductancia y la segunda de 8 Ω de resistencia óhmica y 6 Ω de capacitancia. Los extremos de la derivación cierran circuito con un generador de corriente alterna de 100 V de fuerza electromotriz eficaz. Calcular:*

a) La impedancia del circuito.
b) La intensidad de corriente principal y en cada una de las ramas, así como sus desfasajes respectivos.

Solución:

a) Empleando la notación compleja, las impedancias de cada rama en paralelo son:

$$\vec{Z}_1 = R_1 + X_L\, i = 3 + 4i; \; Z_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ \Omega$$

$$\vec{Z}_2 = R_2 - X_C\, i = 8 - 6i; \; Z_2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10\ \Omega$$

con lo que la impedancia equivalente vendrá dada por:

$$\frac{1}{\vec{Z}} = \frac{1}{\vec{Z}_1} + \frac{1}{\vec{Z}_2} = \frac{1}{3 + 4i} + \frac{1}{8 - 6i} = \frac{11 - 2i}{48 + 14i}$$

y, por tanto:

$$\vec{Z} = \frac{48 + 14i}{11 - 2i} = 4 + 2i; \; Z = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}\ \Omega = \boxed{4{,}47\ \Omega}$$

b) La intensidad de corriente en el circuito principal viene dada por:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{100\ V}{2\sqrt{5}\ \Omega} = 10\sqrt{5}\ A = \boxed{22{,}36\ A}$$

siendo su desfasaje:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

de donde:

$$\boxed{\varphi = 26^\circ\, 34'}$$

Calculemos ahora las intensidades y los desfasajes en cada rama:

$$I_1 = \frac{E}{Z_1} = \frac{100\ V}{5\ \Omega} = \boxed{20\ A}; \quad \varphi_1 = \text{arc tg}\ \frac{4}{3} = \boxed{53^\circ\, 8'}$$

$$I_2 = \frac{E}{Z_2} = \frac{100\ V}{10\ \Omega} = \boxed{10\ A}; \quad \varphi_2 = \text{arc tg}\ \left(-\frac{6}{8}\right) = \boxed{-36^\circ\, 52'}$$

Obsérvese cómo las intensidades de corriente que circulan por ambas ramas en paralelo están desfasadas 90° entre sí, con lo que la intensidad de corriente principal se podría calcular fácilmente aplicando el teorema de Pitágoras:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{(20\ A)^2 + (10\ A)^2} = 10\sqrt{5}\ A = \boxed{22{,}36\ A}$$

19.49. *Consideremos un circuito formado por dos arrollamientos en paralelo cuyas resistencias óhmicas respectivas son 2 Ω y 3 Ω y cuyas reactancias parciales son 4 Ω y 1 Ω, respectivamente. Calcular la impedancia total y el desfasaje de la corriente alterna que recorre el circuito. Si la fuerza electromotriz eficaz es 140 V, calcular también la intensidad eficaz.*

Solución: Como $\vec{Z}_1 = 2 + 4i$ y $\vec{Z}_2 = 3 + i$, se tiene:

$$\frac{1}{\vec{Z}} = \frac{1}{\vec{Z}_1} + \frac{1}{\vec{Z}_2} = \frac{1}{2 + 4i} + \frac{1}{3 + i} = \frac{5 + 5i}{2 + 14i}$$

de donde:

$$\vec{Z} = \frac{2 + 14i}{5 + 5i} = 1{,}6 + 1{,}2\,i; \quad Z = \sqrt{1{,}6^2 + 1{,}2^2} = \boxed{2\ \Omega}$$

siendo el desfasaje de la corriente:

$$\varphi = \text{arc tg}\ \frac{1{,}2}{1{,}6} = \boxed{36°\ 52'}$$

La intensidad eficaz de la corriente alterna que recorre el circuito es:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{140\ V}{2\ \Omega} = \boxed{70\ A}$$

Como $Z_1 = \sqrt{20}\ \Omega$ y $Z_2 = \sqrt{10}\ \Omega$, las intensidades y sus desfasajes en cada derivación serán:

$$I_1 = \frac{E}{Z_1} = \frac{140\ V}{\sqrt{20}\ \Omega} = 31{,}3\ A; \quad \varphi_1 = \text{arc tg}\ \frac{4}{2} = 63°\ 26'$$

$$I_2 = \frac{E}{Z_2} = \frac{140\ V}{\sqrt{10}\ \Omega} = 44{,}3\ A; \quad \varphi_2 = \text{arc tg}\ \frac{1}{3} = 18°\ 26'$$

19.50. *Una impedancia de (12 + 16i) Ω se conecta en paralelo con otra de (10 − 20i) Ω a una fuente de (120 + 160i) V. Calcular la intensidad de corriente que circula por cada rama, la corriente procedente de la fuente y el factor de potencia total del circuito.*

Solución: Las intensidades de corriente que circulan por ambas ramas son:

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{E}}{\vec{Z}_1} = \frac{(120 + 160i)\ V}{(12 + 16i)\ \Omega} = 10\ A; \quad \boxed{I_1 = 10\ A}$$

$$\vec{I}_2 = \frac{\vec{E}}{\vec{Z}_2} = \frac{(120 + 160i)\ V}{(10 - 20i)\ \Omega} =$$

$$= (-4 + 8i)\ A; \quad I_2 = \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = \boxed{4\sqrt{5}\ A}$$

Calculemos ahora la impedancia total del circuito:

$$\frac{1}{\vec{Z}} = \frac{1}{\vec{Z}_1} + \frac{1}{\vec{Z}_2} = \frac{1}{12 + 16i} + \frac{1}{10 - 20i} = \frac{11 - 2i}{220 - 40i}$$

de donde:

$$\vec{Z} = \frac{220 - 40i}{11 - 2i} = 20\ \Omega; \quad Z = 20\ \Omega$$

Por tanto, la intensidad total será:

$$\vec{I} = \frac{\vec{E}}{\vec{Z}} = \frac{(120 + 160i)\ V}{20\ \Omega} = (6 + 8i)\ A; \quad I = \sqrt{6^2 + 8^2} = \boxed{10\ A}$$

Como para todo el circuito $\varphi = 0°$, el factor de potencia valdrá:

$$\boxed{\cos \varphi = 1}$$

20. ELECTRÓNICA

FORMULÁRIO-RESUMEN

Ecuación de Richardson-Dushman:

$$J_s = A \cdot T^2 \cdot e^{-\varphi/k \cdot T}$$

- J_s = densidad de corriente de saturación.
- A = constante de proporcionalidad.
- T = temperatura absoluta del filamento.
- k = constante de Boltzman = $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K
- φ = función trabajo o trabajo de extracción.

Ecuación de Langmuir-Child:

$$I_p = k \cdot V_p^{3/2}$$

- I_p = corriente de placa.
- V_p = potencial de placa.
- k = constante de proporcionalidad (perveancia).

PARÁMETROS DE UN TRIODO

$$A = \frac{1}{R_p} = \left(\frac{\Delta I_p}{\Delta V_p}\right)_{V_G = cte}$$ (R_p = resistencia o impedancia del triodo).

$$B = g_m = \left(\frac{\Delta I_p}{\Delta V_G}\right)_{V_p = cte}$$ (g_m = conductancia mutua).

$$m = \frac{B}{A} = -\left(\frac{\Delta V_p}{\Delta V_G}\right)_{I_p = cte}$$ (m = factor de amplificación).

$$\boxed{m = R_p \cdot g_m}$$

$$G = m \cdot \frac{R}{R + R_p}$$

- G = ganancia o factor de amplificación del voltaje.
- R = resistencia de carga.
- R_p = resistencia o impedancia del triodo.

TRANSISTOR

$$\boxed{I_E = I_B + I_C} \quad \begin{cases} I_E & = \text{intensidad de emisor.} \\ I_B & = \text{intensidad de base.} \\ I_C & = \text{intensidad de colector.} \end{cases}$$

$$\boxed{V_{CE} = V_{CB} + V_{BE}} \quad \begin{cases} V_{CE} & = \text{dif. de pot. entre colector y emisor.} \\ V_{BE} & = \text{dif. de pot. entre base y emisor.} \\ V_{CB} & = \text{dif. de pot. entre colector y base.} \end{cases}$$

PARÁMETROS DE UN TRANSISTOR

$$\alpha = -\left(\frac{\Delta I_C}{\Delta I_E}\right)_{V_{CB}=cte}$$ (α = ganancia de corriente emisor-colector).

$$\beta = \left(\frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}\right)_{V_{CE}=cte}$$ (β = ganancia de corriente de base a colector).

$$\boxed{\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$A = \frac{I_C^2 \cdot R_C}{I_E^2 \cdot R_E}$$ (A = ganancia de potencia).

20. ELECTRÓNICA

20.1. *¿Cuántos bornes o electrodos exteriores tiene el diodo de vacío? ¿Y el triodo?*

Solución: El diodo posee tres bornes exteriores: uno que corresponde al ánodo o placa y los otros dos a la corriente de calefacción del filamento.

En cuanto al triodo, sus electrodos exteriores son cuatro: tres de ellos, los mismos que en el diodo, y un cuarto borne que corresponde a la rejilla.

20.2. *¿Podremos conseguir que la corriente de placa en un diodo sea mayor que la de saturación?*

Solución: No. Dicha corriente se consigue cuando todos los electrones emitidos por el filamento alcanzan la placa, siendo imposible incrementar dicho número, a menos que se eleve la temperatura del filamento, o se le agreguen impurezas, lo que traería aparejado el aumento consiguiente de la corriente de saturación.

También aumenta la intensidad de corriente intercalando entre el filamento y la placa una rejilla conectada a un potencial positivo intermedio entre el de ambos electrodos, con lo cual el diodo se convierte en un triodo.

20.3. *¿Es cierto que si la rejilla de un triodo se hace negativa, deja de circular la corriente de placa?*

Solución: Para que deje de circular la corriente de placa será necesario que el potencial negativo de la rejilla sea tan elevado que impida a los electrones emitidos por el cátodo llegar a la placa. En la práctica, sin embargo, no sucede así: las tensiones negativas aplicadas a la rejilla suelen ser tan pequeñas que no llegan a anular —aunque sí disminuir— la corriente de placa.

20.4. *En un diodo ideal, que consta de dos electrodos planos y paralelos, separados 5 cm, ¿qué distancia recorrerá un electrón que abandona el cátodo con una energía inicial de 2 eV, cuando el ánodo se mantiene a un potencial de 10 voltios negativos respecto al cátodo?*

Solución: Dado que el campo eléctrico existente entre los dos electrodos es uniforme:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d} = \frac{10 \text{ V}}{5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 200 \text{ N/C}$$

La fuerza que actúa sobre un electrón situado en dicho campo es:

$$F = E \cdot q = 200 \ \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 3{,}2 \cdot 10^{-17} \text{ N}$$

Por tanto:

$$s = \frac{\text{Energía}}{F} = \frac{2\ \text{eV} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}}{3{,}2 \cdot 10^{-17}\ \text{N}} = 10^{-2}\ \text{m} = \boxed{1\ \text{cm}}$$

20.5. ***Un diodo de platino está funcionando durante 10 minutos. La tensión de la placa es de 400 V y la corriente de placa es de 25 μA. Si la masa de la placa es 0,5 g, determinar la elevación de temperatura que experimenta, debido al choque sobre ella de los electrones (el calor específico del platino es 0,032 cal/g · °C).***

Solución: Calculemos, en primer lugar, la energía cinética de los electrones:

$$E_c = q \cdot \Delta V = 25 \cdot 10^{-6}\ \text{A} \cdot 10\ \text{min} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} \cdot \frac{1\ \text{C}}{1\ \text{A} \cdot 1\ \text{s}} \cdot 400\ \text{V} = 6\ \text{J}$$

Al chocar los electrones contra la placa de platino su energía cinética se convierte en calor:

$$\text{Calor} = 6\ \text{J} \cdot \frac{1\ \text{cal}}{4{,}1855\ \text{J}} = 1{,}434\ \text{cal}$$

y este calor hace que la placa experimente una elevación de temperatura:

$$\Delta t = \frac{\text{Calor}}{m \cdot c} = \frac{1{,}434\ \text{cal}}{0{,}5\ \text{g} \cdot 0{,}032\ \dfrac{\text{cal}}{\text{g} \cdot °\text{C}}} = \boxed{89{,}6\ °\text{C}}$$

20.6. ***Sabiendo que para el volframio φ = 4,5 eV, determinar cómo variará la densidad de corriente de saturación en un diodo con un cátodo de dicho metal, si la temperatura pasa de 2 000 K a 3 000 K.***

Solución: La ecuación de Richardson-Dushman es: $J_s = A \cdot T^2 \cdot e^{-\varphi/kT}$

$$\text{A 3 000 K, } J_{3\,000} = A \cdot (3\,000\ \text{K})^2 \cdot e^{-\frac{4{,}5\ \text{eV} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 3\,000\ \text{K}}}$$

$$\text{A 2 000 K, } J_{2\,000} = A \cdot (2\,000\ \text{K})^2 \cdot e^{-\frac{4{,}5\ \text{eV} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 2\,000\ \text{K}}}$$

Dividiendo miembro a miembro las anteriores expresiones, obtenemos:

$$\frac{J_{3\,000}}{J_{2\,000}} = \left(\frac{3\,000\ \text{K}}{2\,000\ \text{K}}\right)^2 \cdot e^{\frac{4{,}5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}}\left[\frac{1}{2\,000} - \frac{1}{3\,000}\right]} = 2{,}85 \cdot e^{8{,}696} =$$

$$= 2{,}25 \cdot 5\,980 = 13\,450 \quad \boxed{\textbf{Se hará 13 450 veces mayor.}}$$

20.7. ***La densidad de emisión termoiónica de una superficie metálica es de 23,9 A · m⁻² a 3 000 K y de 1,65 · 10⁻³ A · m⁻² a 2 000 K. Hallar los valores de las constantes A y φ, correspondientes a dicha superficie metálica, suponiendo que se cumpla la ley de Richardson-Dushman.***

Solución: Aplicando la ecuación de Richardson-Dushman a ambas temperaturas, tenemos:

$$23{,}9\ \mathrm{A\cdot m^{-2}} = \mathrm{A}\cdot(3\,000\ \mathrm{K})^2\cdot e^{-\frac{\varphi}{1{,}38\cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\cdot 3\,000\ \mathrm{K}}} \qquad [1]$$

$$1{,}65\cdot 10^{-3}\ \mathrm{A\cdot m^{-2}} = \mathrm{A}\cdot(2\,000\ \mathrm{K})^2\cdot e^{-\frac{\varphi}{1{,}38\cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\cdot 2\,000\ \mathrm{K}}} \qquad [2]$$

Al dividir miembro a miembro las expresiones [1] y [2] se obtiene:

$$\frac{23{,}9\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}}{1{,}65\cdot 10^{-3}\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}} = 14\,485 =$$

$$= \left(\frac{3\,000\ \mathrm{K}}{2\,000\ \mathrm{K}}\right)^2\cdot e^{\frac{\varphi}{1{,}38\cdot 10^{-23}}\left[\frac{1}{2\,000}-\frac{1}{3\,000}\right]} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot e^{\frac{\varphi}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 6\cdot 10^3}} = 2{,}25\cdot e^{1{,}208\cdot 10^{19}\,\varphi}$$

Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros:

$$\ln 14\,485 = \ln 2{,}25 + 1{,}208\cdot 10^{19}\,\varphi$$

de donde:

$$\varphi = \frac{\ln 14\,485 - \ln 2{,}25}{1{,}208\cdot 10^{19}} = 7{,}26\cdot 19^{-19}\ \mathrm{J} =$$

$$= 7{,}26\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}\cdot\frac{1\ \mathrm{eV}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}} = \boxed{\mathbf{4{,}54\ eV}}$$

Sustituyendo en la ecuación [1]:

$$\mathrm{A} = \frac{23{,}9\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}}{(3\,000\ \mathrm{K})^2\cdot e^{-\frac{7{,}26\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\cdot 3\,000\ \mathrm{K}}}} = \frac{23{,}9\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}}{9\cdot 10^6\ \mathrm{K^2}\cdot e^{-17{,}53}} =$$

$$= \boxed{\mathbf{109{,}6\ \frac{A}{m^2\cdot K^2}}}$$

20.8. *Disponemos de un diodo en el que, en una experiencia de laboratorio, se ha observado el paso de una corriente de 0,8 A, al aplicarle una tensión de placa de 100 V. Hallar la tensión que es preciso aplicar para que la intensidad de corriente observada sea de 0,4 A, a la misma temperatura, sabiendo que en las condiciones de la experiencia la corriente de saturación es de 1,5 A.*

Solución: Las condiciones en las que se realizan ambas experiencias corresponden a valores menores que los de saturación, zona en la que es aplicable la ley de Langmuir-Child. Los datos de la experiencia primera nos sirven para determinar el valor de la constante K:

$$K = \frac{I_P}{V_P^{3/2}} = \frac{0{,}8 \text{ A}}{(100 \text{ V})^{3/2}} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{V}^{-3/2}$$

Tras esto, ya se puede resolver el problema, calculando la tensión pedida:

$$V_p = \left(\frac{I_P}{K}\right)^{2/3} = \left(\frac{0{,}4 \text{ A}}{8 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{V}^{-3/2}}\right)^{2/3} = \boxed{\mathbf{63 \text{ V}}}$$

20.9. *En un triodo de vacío con el cátodo conectado a tierra los potenciales de placa y rejilla son, respectivamente, 100 V y −6 V. Si el cátodo emite un electrón con una energía cinética de 8 eV, ¿qué energía cinética tendrá al llegar a la rejilla? ¿Y al alcanzar la placa?*

Solución: Como el potencial de la rejilla es negativo, frenará a los electrones, disminuyendo su energía cinética en una cantidad equivalente a 6 eV. Por consiguiente, la energía cinética final del electrón al llegar a la rejilla será:

$$\boxed{\mathbf{E_c = 2 \text{ eV}}}$$

Razonando de manera análoga, la energía cinética del electrón al llegar a la placa aumentará en 100 eV. Por consiguiente, su energía cinética final será:

$$\boxed{\mathbf{E_c' = 108 \text{ eV}}}$$

20.10. *En un determinado triodo de vacío la corriente de placa es de 6 mA cuando el potencial de placa es $V_p = 150$ V y el de rejilla $V_G = -4$ V. Si aumentamos el potencial de placa hasta $V_p' = 200$ V y disminuimos el de rejilla a $V_G = -6{,}5$ V, se consigue que la corriente de placa mantenga el mismo valor de antes. Hallar el factor de amplificación de dicho triodo.*

Solución:

$$m = -\left(\frac{\Delta V_P}{\Delta V_G}\right)_{I_p = \text{cte}} = -\frac{200 \text{ V} - 150 \text{ V}}{-6{,}5 \text{ V} - (-4 \text{ V})} = \boxed{\mathbf{20}}$$

20.11. *Supongamos un triodo cualquiera conectado para funcionar como amplificador y cuyas curvas características vemos en la figura 20.1. Sabemos que $V_G = -8$ V; $E_p = 360$ V y $R = 10$ kΩ. Analizar el comportamiento del triodo.*

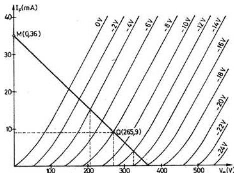


Fig. 20.1

Solución: Tracemos, en primer lugar, la línea de carga, uniendo los puntos M y N. Como:

$$I_P = \frac{E_P}{R} = \frac{360 \text{ V}}{10^4 \ \Omega} = 36 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 36 \text{ mA}$$

resulta que las coordenadas de los puntos M y N son: M (0, 36 mA) y N (360 V, 0).

La intersección de la línea de carga con la curva característica correspondiente a $V_G = -8$ V nos da el punto de funcionamiento:

Q (265 V, 9 mA)

Si conectamos a la entrada una señal alterna de ±4 V de tensión, los valores extremos del potencial de rejilla que obtenemos son:

$$-8 \text{ V} + 4 \text{ V} = -4 \text{ V}$$
$$-8 \text{ V} - 4 \text{ V} = -12 \text{ V}$$

La línea de carga corta a la característica $V_G = -4$ V en $V_{p_1} = 205$ V y a la $V_G = -12$ V en $V_{p_2} = 315$ V. Por lo tanto, la tensión de placa entre máximo y mínimo es: 315 V − 205 V = 110 V. En consecuencia, el factor de amplificación valdrá:

$$m = -\left(\frac{\Delta V_P}{\Delta V_G}\right)_{I_p=\text{cte}} = -\frac{315 \text{ V} - 205 \text{ V}}{-12 \text{ V} - (-4 \text{ V})} = \boxed{13{,}75}$$

20.12. *La figura 20.2 representa las curvas características $I_p = f(V_p)$ de un triodo de vacío, cuyo punto de trabajo es Q (V_p = 86 V; V_G = −5 V). Calcular el valor de los parámetros R_p, g_m y m para dicho triodo.*

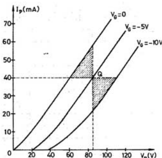


Fig. 20.2

Solución:

$$R_p = \left(\frac{\Delta V_p}{\Delta I_p}\right)_{V_G=cte} = \frac{26\ V}{20 \cdot 10^{-3}\ A} = 1{,}3 \cdot 10^3\ \Omega = 1{,}3\ k\Omega$$

$$g_m = \left(\frac{\Delta I_p}{\Delta V_G}\right)_{V_p=cte} = \frac{18 \cdot 10^{-3}\ A}{5\ V} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}\ mhos$$

$$m = -\left(\frac{\Delta V_p}{\Delta V_G}\right)_{I_p=cte} = \frac{24\ V}{5\ V} = 4{,}8 \simeq R_p \cdot g_m$$

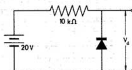
$$\boxed{R_p = 1{,}3\ k\Omega;\ g_m = 3{,}6 \cdot 10^{-3}\ mhos;\ m = 4{,}8}$$

20.13. *Tenemos un triodo de vacío de 6 000 Ω de impedancia y factor de amplificación m = 25, conectado en un circuito de resistencia de carga R = 4 · 10⁴ Ω. Determinar la ganancia de dicho triodo.*

Solución:

$$G = m \cdot \frac{R}{R + R_p} = 25 \cdot \frac{4 \cdot 10^4\ \Omega}{4 \cdot 10^4\ \Omega + 6 \cdot 10^3\ \Omega} = \boxed{21{,}7}$$

20.14. *Calcula la tensión de salida, V_d, en el circuito esquematizado en la figura 20.3.*



Solución: Ya que la polarización es inversa, la intensidad de corriente que circula a través del diodo es prácticamente nula y en consecuencia:

$$\boxed{\mathbf{V_d \simeq 20\ V}}$$

Fig. 20.3

20.15. *¿Cuáles serán las indicaciones del miliamperímetro y del voltímetro conectados en los circuitos a y b de la figura 20.4?*

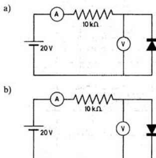


Fig. 20.4

Solución: Ya que en el circuito a) la polarización es inversa, la intensidad de corriente que circula es prácticamente nula y el voltímetro marcará aproximadamente 20 V:

$$\boxed{\mathbf{I \simeq 0;\ V \simeq 20\ V}}$$

En el circuito b) la polarización es directa; el voltímetro marcará prácticamente 0 V, mientras que la indicación del amperímetro será:

$$I \simeq \frac{20\ \text{V}}{10^4\ \Omega} \simeq 2 \cdot 10^{-3}\ \text{A} = 2\ \text{mA}$$

$$\boxed{\mathbf{I = 2\ mA;\ V \simeq 0}}$$

20.16. *En la figura 20.5 vemos reproducida la característica de un diodo de unión (representación gráfica de I en función de V). Si dicho diodo lo conectamos a un circuito, tal como se indica en la figura 20.6, se pide calcular la intensidad de corriente que atraviesa el diodo, así como la tensión V.*

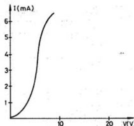


Fig. 20.5

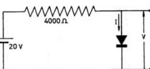


Fig. 20.6

Solución: Apliquemos la ley de Ohm al circuito de la figura 20.6:

$$20 = 4\,000 \cdot I + V$$

Esta ecuación, la ecuación del circuito, representa una línea recta, la llamada recta de carga. Para trazarla no hay más que determinar los puntos en que corta a los ejes coordenados. Tengamos en cuenta para ello que:

Para $I = 0$:
$V = 20$ V
Para $V = 0$:
$I = 5 \cdot 10^{-3}$ A $= 5$ mA

Una vez trazada la recta (véase fig. 20.7), su punto de intersección con la característica del diodo nos dará los valores de la intensidad y de la tensión pedidos. Estos valores son:

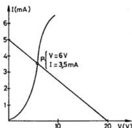


Fig. 20.7

V = 6 V; I = 3,5 mA

20.17. *¿Llegará un momento en que los transistores sustituyan por completo a las válvulas electrónicas?*

Solución: Es difícil predecir lo que en el futuro pueda suceder a este respecto. Sin embargo, en la actualidad, los transistores no han logrado aún sustituir a las válvulas electrónicas en los circuitos de potencia elevada.

20.18. *Calcular el valor de las resistencias R_B, R_C y R_E en el circuito de la figura 20.8, en el que hay un transistor npn, con $\alpha = 1$ y $\beta = 200$, conectado en base común, cumpliéndose en dicho circuito que $R_C = 5\ R_E$.*

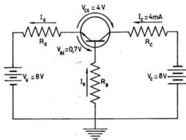


Fig. 20.8

Solución: Apliquemos al circuito las leyes de Kirchhoff, así como las relaciones entre las corrientes del transistor. Procediendo de esta manera, tenemos:

$$I_C \cdot R_C + V_{CE} + I_E \cdot R_E = V_C + V_E$$
$$I_B \cdot R_B + V_{BE} + I_E \cdot R_E = V_E$$

Teniendo en cuenta los datos del problema, y ya que $\alpha = 1$ y $\beta = 200$, se tiene:

$$I_C = I_E = \beta \cdot I_B = 200 \cdot I_B$$

de donde:

$$I_B = \frac{I_C}{200} = \frac{4 \cdot 10^{-3}\ A}{200} = 2 \cdot 10^{-5}\ A = 20\ \mu A$$

Sustituyendo todos estos datos, las ecuaciones del circuito quedan reducidas a:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \cdot 10^{-3}\ A \cdot 5\ R_E + 4\ V + 4 \cdot 10^{-3}\ A \cdot R_E = 8\ V + 8\ V \\ 2 \cdot 10^{-5}\ A \cdot R_B + 0{,}7\ V + 4 \cdot 10^{-3}\ A \cdot R_E = 8\ V \end{array}\right\}$$

De la primera ecuación se obtiene:

$$\boxed{R_E = 500\ \Omega}$$

Como $R_C = 5\ R_E$, sustituyendo, resulta:

$$\boxed{R_C = 2\ 500\ \Omega}$$

Finalmente, de la segunda ecuación obtenemos:

$$\boxed{\mathbf{R_B = 265\,000\ \Omega = 265\ k\Omega}}$$

20.19. ***En el circuito de la figura 20.9 tenemos trabajando un transistor de silicio, del tipo npn, conectado en emisor común. Si para dicho transistor $\beta = 150$, se pide calcular el punto de trabajo (I_B, I_C y V_{CE}). (Para un transistor de silicio npn, $V_{BE} = +0{,}6$ V.)***

Solución: El problema se resuelve sin más que aplicar las ecuaciones del circuito.

Para el circuito de base:

$$12\ \text{V} = 2 \cdot 10^5\ \Omega \cdot I_B + V_{BE} + 10^2\ \Omega \cdot I_E$$

Para el del colector:

$$12\ \text{V} = 10^3\ \Omega \cdot I_C + V_{CE} + 10^2\ \Omega \cdot I_E$$

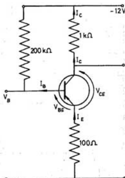


Fig. 20.9

Por otra parte:

$$I_C = \beta \cdot I_B = 150 \cdot I_B$$

Además:

$$I_E = I_C + I_B = \beta \cdot I_B + I_B = (\beta + 1) \cdot I_B = 151 \cdot I_B$$

Sustituyendo este valor de I_E en la ecuación primera, teniendo en cuenta, además, que para un transistor de silicio npn, $V_{BE} = +0{,}6$ V, resulta:

$$\boxed{\mathbf{I_B = 5{,}3 \cdot 10^{-5}\ A = 53\ \mu A}}$$

De acuerdo con la tercera ecuación:

$$I_C = 150 \cdot I_B = 150 \cdot 5{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{A} = 7{,}95 \cdot 10^{-3}\ \text{A} = 7{,}95\ \text{mA}$$

$$\boxed{\mathbf{I_C = 7{,}95\ mA}}$$

Por último, de la ecuación segunda se obtiene:

$$\boxed{\mathbf{V_{CE} = 3{,}25\ V}}$$

Este problema se puede resolver de una forma aproximada, sin más que despreciar 1 frente a β, lo cual es permisible siempre que β sea suficientemente grande ($\beta > 50$). Los valores hallados de esta manera son totalmente coincidentes con los obtenidos anteriormente.

20.20. ***En el circuito de la figura 20.10 tenemos un transistor de silicio del tipo npn, conectado en emisor común, con $\beta = 200$. Calcular I_B, I_C y V_{CE}. (Para un transistor de silicio npn, $V_{BE} = +0,6$ V.)***

Solución: Apliquemos las leyes de Kirchhoff y las relaciones entre las corrientes del transistor.

Para el circuito de base:

$$12 \text{ V} = 5 \cdot 10^5 \ \Omega \cdot I_B + V_{BE} \qquad [1]$$

Para el del colector:

$$12 \text{ V} = 500 \ \Omega \cdot I_C + V_{CE} \qquad [2]$$

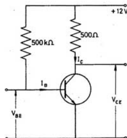


Fig. 20.10

Por otra parte:

$$I_C = \beta \cdot I_B = 200 \cdot I_B \qquad [3]$$

Como para un transistor de silicio npn, $V_{BE} = +0,6$ V, sustituyendo en la ecuación [1] obtenemos:

$$\boxed{I_B = 2,28 \cdot 10^{-5} \text{ A} = 22,8 \ \mu\text{A}}$$

Pasemos ahora a la ecuación [3]:

$$I_C = 200 \cdot I_B = 200 \cdot 2,28 \cdot 10^{-5} \text{ A} = 4,56 \cdot 10^{-3} \text{ A} = \boxed{4,56 \text{ mA}}$$

Si este valor de I_C lo sustituimos en la ecuación [2], se llega, por último, a:

$$\boxed{V_{CE} = 9,72 \text{ V}}$$

20.21. ***En el circuito de la figura 20.11 tenemos trabajando un transistor de silicio, del tipo pnp, conectado en emisor común, con resistencia de emisor. Si para dicho transistor $\beta = 150$ y $V_{BE} = -0,6$ V, se pide calcular el punto de trabajo (I_B, I_C y V_{CE}).***

Solución: El problema se resuelve aplicando las ecuaciones del circuito. Para el circuito de base:

$$0 - (-12 \text{ V}) = 2 \cdot 10^5 \ \Omega \cdot I_B - V_{BE} + 10^2 \ \Omega \cdot I_E \qquad [1]$$

Para el del colector:

$$0 - (-12 \text{ V}) = 10^3 \ \Omega \cdot I_C - V_{CE} + 10^2 \ \Omega \cdot I_E \qquad [2]$$

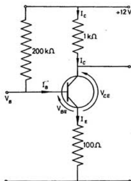


Fig. 20.11

Por otra parte:

$$I_C = \beta \cdot I_B = 150 \cdot I_B \qquad [3]$$

$$I_E = I_C + I_B = \beta \cdot I_B + I_B = (\beta + 1) \cdot I_B = 151 \cdot I_B \qquad [4]$$

Sustituyendo este valor de I_E en la ecuación [1], teniendo en cuenta, además, que para un transistor de silicio del tipo pnp, $V_{BE} = -0{,}6$ V, resulta:

$$\boxed{\mathbf{I_B = 5{,}3 \cdot 10^{-5}\ A = 53\ \mu A}}$$

De acuerdo con la ecuación [3]:

$$I_C = 150 \cdot I_B = 150 \cdot 5{,}3 \cdot 10^{-5}\ A = 7{,}95 \cdot 10^{-3}\ A = 7{,}95\ mA$$

$$\boxed{\mathbf{I_C = 7{,}95 \cdot 10^{-3}\ A = 7{,}95\ mA}}$$

Por último, de la ecuación [2] se obtiene:

$$\boxed{\mathbf{V_{CE} = -3{,}25\ V}}$$

Para la resolución del problema de una forma más rápida, se puede despreciar 1 frente a β. Operando de esta manera, tenemos:

$$\boxed{\mathbf{I_B = 53\ \mu A;\ I_C = 7{,}95\ mA;\ V_{CE} = -3{,}255\ V}}$$

Puede constatarse que estos valores son totalmente concordantes con los obtenidos anteriormente.

20.22. *Calcular el punto de trabajo (I_B, I_C y V_{CE}) para el circuito esquematizado en la figura 20.12 (V_{BE} = +0,6 V; β = 250).*

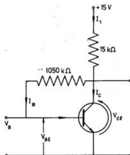


Fig. 20.12

Solución: Aplicando las ecuaciones del circuito, tenemos:

Para el circuito del colector:

$$15 \text{ V} = 1{,}5 \cdot 10^4 \ \Omega \cdot I_1 + V_{CE} \qquad [1]$$

Para el de base:

$$15 \text{ V} = 1{,}5 \cdot 10^4 \ \Omega \cdot I_1 + 1{,}05 \cdot 10^6 \ \Omega \cdot I_B + V_{BE} \qquad [2]$$

Obsérvese, analizando el diagrama del circuito, que la corriente I_1 es igual a la corriente de colector más la corriente de base, es decir:

$$I_1 = I_C + I_B = \beta \cdot I_B + I_B = (\beta + 1) \cdot I_B \simeq \beta \cdot I_B$$

(ya que $\beta \gg 1$).

Con esto, las ecuaciones anteriores [1] y [2] quedan reducidas a:

$$15 \text{ V} = 1{,}5 \cdot 10^4 \ \Omega \cdot \beta \cdot I_B + V_{CE} \qquad [1']$$

$$15 \text{ V} = 1{,}5 \cdot 10^4 \ \Omega \cdot \beta \cdot I_B + 1{,}05 \cdot 10^6 \ \Omega \cdot I_B + V_{BE} \qquad [2']$$

Ya que para el transistor del circuito representado en la figura, $\beta = 250$ y $V_{BE} = +0{,}6$ V, de la ecuación [2′], se obtiene:

$$\boxed{\mathbf{I_B = 3 \cdot 10^{-6} \ A = 3 \ \mu A}}$$

Por otra parte:

$$I_C = \beta \cdot I_B = 250 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \text{ A} = 750 \cdot 10^{-6} \text{ A} = \boxed{\mathbf{0{,}75 \ mA}}$$

Por último, de la ecuación [1′] se llega a:

$$\boxed{V_{CE} = 3{,}75\ V}$$

20.23. ***Calcular el punto de trabajo del transistor de silicio npn de la figura 20.13, para el cual $\beta = 300$. (Para un transistor de silicio npn, $V_{BE} = +0{,}6$ V.)***

Solución: En la figura hemos omitido gran parte de la simbología que aparecía explícita en otros problemas.

Para el circuito del colector:

$$21{,}2\ V = 10^4\ \Omega \cdot I_1 + V_{CE} + 500\ \Omega \cdot I_E \quad [1]$$

Para el de la base:

$$21{,}2\ V = 10^4\ \Omega \cdot I_1 + 2 \cdot 10^6\ \Omega \cdot I_B + V_{BE} + 500\ \Omega \cdot I_E \quad [2]$$

Obsérvese, analizando el circuito de la figura, que la corriente I_1 es igual a la corriente de colector más la corriente de base, es decir:

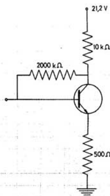


Fig. 20.13

$$I_1 = I_C + I_B = \beta \cdot I_B + I_B = (\beta + 1) \cdot I_B \simeq \beta \cdot I_B$$

(ya que $\beta \gg 1$). Además:

$$I_E \simeq I_C \simeq \beta \cdot I_B$$

Con esto, las anteriores ecuaciones [1] y [2] quedan reducidas a:

$$21{,}2\ V = 10^4\ \Omega \cdot \beta \cdot I_B + V_{CE} + 500\ \Omega \cdot \beta \cdot I_B \quad [1']$$

$$21{,}2\ V = 10^4\ \Omega \cdot \beta \cdot I_B + 2 \cdot 10^6\ \Omega \cdot I_B + V_{BE} + 500\ \Omega \cdot \beta \cdot I_B \quad [2']$$

Ya que para este transistor $\beta = 300$ y $V_{BE} = +0{,}6$ V, de la ecuación [2′] se obtiene:

$$\boxed{I_B = 4 \cdot 10^{-6}\ A = 4\ \mu A}$$

Por otra parte:

$$I_C = \beta \cdot I_B = 300 \cdot 4 \cdot 10^{-6}\ A = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ A = 1{,}2\ mA$$

$$\boxed{I_C = 1{,}2\ mA}$$

Por último, de la ecuación [1′] se llega a:

$$\boxed{V_{CE} = 8{,}6\ V}$$

20.24. ***Calcular el punto de trabajo del transistor de silicio npn de la figura 20.14, para el cual $\beta = 150$. (Para un transistor de silicio npn, $V_{BE} = +0{,}6$ V.)***

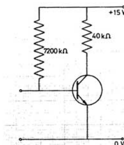


Fig. 20.14

Solución: Del mismo modo que en los problemas anteriores, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$15\ V = 7{,}2 \cdot 10^6\ \Omega \cdot I_B + V_{BE} \quad [1]$$

$$15\ V = 4 \cdot 10^4\ \Omega \cdot I_C + V_{CE} \quad [2]$$

$$I_C = \beta \cdot I_B = 150 \cdot I_B \quad [3]$$

Como $V_{BE} = +0{,}6$ V, sustituyendo en la ecuación [1], obtenemos:

$$\boxed{I_B = 2 \cdot 10^{-6}\ A = 2\ \mu A}$$

Pasemos ahora a la ecuación [3]:

$$I_C = 150 \cdot I_B = 150 \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ A = 3 \cdot 10^{-4}\ A = 0{,}3\ mA$$

$$\boxed{I_C = 3 \cdot 10^{-4}\ A = 0{,}3\ mA}$$

Por último, de la ecuación [2] se llega a:

$$\boxed{V_{CE} = 3\ V}$$

20.25. ***Dado el circuito de la figura 20.15, en el que hay un transistor del tipo npn, con $\alpha = 1$ y $\beta = 200$, conectado en emisor común, hallar los valores de I_B, I_C, I_E y V_{CE}.***

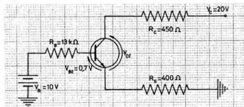


Fig. 20.15

Solución: Apliquemos las leyes de Kirchhoff al circuito de la figura, teniendo en cuenta que los puntos conectados a tierra están a potencial cero. Resulta:

$$I_B \cdot R_B + V_{BE} + I_E \cdot R_E = V_B \quad [1]$$

$$I_C \cdot R_C + V_{CE} + I_E \cdot R_E = V_C \quad [2]$$

Por otra parte, ya que $I_C = \beta \cdot I_B$ e $I_C = \alpha \cdot I_E$, como $\alpha = 1$ y $\beta = 200$, tenemos:

$$I_C = I_E = 200 \cdot I_B$$

Sustituyendo los datos del enunciado del problema, las ecuaciones del circuito quedan reducidas a:

$$\left.\begin{array}{l} 9{,}3 \cdot 10^4\ \Omega \cdot I_B + 0{,}7\ V = 10\ V \\ 17 \cdot 10^4\ \Omega \cdot I_B + V_{CE} = 20\ V \end{array}\right\}$$

La resolución de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas conduce a:

$$\boxed{\mathbf{I_B = 10^{-4}\ A = 0{,}1\ mA;\ V_{CE} = 3\ V}}$$

Por otra parte:

$$I_C = I_E = 200 \cdot I_B = 200 \cdot 0{,}1\ mA = 20\ mA$$

$$\boxed{\mathbf{I_C = I_E = 20\ mA}}$$

21. MOVIMIENTO ONDULATORIO

FORMULARIO-RESUMEN

Velocidad de propagación de una onda transversal a lo largo de una cuerda tensa:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \begin{cases} T = \text{tensión de la cuerda.} \\ \mu = \text{densidad lineal de la cuerda.} \end{cases}$$

Velocidad de propagación de una onda longitudinal en un sólido:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \begin{cases} E = \text{módulo de Young.} \\ \rho = \text{densidad del medio.} \end{cases}$$

Velocidad de propagación de una onda longitudinal en un fluido:

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad \{ K = \text{módulo de compresibilidad del fluido.}$$

Si el fluido es un gas:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T}{M}} \quad \begin{cases} \gamma = \text{coeficiente adiabático.} \\ R = \text{constante de los gases.} \\ M = \text{masa molecular del gas.} \\ T = \text{temperatura absoluta.} \end{cases}$$

VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu \quad \begin{cases} \lambda = \text{longitud de onda.} \\ T = \text{período.} \\ \nu = \text{frecuencia.} \end{cases}$$

ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

$$s = A \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t \pm kx)$$

(signo positivo si la onda avanza en el sentido negativo del eje OX y negativo si avanza en el sentido positivo).

$$k \text{ (número de ondas)} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

Onda plana: $\dfrac{\delta^2 s}{\delta x^2} = \dfrac{1}{v^2} \cdot \dfrac{\delta^2 s}{\delta t^2}$

Onda esférica: $\dfrac{\delta^2 s}{\delta x^2} + \dfrac{\delta^2 s}{\delta y^2} + \dfrac{\delta^2 s}{\delta z^2} = \Delta s = \dfrac{1}{v^2} \cdot \dfrac{\delta^2 s}{\delta t^2}$

ENERGÍA DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

$$E = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot m}{T^2} \cdot A^2 = 2\pi^2 \cdot m \cdot \nu^2 \cdot A^2$$

INTENSIDAD, I, DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

$$I = \frac{p}{4\pi \cdot r^2} \quad \begin{cases} p = \text{potencia emisiva del foco.} \\ r = \text{distancia.} \end{cases}$$

VARIACIÓN DE LA INTENSIDAD Y DE LA AMPLITUD CON LA DISTANCIA

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

LEY GENERAL DE LA ABSORCIÓN DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

$$\boxed{I = I_o \cdot e^{-\alpha \cdot l}} \quad \begin{cases} I_o = \text{intensidad incidente.} \\ I = \text{intensidad emergente.} \\ l = \text{espesor del medio.} \\ \alpha = \text{coeficiente de absorción.} \end{cases}$$

INTERFERENCIAS

Constructivas: Amplitud máxima ($A = A_1 + A_2$)

$$x_1 - x_2 = n \cdot \lambda$$

Destructivas: Amplitud mínima ($A = A_1 - A_2$)

$$x_1 - x_2 = (2n + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

ONDAS ESTACIONARIAS

$$S = 2\,A \cdot \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$$

Nodos: $x = (2n + 1)\ \frac{\lambda}{4}$; vientres: $x = \frac{2n\lambda}{4}$

Distancia entre dos nodos o entre dos vientres consecutivos $= \frac{\lambda}{2}$

REFRACCIÓN

Ley de Snell: $\boxed{\frac{\textbf{sen i}}{\textbf{sen r}} = \frac{\mathbf{v_1}}{\mathbf{v_2}} = \mathbf{n}}$ (n = índice de refracción)

EFECTO DOPPLER-FIZEAU

$$\boxed{\nu' = \nu \cdot \frac{\mathbf{v \pm v_o}}{\mathbf{v \pm v_F}}}$$

- v = velocidad de la onda.
- v_o = velocidad del observador.
- v_F = velocidad del foco.
- ν = frecuencia real.
- ν' = frecuencia aparente.

Signos
- v_o
  - positivo: el observador se acerca al foco.
  - negativo: el observador se aleja del foco.
- v_F
  - positivo: el foco se aleja del observador.
  - negativo: el foco se acerca al observador.

Si el foco está fijo ($v_F = 0$): $\boxed{\nu' = \nu\ \left(\mathbf{1 \pm \frac{v_o}{v}}\right)}$

Si el observador está fijo ($v_o = 0$): $\boxed{\nu' = \nu\ \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v \pm v_F'}}}$

21. MOVIMIENTO ONDULATORIO

21.1. *¿Cómo se mueven las partículas en un movimiento ondulatorio?*

Solución: Las partículas del medio elástico donde se propaga un movimiento ondulatorio únicamente vibran a un lado y a otro de su posición de equilibrio.

Es decir: en un movimiento ondulatorio lo que se propaga es la energía; pero no las partículas vibrantes que han recibido esa energía.

21.2. *¿En qué se diferencian el movimiento ondulatorio y el vibratorio?*

Solución: El movimiento vibratorio consiste en el desplazamiento de una partícula a un lado y a otro de su posición de equilibrio. El movimiento ondulatorio consiste en la propagación de un movimiento vibratorio en el seno de un medio elástico a través de sus partículas. En el caso particular de las ondas electromagnéticas no es necesaria la existencia de un medio material.

21.3. *Si es cierto que una onda transporta energía y no materia, ¿cómo es posible que una ola nos arrastre consigo?*

Solución: Las partículas de agua que constituyen la ola —originada por la acción del viento— no sólo se mueven verticalmente, sino que también describen trayectorias circulares en la misma dirección en que se propaga la ola, lo que motiva un arrastre de todos los objetos que se encuentran en su superficie.

21.4. *Siendo 1,7 cm la longitud de una onda sonora y 20 000 ciclos/s la frecuencia del movimiento vibratorio que la origina, calcular la velocidad de propagación del sonido.*

Solución:

$$v = \lambda \cdot \nu = 1{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot 2 \cdot 10^{4}\ \frac{\text{ciclos}}{\text{s}} = \boxed{340\ \text{m/s}}$$

21.5. *(*) Las ondas sonoras se propagan en el aire con una velocidad de 340 m/s. El oído humano percibe las frecuencias comprendidas entre 20 y 20 000 Hz. ¿Cuál es el intervalo de longitudes de onda de estos sonidos?*

Solución: Ya que $\lambda = \frac{c}{\nu}$, tenemos:

$$\lambda_1 = \frac{v}{\nu_1} = \frac{340\ \text{m/s}}{20\ \text{s}^{-1}} = 17\ \text{m}$$

$$\lambda_2 = \frac{v}{\nu_2} = \frac{340\ \text{m/s}}{20\ 000\ \text{s}^{-1}} = 0{,}017\ \text{m} = 1{,}7\ \text{cm}$$

Por tanto, el oído humano percibirá sonidos cuya longitud de onda **sea** tal que:

$$\boxed{1{,}7\ \text{cm} < \lambda < 17\ \text{m}}$$

21.6. *¿Por qué aumenta el tono de la voz si se inhala gas helio?*

Solución: Ya que la velocidad de propagación del sonido y, por consiguiente, su frecuencia son inversamente proporcionales a la masa molecular del gas en que se propaga, como la masa molecular del helio es inferior a la del aire, el tono del sonido aumenta (se hace más agudo) cuando se propaga a través del helio.

21.7. *(*) La densidad del hidrógeno es 0,0695 veces la densidad del aire. Si la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s, calcular la velocidad en el hidrógeno en las mismas condiciones experimentales (el coeficiente adiabático es el mismo para el hidrógeno y para el aire).*

Solución: La velocidad de propagación del sonido a través de un gas viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho}}$$

siendo p la presión del gas, ρ su densidad y γ su coeficiente adiabático. Apliquemos la ecuación anterior a los casos del hidrógeno y del aire:

$$v_{H_2} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho_{H_2}}} \quad [1] \quad ; \quad v_{aire} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho_{aire}}} \quad [2]$$

Si dividimos entre sí las ecuaciones [1] y [2], obtenemos:

$$\frac{v_{H_2}}{v_{aire}} = \sqrt{\frac{\rho_{aire}}{\rho_{H_2}}}$$

de donde:

$$v_{H_2} = v_{aire} \cdot \sqrt{\frac{\rho_{aire}}{\rho_{H_2}}} = 340\ \text{m/s} \cdot \sqrt{\frac{1}{0{,}0695}} = \boxed{1\ 290\ \text{m/s}}$$

21.8. *La velocidad del sonido en el aire a 0 °C es 331 m/s. Calcular su velocidad a 30 °C.*

Solución: Como:

$$v_o = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot 273\ \text{K}}{M}} = 331\ \text{m/s} \quad \text{y} \quad v_{30} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot 303\ \text{K}}{M}}$$

dividiendo ambas ecuaciones entre sí, se obtiene:

$$\frac{v_{30}}{331 \text{ m/s}} = \sqrt{\frac{303}{273}}$$

de donde:

$$v_{30} = 331 \text{ m/s} \cdot \sqrt{\frac{303}{273}} = \boxed{348{,}7 \text{ m/s}}$$

21.9. *Calcular la velocidad de propagación del sonido a través de una barra metálica de densidad 8.9 g/cm³ y módulo de Young* $E = 8 \cdot 10^{10} \dfrac{N}{m^2}$.

Solución:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2}{8{,}9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}} = \boxed{3 \cdot 10^3 \text{ m/s}}$$

21.10. *Una cuerda horizontal está fija por uno de sus extremos, y del otro, que pasa por una polea sin rozamiento, se cuelga un cuerpo. La velocidad del sonido emitido por la cuerda es 1 000 m/s. Si el cuerpo que cuelga de la cuerda se sumerge totalmente en agua, la velocidad pasa a ser de 800 m/s. Hallar la densidad del cuerpo.*

Solución: La velocidad de propagación de una onda transversal a lo largo de una cuerda viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

En el primer caso: $T = P = V \cdot \rho \cdot g$, mientras que cuando el cuerpo se sumerge en el agua: $T' = P - E = V \cdot g \cdot (\rho - \rho')$ (V = volumen del cuerpo; ρ' = densidad del líquido; P = peso del cuerpo; E = empuje de Arquímedes). Sustituyendo en la fórmula, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{V \cdot \rho \cdot g}{\mu}} \\ v' &= \sqrt{\frac{V \cdot g \cdot (\rho - \rho')}{\mu}} \end{aligned}\right\} \frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho - \rho'}}$$

De aquí:

$$\rho = \rho' \frac{v^2}{v^2 - v'^2} = 1 \frac{g}{cm^3} \cdot \frac{10^3 \text{ m/s})^2}{(10^3 \text{ m/s})^2 - (800 \text{ m/s})^2} = \boxed{2{,}78 \frac{g}{cm^3}}$$

21.11. *Conservo en mi casa un piano, una de cuyas cuerdas, de 0,4 mm² de sección y 7,8 g/cm³ de densidad, emite un sonido de 200 Hz de frecuencia y 0,9 m de longitud de onda. ¿Cuál es la tensión de dicha cuerda?*

Solución: Como:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{S \cdot \rho}}$$

resulta: $T = S \cdot \rho \cdot v^2$, y ya que $v = \lambda \cdot \nu$, tenemos:

$$T = S \cdot \rho \cdot \lambda^2 \cdot \nu^2 =$$

$$= 4 \cdot 10^{-7}\ m^2 \cdot 7{,}8 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3} \cdot (0{,}9\ m)^2 \cdot (200\ s^{-1})^2 = \boxed{\mathbf{101\ N}}$$

21.12. *En la ecuación de una onda muchas veces aparece escrita la función coseno, en vez del seno. ¿A qué es debido esto?*

Solución: Todo depende del instante que elijamos para origen del tiempo, de si en el instante $t = 0$ el foco vibrante se encuentra en la posición de equilibrio o en la de máxima elongación.

21.13. *(*) En una onda cuyo período es 0,25 s y su longitud de onda 0,6 m, calcular la velocidad de propagación y la longitud que separa en un instante determinado a dos puntos cuya diferencia de fase es igual a π/3.*

Solución:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}6\ m}{0{,}25\ s} = \boxed{\mathbf{2{,}4\ m/s}}$$

$$d = \frac{\pi}{3}\ rad \cdot \frac{1\ \text{longitud de onda}}{2\pi\ rad} \cdot \frac{0{,}6\ m}{1\ \text{longitud de onda}} =$$

$$= 0{,}1\ m = \boxed{\mathbf{10\ cm}}$$

21.14. *El período de un movimiento ondulatorio, que se propaga por el eje de abscisas, es $3 \cdot 10^{-3}$ s. La distancia entre dos puntos consecutivos cuya diferencia de fase es π/2 vale 30 cm. Calcular:*

a) La longitud de onda.
b) La velocidad de propagación.

Solución:

a) $$\lambda = 2\pi\ rad \cdot \frac{30\ cm}{\pi/2\ rad} = 120\ cm = \boxed{\mathbf{1{,}2\ m}}$$

b) $$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1{,}2\ m}{3 \cdot 10^{-3}\ s} = \boxed{\mathbf{400\ m/s}}$$

21.15. *Una onda cuya frecuencia es 500 Hz avanza con una velocidad de 350 m/s.*

a) Hallar la separación entre dos puntos que tengan 60° de diferencia de fase.
b) ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos elongaciones en un cierto punto entre dos instantes separados un intervalo de 10^{-3} s?

Solución: Calculemos, en primer lugar, la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{350 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{500 \text{ s}^{-1}} = 0{,}7 \text{ m}$$

a) $$x = 60° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°} \cdot \frac{1 \text{ longitud de onda}}{2\pi \text{ rad}} \cdot \frac{0{,}7 \text{ m}}{1 \text{ longitud de onda}} = \boxed{0{,}117 \text{ m}}$$

b) $$\varphi = 10^{-3} \text{ s} \cdot \frac{500 \text{ longitudes de onda}}{1 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ longitud de onda}} = \boxed{\pi \text{ rad}}$$

21.16. *Una onda transversal cuya longitud de onda es 10 cm, se propaga con una velocidad de 2 m/s. Al cabo de 1 segundo ¿cuál será la elongación de un punto que dista 1 195/6 cm del foco emisor? Expresar el resultado en función de la amplitud.*

Solución: El período del movimiento ondulatorio es:

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0{,}1 \text{ m}}{2 \text{ m/s}} = 0{,}05 \text{ s}$$

Aplicando la ecuación del movimiento ondulatorio, tenemos:

$$s = A \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] = A \cdot \text{sen } 2\pi \cdot \left[\frac{1 \text{ s}}{0{,}05 \text{ s}} - \frac{1\,195/6 \text{ cm}}{10 \text{ cm}}\right] =$$

$$= A \cdot \text{sen } 2\pi \cdot \left[20 - \frac{1\,195}{60}\right] = A \cdot \text{sen } 2\pi \cdot \frac{1}{12} = A \cdot \text{sen } \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{A}{2}}$$

21.17. *(*) Un movimiento ondulatorio tiene por ecuación en el Sistema Internacional:*

$$y = 5 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen } (600\,\pi t - 6x)$$

Calcular:

a) La amplitud, frecuencia, velocidad de propagación y longitud de la onda.
b) Distancia entre dos puntos consecutivos cuya diferencia de fase sea $\pi/4$ radianes.

Solución:

a) La ecuación de una onda, en general, es:

$$y = A \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right]$$

La ecuación dada en el problema se puede poner en la forma:

$$y = 5 \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen } 2\pi \left[300\,t - \frac{3}{\pi}\,x\right]$$

Identificando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$\boxed{\mathbf{A = 5 \cdot 10^{-2}\ m;\quad \nu = 300\ Hz;\quad \lambda = \frac{\pi}{3}\ m}}$$

Calculemos ahora la velocidad de propagación de la onda:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu = \frac{\pi}{3}\ m \cdot 300\ Hz = \boxed{\mathbf{100\pi\ m \cdot s^{-1}}}$$

b) A una distancia de λ m corresponde una diferencia de fase de 2π radianes. Luego:

$$d = \frac{\pi}{4}\ rad \cdot \frac{1\ \text{longitud de onda}}{2\pi\ rad} \cdot \frac{\pi/3\ m}{1\ \text{longitud de onda}} = \boxed{\mathbf{\frac{\pi}{24}\ m}}$$

21.18. *Una onda avanza con una velocidad de 32 m/s. La amplitud vale 2,3 cm y la frecuencia 60 Hz. Suponiendo que en el origen y en el instante inicial la elongación fuera máxima, se pregunta:*

a) La longitud de onda del movimiento.
b) La elongación, velocidad y aceleración de un punto que dista del origen 51,2 m para t = 2,6 s.

Solución:

a) La longitud de onda del movimiento será:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{32\ m/s}{60\ s^{-1}} = \boxed{\mathbf{\frac{8}{15}\ m}}$$

b) Como la fase inicial es π/2, la elongación vale:

$$s = A \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = A \cdot \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) =$$

$$= 2{,}3\ cm \cdot \cos 2\pi\left[60\ s^{-1} \cdot 2{,}6\ s - \frac{51{,}2\ m}{8/15\ m}\right] =$$

$$= 2{,}3\ cm \cdot \cos 120\pi = \boxed{\mathbf{2{,}3\ cm}}$$

Hallemos ahora la velocidad del punto considerado:

$$v = \frac{ds}{dt} = -2\pi \cdot \nu \cdot A \cdot \text{sen } 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) =$$

$$= -2\pi \cdot 60\ s^{-1} \cdot 2{,}3\ cm \cdot \text{sen } 2\pi \left[60\ s^{-1} \cdot 2{,}6\ s - \frac{51{,}2\ m}{8/15\ m}\right] = \boxed{\mathbf{0\ cm/s}}$$

Por último, la aceleración valdrá:

$$a = \frac{dv}{dt} = -4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot s = -4\pi^2 \cdot (60\ s^{-1})^2 \cdot 2{,}3\ cm = \boxed{\mathbf{-3{,}27 \cdot 10^5\ \frac{cm}{s^2}}}$$

21.19. *(*) Un movimiento ondulatorio plano se propaga según la ecuación:*

$$s = \text{sen } (4t - 5x)$$

Si el tiempo se mide en segundos y el espacio en centímetros, calcular:

a) *La amplitud de la oscilación.*
b) *El período.*
c) *La frecuencia.*
d) *La pulsación.*
e) *La longitud de onda.*
f) *La velocidad de propagación.*

Solución: La ecuación general de un movimiento ondulatorio es:

$$s = A \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right]$$

Comparando esta ecuación general con la del movimiento ondulatorio del problema, resulta:

a) $\boxed{\mathbf{A = 1\ cm}}$

b) $4t = 2\pi \cdot \frac{t}{T}$, de donde: $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ s = 1{,}57\ s$; $\boxed{\mathbf{T = 1{,}57\ s}}$

c) $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}57\ s} = 0{,}64\ Hz$ $\boxed{\mathbf{\nu = 0{,}64\ Hz}}$

d) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ rad}{\pi/2\ s} = 4\ rad/s$ $\boxed{\mathbf{\omega = 4\ rad/s}}$

e) $5x = \frac{2\pi x}{\lambda}$, de donde: $\lambda = \frac{2\pi}{5} = 1{,}26\ cm$ $\boxed{\mathbf{\lambda = 1{,}26\ cm}}$

f) $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/5\ cm}{\pi/2\ s} = \frac{4}{5}\ cm/s = 0{,}8\ cm/s$ $\boxed{\mathbf{v = 0{,}8\ \frac{cm}{s}}}$

21.20. *En el instante $t = \frac{T}{4}$, el punto origen de una onda transversal de 1 m de longitud de onda alcanza su elongación máxima. ¿A qué distancia del origen se hallará una partícula cuya elongación en dicho momento sea igual a la mitad de la amplitud?*

Solución: La elongación del punto origen viene dada por:

$$s = A \cdot \text{sen}\left[\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right]$$

Como para $t = \frac{T}{4}$, $s = A$, resulta:

$$A = A \cdot \text{sen}\left[\frac{2\pi t}{T} \cdot \frac{T}{4} + \varphi_0\right]$$

de donde:

$$\varphi_0 = 0$$

Para el punto considerado, la elongación será:

$$s = \frac{A}{2} = A \cdot \text{sen}\, 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] = A \cdot \text{sen}\, 2\pi\left[\frac{T/4}{T} - \frac{x}{1\text{ m}}\right]$$

de donde se deduce que:

$$\text{sen}\, 2\pi\left[\frac{1}{4} - \frac{x}{1\text{ m}}\right] = \frac{1}{2} = \text{sen}\,\frac{\pi}{6};\; 2\pi\left[\frac{1}{4} - \frac{x}{1\text{ m}}\right] = \frac{\pi}{6}$$

y, por consiguiente:

$$\boxed{x = \frac{1}{6}\text{ m} = 0{,}167\text{ m}}$$

21.21. *Una cuerda muy larga tiene una densidad lineal de 20 g/m y está tensada con 40 kp. A partir de cierto punto de dicha cuerda se propaga una onda transversal de 2 cm de amplitud y 500 s^{-1} de frecuencia. Calcular la elongación de un punto que dista 94,5 cm, 4,5 segundos después de iniciarse el movimiento.*

Solución: La velocidad de propagación es:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{40\text{ kp} \cdot \frac{9{,}8\text{ N}}{1\text{ kp}}}{0{,}02\text{ kg/m}}} = 140\text{ m/s}$$

y la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{140\text{ m/s}}{500\text{ s}^{-1}} = 0{,}28\text{ m} = 28\text{ cm}$$

de modo que la elongación en el punto que se menciona en el enunciado del problema es:

$$s = A \cdot \text{sen } 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) =$$

$$= 2 \text{ cm} \cdot \text{sen } 2\pi \left[500 \text{ s}^{-1} \cdot 4{,}5 \text{ s} - \frac{94{,}5 \text{ cm}}{28 \text{ cm}}\right] =$$

$$= 2 \text{ cm} \cdot \text{sen } 4\,493{,}25\pi = -2 \text{ cm} \cdot \text{sen } 0{,}25\pi =$$

$$= -2 \text{ cm} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-1{,}41 \text{ cm}}$$

21.22. *Una cuerda de densidad lineal 0,5 g/cm, transmite una onda cuya ecuación es:*

$$s = sen \left[\pi\left(50\,t - \frac{x}{3}\right)\right]$$

expresándose x y s en centímetros. Calcular la tensión a la que está sometida la cuerda.

Solución: Como:

$$\nu = 25 \text{ s}^{-1} \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3}, \lambda = 6 \text{ cm}$$

se tiene:

$$v = \lambda \cdot \nu = 6 \text{ cm} \cdot 25 \text{ s}^{-1} = 150 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

En consecuencia:

$$T = \mu \cdot v^2 = 0{,}5 \frac{\text{g}}{\text{cm}} \cdot (150 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1})^2 = 11\,250 \text{ dyn} = \boxed{0{,}1125 \text{ N}}$$

21.23. *En el centro de un estanque circular de 5 m de radio, se produce un movimiento ondulatorio en la superficie del agua. Se observa que las ondas tardan 10 segundos en llegar a la orilla y que la distancia entre dos crestas sucesivas es de 50 cm. Calcular el período, la frecuencia y la amplitud del movimiento, sabiendo que la elongación del foco emisor es de 3 cm al cabo de 1/6 de segundo. Calcular, finalmente, la elongación de un punto situado a 3,875 m del foco emisor, al cabo de 8 segundos.*

Solución: El movimiento ondulatorio se propaga a través de la superficie del agua con velocidad constante. Esta velocidad es:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{5 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ya que la distancia entre dos crestas consecutivas coincide con la longitud de onda: $\lambda = 0,5$ m. En consecuencia, el período del movimiento ondulatorio valdrá:

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0,5 \text{ m}}{0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = \boxed{\mathbf{1\ s}}$$

Conociendo el período, se puede calcular fácilmente la frecuencia:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{1 \text{ s}} = \boxed{\mathbf{1\ Hz}}$$

La ecuación de este movimiento ondulatorio es:

$$s = A \cdot \text{sen}\ 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) = A \cdot \text{sen}\ 2\pi\ (t - 2x)$$

Como para el foco emisor: $x = 0$, su elongación en función del tiempo vendrá dada por la expresión:

$$s = A \cdot \text{sen}\ 2\pi t$$

De acuerdo con el enunciado del problema, para $t = \frac{1}{6}$ s, $s = 3$ cm. Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\boxed{\mathbf{A = 2\sqrt{3}\ cm}}$$

Como la ecuación de la onda es:

$$s = A \cdot \text{sen}\ 2\pi\ (t - 2x) = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}\ 2\pi\ (t - 2x)\ \text{(SI)}$$

resulta que la elongación de un punto tal que $x = 3,875$ m; $t = 8$ s; será:

$$s = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-2} \cdot \text{sen}\ 2\pi\ [8 - 2 \cdot 3,875]\ \text{(m)} = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-2} \text{ m} = \boxed{\mathbf{2\sqrt{3}\ cm}}$$

21.24. *Calcular la energía cinética de una partícula oscilante de 3 g, a su paso por la posición de equilibrio, siendo su período de 0,2 segundos y la amplitud de 4 cm.*

Solución: Cuando la partícula oscilante pasa por la posición de equilibrio, su energía cinética es máxima y vale:

$$E_c = \frac{1}{2}\ m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = \frac{2\pi^2 \cdot m}{T^2} \cdot A^2 =$$

$$= \frac{2\pi^2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{(0,2 \text{ s})^2} \cdot (4 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 = \boxed{\mathbf{2,37 \cdot 10^{-3}\ J}}$$

21.25. *Dada la ecuación:*

$$s = 2 \cdot sen\ 2\pi \left[\frac{t}{0,1} - \frac{x}{2} \right]$$

donde s se mide en metros y t en segundos, hallar:

a) La longitud de onda.
b) La frecuencia.
c) El período.
d) La amplitud.
e) La velocidad de propagación.
f) Escribir la expresión para una onda que sea idéntica, pero que se propague en sentido contrario.

Solución: La ecuación general de una onda es:

$$s = A \cdot \text{sen}\ 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right]$$

Comparando esta ecuación general con la particular, resulta:

a) $\boxed{\lambda = \mathbf{2\ m}}$

b) $\boxed{\nu = \mathbf{10\ Hz}}$

c) $\boxed{T = \mathbf{0,1\ s}}$

d) $\boxed{A = \mathbf{2\ m}}$

e) $$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\ m}{0,1\ s} = \boxed{\mathbf{20\ m/s}}$$

f) $$\boxed{s' = 2 \cdot \text{sen}\ 2\pi \left[\frac{t}{0,1} + \frac{x}{2} \right]\ (SI)}$$

21.26. *El desplazamiento debido a una onda transversal que se propaga a lo largo de una cuerda tensa viene dado por s = 0,25 cos (0,05t − 0,2x) (t en segundos, x y s en metros).*

a) ¿Cuál es la velocidad de propagación de la onda a lo largo de la cuerda?
b) ¿Cuánto vale la velocidad del punto de la cuerda situado en x = 2,5 m, en el instante t = 10 segundos?

Solución:

a) Como:

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \cdot \nu = 0,05\ \text{rad/s} \\ \nu = \dfrac{0,05\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}}{2\pi\ \text{rad}} = \dfrac{0,025}{\pi}\ \text{s}^{-1} \end{array} \right\} \qquad \left. \begin{array}{l} \dfrac{2\pi}{\lambda} = 0,2\ \text{m}^{-1} \\ \lambda = \dfrac{2\pi}{0,2}\ \text{m} = 10\pi\ \text{m} \end{array} \right\}$$

resulta:

$$v = \lambda \cdot \nu = 10\pi \text{ m} \cdot \frac{0{,}025}{\pi} \text{ s}^{-1} = \boxed{\mathbf{0{,}25\ m/s}}$$

b) La velocidad de los puntos de la cuerda se obtiene derivando la elongación respecto al tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt} = -0{,}0125 \text{ sen } (0{,}05t - 0{,}2x) \text{ (SI)}$$

Para el punto y el instante de tiempo considerado:

$$v = -0{,}0125 \text{ sen } [0{,}05 \cdot 10 - 0{,}2 \cdot 2{,}5] = -0{,}0125 \text{ sen } [0{,}5 - 0{,}5] =$$

$$= -0{,}0125 \cdot \text{sen } 0 = \boxed{\mathbf{0}}$$

21.27. *(*) Una onda de 10 m de amplitud se propaga de izquierda a derecha y su período es de 12 segundos. Supuesta de tipo sinusoidal, hallar la elongación en el origen cuando el tiempo es 1 segundo, contando a partir de la iniciación del movimiento desde la posición de equilibrio. En este mismo instante la elongación es nula en un punto que dista 4 cm del origen hacia la derecha. Hallar la longitud de onda correspondiente.*

Solución: La ecuación de la onda es:

$$s = A \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] = 10 \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{t}{12} - \frac{x}{\lambda}\right] \text{ (SI)}$$

En el origen, como $x = 0$, la elongación valdrá:

$$s = 10 \cdot \text{sen } 2\pi \cdot \frac{t}{12} \text{ (SI)}$$

Al cabo de 1 s:

$$s = 10 \cdot \text{sen } 2\pi \cdot \frac{1}{12} = 10 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{1}{2} \text{ m} = \boxed{\mathbf{5\ m}}$$

Si en la ecuación de la onda tenemos en cuenta que para $x = 4$ cm, $s = 0$, resulta:

$$0 = 10 \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{1}{12} - \frac{4 \text{ cm}}{\lambda}\right]$$

o, lo que es lo mismo, tras simplificar:

$$\frac{1}{12} - \frac{4 \text{ cm}}{\lambda} = 0$$

de donde:

$$\boxed{\lambda = \mathbf{48\ cm = 0{,}48\ m}}$$

21.28. *Una fuente emisora de 4 W produce ondas esféricas en un medio no absorbente. ¿Cuál es la intensidad de la onda a 1 m de distancia del centro emisor?*

Solución:

$$I = \frac{p}{4\pi r^2} = \frac{4\ W}{4\pi \cdot (1\ m)^2} = \boxed{\frac{1}{\pi}\ W \cdot m^{-2}}$$

21.29. *En el caso de las ondas esféricas la amplitud disminuye con la distancia, r, al foco emisor. ¿Cómo expresarías la ecuación de una onda esférica?*

Solución: Teniendo en cuenta la forma general de la ecuación de una onda y la disminución de su amplitud con la distancia, la ecuación de una onda esférica será:

$$\boxed{s = \frac{A}{r} \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + \varphi\right]}$$

21.30. *¿Es posible que luz más luz produzca oscuridad?*

Solución: Se trata simplemente de un **fenómeno de interferencia.** Si dos ondas luminosas de igual longitud de onda y amplitud, se propagan en el mismo sentido y están en fase opuesta, la amplitud de la onda resultante es cero y, por tanto, habrá oscuridad en los puntos de coincidencia de dichas ondas (**interferencia destructiva**). Este fenómeno fue comprobado experimentalmente por vez primera en 1800 por el físico inglés Thomas Young.

21.31. *¿Es siempre esférica una superficie de onda?*

Solución: Las superficies de onda son esféricas siempre que las ondas se propaguen en un medio isótropo, ya que en estos casos la velocidad de propagación es la misma en todas las direcciones. No sucede así, sin embargo, cuando el medio es anisótropo, o cuando la onda se refracta pasando a un segundo medio, de distinto índice de refracción que el primero.

Por otra parte, una superficie de onda, a una distancia relativamente grande del foco emisor, puede considerarse, a todos los efectos, como una superficie plana.

21.32. *El coeficiente de absorción de un determinado medio es 0,5 cm⁻¹. ¿Cuál ha de ser su espesor para que la intensidad de una onda que lo atraviesa se reduzca a la quinta parte de la incidente?*

Solución: Teniendo en cuenta la ley general de la absorción, como:

$$I = \frac{I_o}{5} \quad y \quad \alpha = 0{,}5\ cm^{-1}$$

resulta:

$$\frac{I_o}{5} = I_o \cdot e^{-0{,}5 \cdot l}; \quad \frac{1}{5} = e^{-0{,}5 \cdot l}$$

Si tomamos logaritmos neperianos y despejamos l, tendremos:

$$-\ln 5 = -0{,}5 \cdot l; \quad l = \frac{\ln 5}{0{,}5} = \frac{1{,}609}{0{,}5 \text{ cm}^{-1}} = \boxed{3{,}2 \text{ cm}}$$

21.33. ***Una horquilla, situada verticalmente, vibra en dirección perpendicular a la superficie del agua con una amplitud de 2 mm y una frecuencia de 400 Hz. Las perturbaciones iniciadas en los extremos O_1 y O_2 de la horquilla, se propagan en la superficie del agua con la velocidad v = 180 cm/s. Calcular el estado vibratorio de un punto P situado a 13,5 mm de O_1 y 6,75 mm de O_2.***

Solución: Calculemos, en primer lugar, la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{180 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}}{400 \text{ s}^{-1}} = 0{,}45 \text{ cm}$$

Las perturbaciones producidas en el punto P por las ondas procedentes de O_1 y O_2 son:

$$s_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{t}{\frac{1}{400} \text{ s}} - \frac{1{,}35 \text{ cm}}{0{,}45 \text{ cm}} \right] =$$

$$= 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{sen } (800\pi t - 6\pi) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{sen } 800\pi t$$

$$s_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{t}{\frac{1}{400} \text{ s}} - \frac{0{,}675 \text{ cm}}{0{,}45 \text{ cm}} \right] =$$

$$= 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{sen } (800\pi t - 3\pi) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{sen } 800\pi t$$

Por lo tanto, el estado vibratorio del punto P será:

$$s = s_1 + s_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{sen } 800\pi t - 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{sen } 800\pi t = 0$$

Luego, **el punto P permanecerá siempre inmóvil.**

21.34. ***Dos trenes de ondas de igual longitud de onda (λ = 72 cm) e igual velocidad, se propagan en la misma dirección y sentido, con una diferencia de marcha de 24 cm. ¿Cuánto vale en el tiempo t = T/2 la elongación de un punto cuya distancia al origen de la primera onda es 6 cm, suponiendo que ambas amplitudes valgan 2 cm?***

Solución: El primer tren de ondas viene dado por la ecuación:

$$s_1 = A \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right]$$

y el segundo por:

$$s_2 = A \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x + \delta}{\lambda}\right]$$

siendo δ la diferencia de marcha.

La acción conjunta de ambos trenes de ondas dará lugar a una perturbación que vendrá expresada por la suma algebraica de ambas. Tendremos:

$$s = s_1 + s_2 = 2\,A \cdot \cos\frac{\pi\delta}{\lambda} \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x + \delta/2}{\lambda}\right] =$$

$$= 4\text{ cm} \cdot \cos\left[\frac{24\text{ cm}}{72\text{ cm}} \cdot \pi\right] \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{T/2}{T} - \frac{(6 + 12)\text{ cm}}{72\text{ cm}}\right] =$$

$$= 4\text{ cm} \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = 4\text{ cm} \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cdot \text{sen }\frac{\pi}{2} = \boxed{2\text{ cm}}$$

21.35. *Los puntos O_1 y O_2 (véase fig. 21.1) representan dos focos sonoros de la misma frecuencia (ν = 100 Hz) y amplitudes respectivas A_1 = 4 cm y A_2 = 7 cm. Las distancias x_1 y x_2 son, respectivamente, 100 m y 103,4 m. La velocidad de propagación del sonido en el aire es 340 m/s. Determinar la ley de vibración en el punto P.*

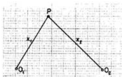


Fig. 21.1

Solución: La perturbación provocada en P por el movimiento procedente del foco sonoro O_1, será:

$$s_1 = A_1 \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right] = A_1 \cdot \text{sen } 2\pi\nu \left[t - \frac{x_1}{v}\right] =$$

$$= 0{,}04 \cdot \text{sen } 200\pi \left[t - \frac{100\text{ m}}{340\text{ m/s}}\right] = 0{,}04 \cdot \text{sen } 200\pi \left(t - \frac{1}{3{,}4}\right) \text{ (SI)}$$

La perturbación producida en P por el foco O_2, será:

$$s_2 = A_2 \cdot \text{sen } 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right] = A_2 \cdot \text{sen } 2\pi\nu \left[t - \frac{x_2}{v}\right] =$$

$$= 0{,}07 \cdot \text{sen } 200\pi \left[t - \frac{103{,}4\text{ m}}{340\text{ m/s}}\right] = 0{,}07 \cdot \text{sen} \left[200\pi \left(t - \frac{100}{340}\right) -\right.$$

$$\left. - 200\pi \cdot \frac{3{,}4}{340}\right] = 0{,}07 \cdot \text{sen} \left[200\pi \left(t - \frac{1}{3{,}4}\right) - 2\pi \cdot \frac{340}{340}\right] =$$

$$= 0{,}07 \cdot \text{sen } 200\pi \left(t - \frac{1}{3{,}4}\right) \text{ (SI)}$$

La acción conjunta de ambos movimientos ondulatorios originará en P una perturbación dada por:

$$s = s_1 + s_2 = 0{,}04 \cdot \text{sen}\ 200\pi\ \left(t - \frac{1}{3{,}4}\right) + 0{,}07 \cdot \text{sen}\ 200\pi\ \left(t - \frac{1}{3{,}4}\right) =$$

$$= 0{,}11 \cdot \text{sen}\ 200\pi\ \left(t - \frac{1}{3{,}4}\right)\ \text{(SI)}$$

$$\boxed{\mathbf{s = 0{,}11 \cdot sen\ 200\pi \left[t - \frac{1}{3{,}4}\right]\ (SI)}}$$

21.36. *Explica la diferencia que existe entre las ondas ordinarias y las estacionarias.*

Solución: Una onda ordinaria es toda perturbación que se propaga en un medio elástico. Esta perturbación avanza con una velocidad determinada y todos los puntos del medio elástico donde se propaga, poseen siempre un estado de vibración.

Una onda estacionaria resulta de la interferencia de dos ondas de igual longitud de onda y amplitud, propagadas en la misma dirección y en sentidos contrarios. Esta onda da la sensación de no avanzar **(onda estacionaria),** presentando unos puntos inmóviles **(nodos)** y otros puntos que vibran con la máxima amplitud **(vientres).**

21.37. *La distancia que separa dos nodos consecutivos en un sistema de ondas estacionarias en el aire es 75 cm. Calcular la frecuencia del sonido.*

Solución: Ya que la distancia que separa dos nodos consecutivos en una onda estacionaria es igual a media longitud de onda, la longitud de onda valdrá:

$$\lambda = 2 \cdot 0{,}75\ \text{m} = 1{,}5\ \text{m}$$

Como el sonido se propaga en el aire con una velocidad v = 340 m/s, la frecuencia del sonido considerado es:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{340\ \text{m/s}}{1{,}5\ \text{m}} = \boxed{\mathbf{226{,}7\ Hz}}$$

21.38. ***La ecuación de una onda que se propaga en una cuerda es:***

$$s = 0{,}4 \cdot \cos\,(0{,}07x - 13t - 0{,}9)$$

¿Qué onda habrá que añadirle para que resulte una onda estacionaria?

Solución: Ya que una onda estacionaria proviene de la superposición de una onda directa y de una reflejada, la ecuación de tal onda habrá de ser:

$$\boxed{\mathbf{s' = 0{,}4 \cdot cos\ (0{,}07x + 13t - 0{,}9)}}$$

21.39. *A una de las ramas de un diapasón atamos una cuerda de 0,49 N de peso y 70 cm de longitud, cuyo extremo se sujeta a una pared. Se hace vibrar al diapasón perpendicularmente a la longitud de la cuerda con una frecuencia de 60 Hz. ¿Cuál ha de ser la tensión de la cuerda para que en ella se formen cuatro vientres?*

Solución: El estado vibratorio de la cuerda ha de ser como el que se indica en la figura 21.2, ya que en el punto de sujeción de la cuerda al diapasón ha de haber un vientre y en el de sujeción a la pared un nodo. A la vista de la figura, tenemos que:

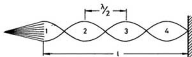


Fig. 21.2

$$l = 3{,}5\ \frac{\lambda}{2}$$

de donde:

$$\lambda = \frac{2 \cdot l}{3{,}5}$$

Como:

$$v = \lambda \cdot \nu \quad y \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

resulta:

$$T = \mu \cdot v^2 = \mu \cdot \lambda^2 \cdot \nu^2 = \frac{m}{l} \cdot \frac{4 \cdot l^2}{3{,}5^2} \cdot \nu^2 = m \cdot \frac{4 \cdot l}{3{,}5^2} \cdot \nu^2 =$$

$$= \frac{0{,}49\ N}{9{,}8\ N/kg} \cdot \frac{4 \cdot 0{,}7\ m}{3{,}5^2} \cdot (60\ Hz)^2 = \boxed{\mathbf{41{,}14\ N}}$$

21.40. *(*) Una cuerda vibra de acuerdo con la ecuación:*

$$s = 5 \cdot sen\ \frac{\pi x}{3} \cdot \cos 40\pi t$$

donde x está expresada en centímetros y t en segundos. Se pide:

a) Amplitud y velocidad de las ondas cuya superposición da lugar a esa vibración.

b) Distancia entre dos nodos consecutivos.
c) Velocidad de una partícula de la cuerda, situada en la posición x = 1,5 cm, cuando t = 9/8 segundos.

Solución:

a) La ecuación general de una onda estacionaria es:

$$s = 2\,A \cdot \cos\,\frac{2\pi \cdot x}{\lambda} \cdot \operatorname{sen}\,\frac{2\pi t}{T}$$

o bien:

$$s = 2\,A \cdot \operatorname{sen}\,\frac{2\pi \cdot x}{\lambda} \cdot \cos\,\frac{2\pi t}{T}$$

Comparando la ecuación del problema con la general de las ondas estacionarias, resulta:

$$\frac{\pi \cdot x}{3} = \frac{2\pi x}{\lambda}$$

de donde: $\lambda = 6$ cm.
Además: $40\pi t = 2\pi \nu t$, resultando: $\nu = 20\ s^{-1}$.
Por tanto:

$$v = \lambda \cdot \nu = 6\ cm \cdot 20\ s^{-1} = 120\ cm/s \quad \boxed{\mathbf{v = 120\ cm/s}}$$

Por otra parte, como $2\,A = 5$ cm:

$$\boxed{\mathbf{A = 2{,}5\ cm}}$$

b) La distancia entre dos nodos consecutivos sería:

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{6\ cm}{2} = 3\ cm$$

$$\boxed{\mathbf{d = 3\ cm}}$$

c) La velocidad de la partícula citada será:

$$v = \frac{ds}{dt} = -5 \cdot \operatorname{sen}\,\frac{\pi x}{3} \cdot 40\pi \cdot \operatorname{sen}\,40\pi t = -200\pi \cdot \operatorname{sen}\,\frac{\pi x}{3} \cdot \operatorname{sen}\,40\pi t$$

Para $t = \frac{9}{8}$ s y x = 1,5 cm:

$$v = -200\pi \cdot \operatorname{sen}\,\frac{\pi \cdot 1{,}5}{3} \cdot \operatorname{sen}\,40\pi \cdot \frac{9}{8} = -200\pi \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\boxed{\mathbf{v = 0}}$$

21.41. *(*) Dos ondas de ecuaciones:*

$$s_1 = 6 \cdot sen\ (1\,500t - 250x)\ (SI)$$
$$s_2 = 6 \cdot sen\ (1\,500t + 250x)\ (SI)$$

interfieren. Hallar:

a) La ecuación de las ondas estacionarias resultantes.
b) La amplitud en los nodos.
c) Distancia entre dos vientres próximos.

Solución:

a) La ecuación de las ondas estacionarias resultantes se obtendrá sumando las perturbaciones producidas por ambas ondas:

$$s = s_1 + s_2 = 6 \cdot \text{sen}\ (1\,500t - 250x) + 6 \cdot \text{sen}\ (1\,500t + 250x) =$$
$$= 12 \cdot \cos 250x \cdot \text{sen}\ 1\,500t\ (\text{SI})$$

$$\boxed{\mathbf{s = 12 \cdot \cos 250x \cdot sen\ 1\,500t\ (SI)}}$$

b) En los nodos la amplitud será nula:

$$\boxed{\mathbf{A = 0}}$$

c) La distancia entre dos vientres consecutivos es igual a una semilongitud de onda:

$$\boxed{\mathbf{d = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{250}\ m}}$$

21.42. ***Hallar el coeficiente adiabático de un gas de masa molecular 18, sabiendo que si se producen en él ondas estacionarias de 1 000 Hz de frecuencia, se obtienen nodos distantes 20 cm. (La temperatura de la experiencia es 27 °C.)***

Solución: Ya que la distancia entre dos nodos consecutivos es igual a $\frac{\lambda}{2}$, en el caso del enunciado del problema tenemos que: $\lambda = 40$ cm $= 0{,}4$ m, y $v = \lambda \cdot \nu = 0{,}4\ \text{m} \cdot 1\,000\ \text{s}^{-1} = 400\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Por otra parte, la velocidad de propagación de un movimiento ondulatorio a través de un gas, viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot R \cdot T}{M}}$$

siendo T la temperatura absoluta del gas, M su masa molecular y γ su coeficiente adiabático.

De la expresión anterior se obtiene:

$$\gamma = \frac{v^2 \cdot M}{R \cdot T} = \frac{(400\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2 \cdot 18 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}}{8{,}3144\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot 300\ \text{K}} = \boxed{\mathbf{1{,}15}}$$

21.43. *Sabiendo que la velocidad de la luz en el vacío es de 300 000 km/s, calcular la que llevaría el color rojo en el interior de un prisma óptico, suponiendo que para este color el índice de refracción es 1,44.*

Solución:

Como $n = \dfrac{v_1}{v_2}$, resulta:

$$v_2 = \frac{v_1}{n} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}44} = \boxed{2{,}083 \cdot 10^8 \text{ m/s}}$$

21.44. *Si el índice de refracción del agua respecto al aire es 4/3, ¿qué puedes deducir respecto a la velocidad de la luz en el agua?*

Solución: Como:

$$n = \frac{v_1}{v_2}; \quad \frac{4}{3} = \frac{v_{aire}}{v_{agua}}$$

resulta:

$$v_{agua} = \frac{3}{4} \cdot v_{aire}$$

La velocidad de la luz en el agua es $\frac{3}{4}$ de la velocidad de la luz en el aire.

21.45. *Un tren se desplaza, con el aire en calma, a la velocidad de 108 km · h⁻¹. El silbato de la locomotora emite un sonido de 60 Hz de frecuencia. Calcular la longitud de onda y la frecuencia de las ondas sonoras percibidas por un observador fijo situado:*

a) Delante de la locomotora.
b) Detrás de la locomotora.

Calcular, asimismo, la frecuencia que percibirá un viajero de otro tren que lleva una velocidad de 54 km · h⁻¹:

a') Cuando se aproxima al primer tren.
b') Cuando se aleja.

Solución:

a) Si el observador fijo está delante de la locomotora que se acerca:

$$\lambda' = \frac{v - v_F}{\nu} = \frac{340 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s}}{60 \text{ s}^{-1}} = \boxed{5{,}17 \text{ m}}$$

$$\nu' = \nu \cdot \frac{v}{v - v_F} = 60 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = \boxed{65{,}8 \text{ Hz}}$$

b) Si el observador está detrás:

$$\lambda' = \frac{v + v_F}{v} = \frac{340 \text{ m/s} + 30 \text{ m/s}}{60 \text{ s}^{-1}} = \boxed{6{,}17 \text{ m}}$$

$$\nu' = \nu \cdot \frac{v}{v + v_F} = 60 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} + 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = \boxed{55{,}14 \text{ Hz}}$$

a') Si el observador está situado en un tren que se aproxima al primero:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{v + v_o}{v - v_F} = 60 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m/s} + 15 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s}} = \boxed{68{,}71 \text{ Hz}}$$

b') Si ambos trenes se alejan:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{v - v_o}{v + v_F} = 60 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m/s} - 15 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + 30 \text{ m/s}} = \boxed{52{,}70 \text{ Hz}}$$

21.46. *Al extremo de una cuerda de 2 m de longitud atamos una sirena que emite un sonido de 600 Hz y la hacemos girar a razón de 300 r.p.m. A 1 km de distancia está situado un observador, en el mismo plano de rotación de la sirena. ¿Cuál es el intervalo de frecuencias percibido por el observador? Tómese para velocidad del sonido 340 m/s.*

Solución: Supongamos el observador situado en O (fig. 21.3). En el trayecto CAD la sirena se aleja del observador, mientras que en el DBC se acerca. En los puntos A y B es máxima la velocidad de alejamiento y acercamiento, respectivamente. Esta velocidad vale:

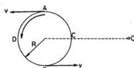


Fig. 21.3

$$v_F = \omega \cdot R = 300 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2 \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot 2 \text{ m} = 62{,}8 \text{ m/s}$$

Aplicando las fórmulas del efecto Doppler, tenemos:

$$\nu_{\text{máx}} = \nu \cdot \frac{v}{v - v_F} = 600 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - 62{,}8 \text{ m/s}} = 735{,}9 \text{ Hz}$$

$$\nu_{\text{mín}} = \nu \cdot \frac{v}{v + v_F} = 600 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + 62{,}8 \text{ m/s}} = 506{,}4 \text{ Hz}$$

Por tanto, el observador percibirá aquellas frecuencias tales que:

$$\boxed{506{,}4 \text{ Hz} < \nu < 735{,}9 \text{ Hz}}$$

21.47. ***Un observador nota que la frecuencia emitida por el silbato de la locomotora de un tren cambia de 3 000 Hz a 2 500 Hz cuando pasa por su posición. A partir de estos datos, calcular la velocidad del tren, sabiendo que la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s.***

Solución: Aplicando la fórmula del efecto Doppler al caso del observador en reposo y el foco emisor acercándose a él, tendremos:

$$\nu_1 = \nu \cdot \frac{340}{340 - v} = 3\ 000 \text{ Hz}$$

Cuando el foco emisor (locomotora) se aleja:

$$\nu_2 = \nu \cdot \frac{340}{340 + v} = 2\ 500 \text{ Hz}$$

Dividiendo miembro a miembro las anteriores igualdades, quedará:

$$\frac{340 + v}{340 - v} = \frac{6}{5}$$

de donde:

$$\boxed{v = 30{,}9 \text{ m/s} = 111{,}2 \text{ km/h}}$$

21.48. ***Desde lo alto de una torre dejamos caer un diapasón, tras haberle excitado emitiendo un sonido de 500 Hz de frecuencia. Un observador está asomado a una ventana situada 50 m por debajo del punto en que se abandona el diapasón. Calcular las frecuencias que percibe el observador:***

a) Un segundo antes del paso del diapasón.
b) Un segundo después. La velocidad del sonido en el aire es 340 m/s. Tómese $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

Solución:

a) Calculemos el tiempo que tarda el diapasón en descender, en caída libre, 50 m:

$$h = v_o t + \frac{1}{2}\, g \cdot t^2; \quad t = \sqrt{\frac{2\, h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} = 3{,}162 \text{ s}$$

La velocidad de caída del diapasón cuando han transcurrido $t' = 3{,}162 \text{ s} - 1 \text{ s} = 2{,}162$ s será:

$$v = v_o + g \cdot t' = 21{,}62 \text{ m/s}$$

Aplicando la fórmula del efecto Doppler para el caso en que el foco emisor se acerque al observador en reposo, tendremos:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{v}{v - v_F} = 500 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} - 21{,}62 \text{ m/s}} = \boxed{533{,}9 \text{ Hz}}$$

b) Al cabo de 4,162 s de haber dejado caer el diapasón su velocidad será:

$$v' = v_o + g \cdot t'' = 41{,}62 \text{ m/s}$$

y la frecuencia percibida por el observador:

$$\nu'' = \nu \cdot \frac{v}{v + v_F} = 500 \text{ Hz} \cdot \frac{340 \text{ m/s}}{340 \text{ m/s} + 41{,}62 \text{ m/s}} = \boxed{445{,}4 \text{ Hz}}$$

21.49. ***Sabiendo que las longitudes de onda de luz roja y de la verde son, respectivamente, $\lambda_r = 6{,}2 \cdot 10^{-5}$ cm y $\lambda_v = 5{,}4 \cdot 10^{-5}$ cm, y que la velocidad de la luz en el aire es $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, calcular a qué velocidad habrá de cruzar un coche un semáforo con luz roja para que al conductor le parezca verde.***

Solución: Las frecuencias correspondientes a la luz roja y verde son, respectivamente:

$$\nu_r = \frac{c}{\lambda_r} = \frac{3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}}{6{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}} = \frac{3}{62} \cdot 10^{16} \text{ Hz}$$

$$\nu_v = \frac{c}{\lambda_v} = \frac{3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}}{5{,}4 \cdot 10^{-5} \text{ cm}} = \frac{3}{54} \cdot 10^{16} \text{ Hz}$$

Como el observador se acerca al foco:

$$\nu' = \nu \cdot \left(1 + \frac{v_o}{c}\right)$$

y sustituyendo, tenemos:

$$\frac{3}{54} \cdot 10^{16} \text{ Hz} = \frac{3}{62} \cdot 10^{16} \text{ Hz} \left[1 + \frac{v_o}{3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}}\right]$$

de donde:

$$v_o = 4{,}44 \cdot 10^9 \text{ cm/s} = 4{,}44 \cdot 10^4 \text{ km/s} =$$

$$= \boxed{\textbf{14,8 \% de la velocidad de la luz en el aire}}$$

21.50. ***(*) Los surcos de un disco de gramófono son la reproducción material de las ondas de sonido que producen. Un disco gira a 45 r.p.m. y cuando la aguja se encuentra sobre un surco a 10 cm del centro del disco, se escucha una nota mantenida de un violín. La distancia entre dos crestas consecutivas de la onda grabada en el surco es de 0,471 mm. ¿Cuál es la frecuencia del sonido que se escucha?***

Solución: La longitud de onda es:

$$\lambda = 0{,}471 \text{ mm} = 4{,}71 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

y la velocidad de propagación:

$$v = \omega \cdot r = 45 \ \frac{rev}{min} \cdot \frac{2\pi \ rad}{1 \ rev} \cdot \frac{1 \ min}{60 \ s} \cdot 10 \ cm = 15\pi \ cm/s$$

Por tanto, la frecuencia del sonido será:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{15\pi \ cm/s}{0{,}0471 \ cm} = \boxed{\mathbf{1\ 000\ Hz}}$$

22. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

FORMULARIO-RESUMEN

Velocidad de propagación de una onda electromagnética:

a) En el vacío:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \cdot \mu_o}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \begin{cases} \varepsilon_o = \text{constante dieléctrica del vacío.} \\ \mu_o = \text{permeabilidad magnética del vacío.} \end{cases}$$

b) En un medio cualquiera:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}} \quad \begin{cases} \varepsilon_a = \text{constante dieléctrica del medio.} \\ \mu_a = \text{permeabilidad magnética del medio.} \end{cases}$$

Relación entre el campo eléctrico, E, y el magnético, B:

$$B = \frac{E}{c}$$

Frecuencia propia o resonante de un circuito oscilante:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \begin{cases} C = \text{capacidad del condensador.} \\ L = \text{autoinducción de la bobina.} \end{cases}$$

Relación entre la longitud de onda, λ, la frecuencia, ν, y la velocidad de propagación de una onda electromagnética en el vacío:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

22. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

22.1. *En una onda electromagnética ¿qué es lo que vibra: la materia o el campo?*

Solución: En una onda electromagnética lo que vibra es el campo eléctrico, y sus variaciones inducen vibraciones del campo magnético.

22.2. *¿Puede emitir radiación electromagnética la Luna? Razona tu respuesta.*

Solución: Emiten radiación electromagnética las cargas eléctricas en movimiento con velocidad variable. Por tanto, en principio, no hay razón alguna que impida la emisión de radiación electromagnética por parte de la Luna.

22.3. *¿Qué tipo de polarización poseen y en qué dirección y sentido se propagan las siguientes ondas electromagnéticas que vienen caracterizadas por el vector $\vec{E}$?*

a) $\vec{E} = E_o \cdot sen\,(\omega t - kx)\,\vec{j} + E_o \cdot sen\,(\omega t - kx)\,\vec{k}$

b) $\vec{E} = E_o \cdot sen\,(\omega t - kz)\,\vec{i}$

c) $\vec{E} = E_o \cdot cos\,(\omega t - kx)\,\vec{j} - E_o \cdot sen\,(\omega t - kx)\,\vec{k}$

d) $\vec{E} = E_1 \cdot sen\,(\omega t - kz)\,\vec{i} + E_2 \cdot cos\,(\omega t - kz)\,\vec{j}\,(E_1 \neq E_2)$

e) $\vec{E} = E_o \cdot cos\,(\omega t - kx)\,\vec{j} + E_o \cdot cos\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right)\vec{k}$

Solución:

a) **La polarización es lineal,** ya que, para cualquier valor de x y de t, siempre se cumple que $E_y = E_z$. El plano de polarización forma un ángulo de 45° con el plano OXY, ya que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{E_z}{E_y} = 1$. **La onda se propaga en el sentido positivo del eje OX.**

b) **La polarización es lineal,** siendo el plano de polarización el OXZ. **La onda se propaga en el sentido positivo del eje OZ.**

c) **La onda se propaga en el sentido positivo del eje OX y su polarización es circular,** ya que el módulo de $\vec{E}$ es constante:

$$E = \sqrt{E_o^2 \cdot \cos^2(\omega t - kx) + E_o^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\omega t - kx)} = E_o$$

y, además, **a izquierda,** puesto que las componentes E_y y E_z son de signo contrario.

d) **La onda avanza en el sentido positivo del eje OZ y su polarización es elíptica,** ya que $E_x \neq E_y$.

e) Como su ecuación se puede escribir de la forma:

$$\vec{E} = E_o \cdot \cos(\omega t - kx)\ \vec{j} + E_o \cdot \text{sen}\ (\omega t - kx)\ \vec{k}$$

se trata de una **onda polarizada circularmente a derecha** (puesto que las componentes E_y y E_z son positivas) **que avanza en el sentido positivo del eje OX.**

22.4. *Una onda electromagnética plana viene dada por las ecuaciones:*

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= 6 \cdot \text{sen}\ (\omega t - kx)\ \vec{j} + 6 \cdot \cos\ (\omega t - kx)\ \vec{k} \\ \vec{B} &= 2 \cdot 10^{-8} \cdot \cos\ (\omega t - kx)\ \vec{j} + 2 \cdot 10^{-8} \cdot \text{sen}\ (\omega t - kx)\ \vec{k} \end{aligned}\right\} (SI)$$

Comprobar que dicha onda está polarizada circularmente.

Solución: Ya que los módulos de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son constantes ($|\vec{E}| = 6$ V/m y $|\vec{B}| = 2 \cdot 10^{-8}$ T) y, además, ambos vectores son siempre perpendiculares entre sí, la onda **está polarizada circularmente.**

22.5. *Una onda electromagnética plana se propaga en el vacío. La ecuación del campo eléctrico es:*

$$\vec{E} = 0{,}5 \cdot \text{sen}\ 2\pi\ (ct - y)\ \vec{k}\ (SI)$$

Determinar su longitud de onda, el tipo de polarización, la dirección de propagación y el campo magnético asociado.

Solución: Comparando esta ecuación particular con la general de las ondas electromagnéticas: $E = E_o \cdot \text{sen}\ (\omega t - ky)$, tenemos: $k = 2\pi$.

Como, por otra parte: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, resulta:

$$\boxed{\lambda = 1\ \text{m}}$$

La polarización es lineal, siendo el plano de polarización el OYZ.

La onda se propaga en el sentido positivo del eje OY.

Como:

$$B_o = \frac{E_o}{c} = \frac{0{,}5\ \text{V/m}}{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}} = \frac{5}{3} \cdot 10^{-9}\ \text{T}$$

la ecuación del campo magnético asociado será:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{5}{3} \cdot 10^{-9} \cdot \text{sen}\ 2\pi\ (ct - y)\ \vec{i}\ (SI)}$$

22.6. ***Una onda electromagnética plana se propaga en el vacío. El campo eléctrico que produce dicha onda viene dado por:***

$$\vec{E} = \cos 2\pi \cdot 10^7 \left(t - \frac{z}{c}\right) \vec{i} + \operatorname{sen} 2\pi \cdot 10^7 \left(t - \frac{z}{c}\right) \vec{j} \; (SI)$$

Calcular la longitud de onda, el tipo de polarización, la dirección de propagación y la ecuación del campo magnético asociado.

Solución: Como:

$$\omega = 2\pi \cdot 10^7 \text{ rad/s} \quad y \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 10^7 \text{ s}^{-1}$$

resulta:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{10^7 \text{ s}^{-1}} = \boxed{30 \text{ m}}$$

Ya que el módulo de $\vec{E}$ es constante, **la onda está polarizada circularmente,** y, además, **a derecha,** puesto que las componentes E_x y E_y son de signo contrario.

De la ecuación del campo eléctrico que genera la onda se deduce que ésta **se propaga en el sentido positivo del eje OZ.**

Como:

$$B_o = \frac{E_o}{c} = \frac{1 \text{ V/m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-8} \text{ T}$$

la ecuación del campo magnético asociado será:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B} = &- \frac{1}{3} \cdot 10^{-8} \cdot \operatorname{sen} 2\pi \cdot 10^7 \left(t - \frac{z}{c}\right) \vec{i} + \\ &+ \frac{1}{3} \cdot 10^{-8} \cdot \cos 2\pi \cdot 10^7 \left(t - \frac{z}{c}\right) \vec{j} \; (SI) \end{aligned}}$$

22.7. ***Una onda electromagnética plana viene dada por la ecuación:***

$$\vec{E} = 30 \cdot \operatorname{sen} (3\pi \cdot 10^7 \, t - 10\pi \cdot z) \, \vec{i} + $$
$$+ 25 \cdot \operatorname{sen} (3\pi \cdot 10^7 \, t - 10\pi \cdot z) \, \vec{j} \; (SI)$$

Determinar la dirección de propagación, la longitud de onda y el tipo de polarización.

Solución: De la ecuación del campo eléctrico se deduce que la onda **se propaga en el sentido positivo del eje OZ.**

Como:

$$k = 10\pi = \frac{2\pi}{\lambda}$$

resulta:

$$\boxed{\lambda = \mathbf{0{,}2\ m}}$$

Como $E_x \neq E_y$, **la onda está polarizada elípticamente.**

22.8. ***Escribir la ecuación del campo eléctrico que produce una onda electromagnética plana, polarizada circularmente a izquierda y que se propaga en el sentido positivo del eje OX.***

Solución: Para que la onda esté polarizada circularmente, el módulo de $\vec{E}$ ha de ser constante. Además, para que la polarización sea a izquierda, las componentes E_y y E_z han de ser de signos contrarios. Por tanto, la ecuación del campo eléctrico será:

$$\boxed{\vec{E} = E_o \cdot [\cos(\omega t - kx)]\ \vec{j} - E_o \cdot [\text{sen}(\omega t - kx)]\ \vec{k}}$$

22.9. ***Ídem, si la polarización es elíptica y la onda se propaga en el sentido negativo del eje OZ.***

Solución: En este caso ha de cumplirse que $E_x \neq E_y$, y como, además, la onda avanza en el sentido negativo del eje OZ, la ecuación del campo eléctrico será:

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{E} = E_1 \cdot [\text{sen}(\omega t + kz)]\ \vec{i} + E_2 \cdot [\cos(\omega t + kz)]\ \vec{j} \\ (E_1 \neq E_2)\end{gathered}}$$

22.10. ***(*) Escribir la ecuación que representa el campo eléctrico de una onda electromagnética polarizada de 5 $V \cdot m^{-1}$ de amplitud y frecuencia 1 MHz. (Tómese el eje OX como dirección de propagación, siendo el plano de polarización el OXZ.)***

Solución: La ecuación general de una onda polarizada linealmente en el plano OXZ y que avanza en la dirección del eje OX es:

$$\vec{E} = E_o \cdot [\text{sen}(kx - \omega t)]\ \vec{k}$$

Como en este caso $E_o = 5\ V \cdot m^{-1}$ y $\nu = 10^6\ s^{-1}$:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8\ m/s}{10^6\ s^{-1}} = 3 \cdot 10^2\ m$$

resulta:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3 \cdot 10^2\ m} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-2}\ \pi\ m^{-1}$$

$$\omega = 2\pi \cdot \nu = 2\pi \cdot 10^6\ s^{-1}$$

Por tanto:

$$\vec{E} = 5 \left[\text{sen} \left(\frac{2}{3} \cdot 10^{-2} \pi \cdot x - 2\pi \cdot 10^6 \cdot t \right) \right] \vec{k} =$$

$$= 5 \left[\text{sen } 2\pi \left(\frac{10^{-2} \cdot x}{3} - 10^6 \cdot t \right) \right] \vec{k} \text{ (SI)}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}} = 5 \left[\textbf{sen } 2\pi \left(\frac{10^{-2} \cdot x}{3} - 10^6 \cdot t \right) \right] \vec{\mathbf{k}} \textbf{ (SI)}}$$

22.11. ***Escribir las ecuaciones de una onda electromagnética plana armónica que se propaga en el sentido positivo del eje OX, sabiendo que su longitud de onda es $\lambda = 4 \cdot 10^7$ m y la máxima amplitud del campo eléctrico es $E_o = 8\ V \cdot m^{-1}$.***

Solución: En primer lugar, como $\lambda = 4 \cdot 10^7$ m:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{4 \cdot 10^7 \text{ m}} = 7{,}5 \text{ s}^{-1}$$

Además:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4 \cdot 10^7 \text{ m}} = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi \cdot \nu = 2\pi \cdot 7{,}5 \text{ s}^{-1} = 15\pi \text{ s}^{-1}$$

Por tanto:

$$E_y = E_o \cdot \text{sen } [\omega t - kx] = 8 \cdot \text{sen} \left[15\pi\, t - \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-7}\, x \right] =$$

$$= 8 \cdot \text{sen} \left[\frac{1}{2} \cdot 10^{-7} \pi (3 \cdot 10^8 \cdot t - x) \right]$$

Como:

$$B_o = \frac{E_o}{c} = \frac{8\ V \cdot m^{-1}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = \frac{8}{3} \cdot 10^{-8}\ T$$

resulta:

$$B_z = \frac{8}{3} \cdot 10^{-8} \cdot \text{sen} \left[\frac{1}{2} \cdot 10^{-7} \pi (3 \cdot 10^8 \cdot t - x) \right]$$

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \mathbf{E_y} &= \mathbf{8} \cdot \textbf{sen} \left[\frac{1}{2} \cdot 10^{-7} \pi (3 \cdot 10^8 \cdot t - x) \right] \\ \mathbf{B_z} &= \frac{8}{3} \cdot 10^{-8} \cdot \textbf{sen} \left[\frac{1}{2} \cdot 10^{-7} \pi (3 \cdot 10^8 \cdot t - x) \right] \end{aligned} \right\} \textbf{(SI)}}$$

22.12. ***Tenemos dos circuitos oscilantes, uno de capacidad C_1 y autoinducción L_1 y otro de capacidad $2\ C_1$ y autoinducción $\frac{L_1}{2}$. ¿Oscilarán ambos con la misma frecuencia? ¿Por cuál circulará mayor intensidad?***

Solución: Como la frecuencia de oscilación viene dada por:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

ambos circuitos oscilarán con la misma frecuencia.

Circulará mayor intensidad de corriente a través de aquel circuito que presente menor impedancia.
La impedancia del primer circuito es:

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(L_1 \cdot \omega - \frac{1}{C_1 \cdot \omega}\right)^2}$$

y la del segundo:

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{L_1}{2} \cdot \omega - \frac{1}{2\ C_1 \cdot \omega}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 + \frac{1}{4}\left(L_1 \cdot \omega - \frac{1}{C_1 \cdot \omega}\right)^2} < Z_1$$

Por tanto, **circulará mayor intensidad por el segundo circuito.**

22.13. ***Calcular la frecuencia de las oscilaciones eléctricas producidas en el circuito de un generador si la autoinducción del circuito es de 20 mH y su capacidad 200 μF.***

Solución: La frecuencia de las oscilaciones será:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{20 \cdot 10^{-3}\ \text{H} \cdot 200 \cdot 10^{-6}\ \text{F}}} = \boxed{79{,}58\ \text{Hz}}$$

22.14. ***Si utilizamos para un televisor de 10^8 Hz de frecuencia un condensador de 4 nF, hallar la autoinducción de la bobina necesaria.***

Solución: De:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

se deduce:

$$L = \frac{1}{4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot C} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot (10^8\ s^{-1})^2 \cdot 4 \cdot 10^{-9}\ F} = \boxed{6{,}33 \cdot 10^{-10}\ H}$$

22.15. ***¿Cuál es la autoinducción de la bobina que es necesario intercalar en un circuito de resistencia despreciable y 4 μF de capacidad, para obtener una frecuencia de 1 000 Hz?***

Solución: Como:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

resulta:

$$L = \frac{1}{4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot C} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot (10^3\ Hz)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-6}\ F} =$$

$$= 6{,}33 \cdot 10^{-3}\ H = \boxed{6{,}33\ mH}$$

22.16. ***Un circuito consta de una autoinducción de 0,5 mH en serie con un condensador variable. ¿Cuál es la capacidad cuando la frecuencia natural es 10^5 Hz?***

Solución: La capacidad del condensador será:

$$C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot L} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot (10^5\ Hz)^2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}\ H} =$$

$$= 5 \cdot 10^{-9}\ F = \boxed{5\ nF}$$

22.17. ***La diferencia de potencial entre las armaduras de un condensador de 50 nF de capacidad, conectado en un circuito oscilante, viene dada, en función del tiempo por la expresión:***

$$V = 50 \cdot \cos 10^4\, \pi\, t\ (SI)$$

Hallar:

a) El período de las vibraciones.
b) La autoinducción del circuito.
c) La ecuación que expresa la variación de la intensidad de corriente en función del tiempo.
d) La longitud de onda correspondiente a este circuito.

Solución:

a) Como:

$$10^4\, \pi = \omega = \frac{2\pi}{T}$$

resulta:

$$T = \frac{2\pi}{10^4 \pi} = \boxed{2 \cdot 10^{-4}\ s}$$

b) La frecuencia de las vibraciones es:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-4}}\ s = 5 \cdot 10^3\ s$$

Como:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

resulta:

$$L = \frac{1}{4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot C} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot (5 \cdot 10^{-3}\ s^{-1})^2 \cdot 50 \cdot 10^{-9}\ F} =$$

$$= 0{,}02026\ H = \boxed{20{,}26\ mH}$$

c) La carga del condensador, en función del tiempo, será:

$$q = C \cdot \Delta V = 50 \cdot 10^{-9}\ F \cdot 50 \cos 10^4 \pi\ t\ (V) =$$
$$= 2{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot \cos 10^4 \pi\ t\ (SI)$$

Por tanto, la ecuación que expresa la variación de la intensidad de corriente en función del tiempo es:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\ (2{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot \cos 10^4 \pi\ t) = -0{,}0785 \cdot \text{sen}\ 10^4 \pi\ t\ (SI)$$

$$\boxed{i = -0{,}0785 \cdot \text{sen}\ 10^4 \pi\ t\ (SI)}$$

d) Calculemos, por último, la longitud de onda correspondiente a este circuito:

$$\lambda = c \cdot T = 3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s} \cdot 2 \cdot 10^{-4}\ s = \boxed{6 \cdot 10^4\ m}$$

22.18. ***Hallar la longitud de onda de las ondas emitidas por una estación de radio de 500 kHz de frecuencia.***

Solución:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8\ m/s}{5 \cdot 10^5\ s^{-1}} = \boxed{600\ m}$$

22.19. ***Indicar las analogías y diferencias que existen entre las ondas luminosas y las electromagnéticas.***

Solución: Ambas son de la misma naturaleza, ya que las ondas luminosas

no son sino ondas electromagnéticas de longitudes de onda comprendidas entre 7 800 Å y 3 900 Å.

22.20. ***Cuando se producen con un triodo oscilaciones eléctricas sostenidas, ¿de dónde proviene la energía?***

Solución: Proviene de la batería del circuito de placa, que es la que suministra corriente al circuito oscilante.

22.21. ***Para sintonizar nuestro receptor de radio con la emisora que deseamos podemos variar la capacidad o la autoinducción. ¿Qué es lo que suele hacerse en la práctica?***

Solución: Generalmente suele variarse la capacidad, debido a que es muy fácil disponer de condensadores de capacidad variable, puesto que su construcción es mucho más sencilla que la de una supuesta bobina de autoinducción variable,

22.22. ***¿A qué se llama «alta fidelidad»?***

Solución: Se denominan así aquellos aparatos que reproducen el sonido (voces o música) con extraordinaria exactitud, sin perder ni introducir armónicos y manteniendo la proporción de todas las frecuencias lo mismo que en el sonido original.

22.23. ***¿Por qué, tras el auge de los transistores, sólo se han utilizado los aparatos receptores de radio «a pilas»?***

Solución: La introducción de los transistores en la industria de la radio ha permitido una miniaturización de los circuitos, a la vez que ha proporcionado a los receptores de radio una mayor facilidad de transporte.

22.24. ***¿Por qué se oye mal un aparato de radio portátil cuando se atraviesa un puente metálico?***

Solución: Las ondas hertzianas llegan muy atenuadas al aparato de radio, ya que el puente, al actuar como una jaula de Faraday, captura la mayor parte de ellas. Por ello, al entrar en el puente, la intensidad del sonido —consecuencia de las ondas hertzianas transformadas por el receptor— disminuye considerablemente, recuperando el nivel anterior cuando salimos de él.

22.25. ***¿Por qué la onda corta es más apta que la onda larga para grandes distancias?***

Solución: Aunque el alcance de las ondas cortas (λ = 1-100 m) es menor que el de las largas (λ = 1-10 km), su capacidad de reflejarse en las capas altas de la atmósfera (ionosfera) las hace muy útiles para radiar a gran distancia, a base del rayo reflejado en dicha zona.

23. ONDAS Y PARTÍCULAS

FORMULARIO-RESUMEN

ENERGÍA RADIANTE

$E = h \cdot \nu$ (h = constante de acción de Planck = $6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s)

EFECTO FOTOELÉCTRICO

Energía de extracción:

$$\Phi = h \cdot \nu_o \quad (\nu_o = \text{frecuencia umbral})$$

Ecuación de Einstein:

$$h \cdot \nu = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + h \cdot \nu_o$$

Velocidad de los fotoelectrones:

$$v = \sqrt{\frac{2h}{m} (\nu - \nu_o)}$$

EFECTO COMPTON

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_o \cdot c} (1 - \cos \varphi)$$

- m_o = masa en reposo del electrón.
- c = velocidad de la luz.
- φ = ángulo de dispersión.
- λ = longitud de onda del fotón incidente.
- λ' = longitud de onda del fotón dispersado.

Corrimiento de Compton:

$$\frac{h}{m_o \cdot c} = 2{,}43 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 0{,}0243 \text{ Å}$$

HIPÓTESIS DE DE BROGLIE
$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$ $\begin{cases} m = \text{masa en movimiento de la partícula.} \\ v = \text{velocidad de la partícula.} \\ \lambda = \text{longitud de la onda asociada.} \end{cases}$
PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG
$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$ $\begin{cases} \Delta x = \text{incertidumbre en la medida de la posición de la partícula.} \\ \Delta p_x = \text{incertidumbre en la medida del momento lineal de la partícula.} \end{cases}$

23. ONDAS Y PARTÍCULAS

23.1. *¿Qué demuestra el efecto fotoeléctrico respecto a la naturaleza de la luz?*

Solución: El estudio del efecto fotoeléctrico es una prueba evidente de las teorías de Planck y de Einstein relativas a la emisión y propagación de la energía radiante; pero, a la vez, es una confirmación más de cómo la luz cuando interacciona con la materia se comporta con una cierta naturaleza corpuscular.

23.2. *¿Por qué en el efecto fotoeléctrico únicamente se aplica el principio de conservación de la energía y no el de conservación de la cantidad de movimiento (momento lineal)?*

Solución: En el efecto fotoeléctrico no se conserva el momento lineal, dada la gran inercia del cátodo, sobre el cual inciden los fotoelectrones.

23.3. *¿Qué se quiere expresar cuando se habla de la dualidad onda-corpúsculo?*

Solución: El doble comportamiento ondulatorio y corpuscular de la luz sugirió al físico francés Louis V. De Broglie la hipótesis de que, a su vez, la materia se comportara también con propiedades ondulatorias.

Esta teoría, conocida como **hipótesis de De Broglie,** se enuncia así:

«A toda partícula o corpúsculo en movimiento corresponde una onda cuya longitud depende del momento lineal de esa partícula, al cual es inversamente proporcional».

23.4. *Calcula la energía de un fotón de luz roja de $6 \cdot 10^3$ Å de longitud de onda.*

Solución: La energía de un fotón viene dada por la expresión:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

Recordando que $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s y que 1 Å $= 10^{-10}$ m, tendremos:

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{6 \cdot 10^3\ \text{Å} \cdot \dfrac{10^{-10}\ \text{m}}{1\ \text{Å}}} = \boxed{3{,}31 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}$$

23.5. *Calcula, en eV, la energía de los fotones de una onda de radio de 5 MHz de frecuencia.*

Solución:

$$E = h \cdot \nu = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 5 \cdot 10^6\ \text{s}^{-1} = 3{,}315 \cdot 10^{-27}\ \text{J} =$$

$$= 3{,}315 \cdot 10^{-27}\ \text{J} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = \boxed{2{,}07 \cdot 10^{-8}\ \text{eV}}$$

23.6. ***Deducir el intervalo de energía de los fotones correspondientes al espectro visible, que comprende desde 4 000 Å hasta 7 000 Å de longitud de onda.***

Solución:

$$E_1 = h \cdot \nu_1 = h \cdot \frac{c}{\lambda_1} =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ m/s}{4 \cdot 10^{-7}\ m} = 4{,}97 \cdot 10^{-19}\ J =$$

$$= 4{,}97 \cdot 10^{-19}\ J \cdot \frac{1\ eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J} = 3{,}10\ eV$$

$$E_2 = h \cdot \nu_2 = h \cdot \frac{c}{\lambda_2} =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ m/s}{7 \cdot 10^{-7}\ m} = 2{,}84 \cdot 10^{-19}\ J =$$

$$= 2{,}84 \cdot 10^{-19}\ J \cdot \frac{1\ eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J} = 1{,}77\ eV$$

Por tanto, el intervalo de energías de los fotones correspondientes al espectro visible es:

$$\boxed{3{,}10\ eV - 1{,}77\ eV}$$

23.7. ***Un gramo de hielo cae desde 1 m de altura. Hagamos la suposición de que toda su energía se convierte en luz de 5 000 Å de longitud de onda. ¿Cuántos fotones emitirá ese gramo de hielo al caer?***

Solución: La energía del hielo que cae es:

$$E = m \cdot g \cdot h = 10^{-3}\ kg \cdot 9{,}8\ m \cdot s^{-2} \cdot 1\ m = 9{,}8 \cdot 10^{-3}\ J$$

La energía de un fotón de 5 000 Å es:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ m/s}{5 \cdot 10^{-7}\ m} = 3{,}978 \cdot 10^{-19}\ J$$

El número de fotones emitidos será, por consiguiente:

$$n = \frac{9{,}8 \cdot 10^{-3}\ J}{3{,}978 \cdot 10^{-19}\ J/\text{fotón}} = \boxed{2{,}46 \cdot 10^{16}\ \text{fotones}}$$

23.8. ***La energía mínima necesaria para arrancar un electrón de una lámina de plata es 7,52 · 10⁻¹⁹ J. ¿Cuál es la frecuencia umbral de la plata?***

Solución:

$$\nu_0 = \frac{\Phi}{h} = \frac{7{,}52 \cdot 10^{-19}\ J}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s} = \boxed{\mathbf{1{,}13 \cdot 10^{15}\ s^{-1}}}$$

23.9. ***Calcular la longitud de onda de un fotón cuya energía es 600 eV.***

Solución:

$$E = 600\ eV = 600\ eV \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J}{1\ eV} = 9{,}6 \cdot 10^{-17}\ J$$

Como $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

de donde:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E}$$

Por tanto:

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s \cdot 3 \cdot 10^{8}\ m/s}{9{,}6 \cdot 10^{-17}\ J} = 2{,}07 \cdot 10^{-9}\ m = \boxed{\mathbf{20{,}7\ \text{Å}}}$$

23.10. ***La energía mínima necesaria para arrancar un electrón de una lámina de sodio metálico es 1,83 eV. ¿Cuál es la frecuencia umbral del sodio?***

Solución:

$$\Phi = 1{,}83\ eV = 1{,}83\ eV \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J}{1\ eV} = 2{,}93 \cdot 10^{-19}\ J$$

La frecuencia umbral viene dada por la expresión:

$$\nu_0 = \frac{\Phi}{h} = \frac{2{,}93 \cdot 10^{-19}\ J}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s} = \boxed{\mathbf{4{,}4 \cdot 10^{14}\ s^{-1}}}$$

23.11. ***Deducir la velocidad con que saldrán emitidos los electrones de una superficie metálica, sabiendo que la longitud de onda correspondiente al umbral de energía es de 6 000 Å y que la superficie se ilumina con luz de 4 000 Å de longitud de onda.***

Solución: Previamente se calcularán las frecuencias que corresponden a esas longitudes de onda:

$$\lambda_o = 6\,000\ \text{Å} \cdot \frac{10^{-10}\ \text{m}}{1\ \text{Å}} = 6 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

$$\lambda = 4\,000\ \text{Å} \cdot \frac{10^{-10}\ \text{m}}{1\ \text{Å}} = 4 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

$$\nu_o = \frac{c}{\lambda_o} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{6 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 5 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{4 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 7{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}$$

Aplicando la ecuación de Einstein:

$$v = \sqrt{\frac{2h}{m}\ (\nu - \nu_o)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}}{9 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = \boxed{6{,}07 \cdot 10^5\ \text{m/s}}$$

23.12. ***¿Qué energía posee un electrón arrancado al aluminio por una luz de frecuencia $8 \cdot 10^{14}\ s^{-1}$?***
La frecuencia umbral del aluminio es $6 \cdot 10^{14}\ s^{-1}$.

Solución: De acuerdo con la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico, tendremos:

$$E_c = h \cdot \nu - h \cdot \nu_o = h \cdot (\nu - \nu_o) =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot [8 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1} - 6 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}] = \boxed{1{,}33 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}$$

23.13. ***La frecuencia umbral de cierto metal es $8{,}8 \cdot 10^{14}\ s^{-1}$. Calcular la velocidad máxima de los electrones emitidos por ese metal cuando se ilumina con luz cuya longitud de onda es 2 536 Å. ¿Qué energía cinética poseen esos electrones?***

Solución: Apliquemos la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico:

$$E_{c_{máx}} = h \cdot \nu - h \cdot \nu_o = h \cdot \frac{c}{\lambda} - h \cdot \nu_o = h \cdot \left[\frac{c}{\lambda} - \nu_o\right] =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \left[\frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{2{,}536 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} - 8{,}8 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}\right] = \boxed{2 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}$$

Como:

$$E_{c_{máx}} = \frac{1}{2}\ m \cdot v_{máx}^2$$

resulta:

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2\ E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-19}\ J}{9,1 \cdot 10^{-31}\ kg}} = \boxed{6,6 \cdot 10^5\ \frac{m}{s}}$$

23.14. ***Una radiación monocromática, de frecuencia 7,5 · 10¹⁴ s⁻¹, incide sobre una lámina de potasio. La longitud de onda umbral del potasio es 0,55 micras. Calcular:***

a) La energía mínima precisa para extraer un electrón.
b) La energía que adquiere ese electrón.

Solución:

a) La energía mínima precisa para extraer un electrón será igual, precisamente, al trabajo o energía de extracción:

$$\Phi = h \cdot \nu_o = h \cdot \frac{c}{\lambda_o} =$$

$$= 6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ m/s}{5,5 \cdot 10^{-7}\ m} = \boxed{3,6 \cdot 10^{-19}\ J}$$

b) Aplicando la fórmula de Einstein para el efecto fotoeléctrico, tenemos:

$$E_c = E - \Phi = h \cdot \nu - \Phi = 6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s \cdot 7,5 \cdot 10^{14}\ s^{-1} -$$

$$- 3,6 \cdot 10^{-19}\ J = \boxed{1,36 \cdot 10^{-19}\ J}$$

23.15. ***Una superficie de cierto metal emite electrones cuya energía cinética equivale a 3 eV cuando se la ilumina con luz monocromática de longitud de onda 1 500 Å. ¿Cuál es el valor de la frecuencia umbral de ese metal?***

Solución: Como:

$$E_c = h \cdot \nu - h \cdot \nu_o = h \cdot [\nu - \nu_o] = h \cdot \left[\frac{c}{\lambda} - \nu_o\right]$$

resulta:

$$\nu_o = \frac{c}{\lambda} - \frac{E_c}{h} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^8\ m/s}{1,5 \cdot 10^{-7}\ m} - \frac{3\ eV \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19}\ J}{1\ eV}}{6,63 \cdot ^{-34}\ J \cdot s} = \boxed{1,28 \cdot 10^{15}\ s^{-1}}$$

23.16. ***La energía umbral de cierto metal es 1 eV. Iluminando una superficie de dicho metal se observa que los electrones emitidos poseen una energía cinética de 1,5 eV. Con qué frecuencia de luz fue iluminado?***

Solución: La energía de la radiación incidente es:

$$E = 1\ \text{eV} + 1{,}5\ \text{eV} = 2{,}5\ \text{eV} = 2{,}5\ \text{eV} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}} = 4 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

y su frecuencia:

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{4 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}} = \boxed{\mathbf{6 \cdot 10^{14}\ s^{-1}}}$$

23.17. ***Sabiendo que la energía fotoeléctrica umbral del cesio es 1,8 eV, determinar la longitud de onda máxima de una radiación capaz de producir la emisión de un fotoelectrón por una lámina de cesio con una energía de 4 eV.***

Solución: La energía de la radiación ha de ser, como mínimo:

$$E_{mín} = 4\ \text{eV} + 1{,}8\ \text{eV} = 5{,}8\ \text{eV}$$

Por tanto:

$$\lambda_{máx} = \frac{c}{\nu_{mín}} = \frac{c \cdot h}{E_{mín}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s} \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{5{,}8\ \text{eV} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}} = 2{,}143 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = \boxed{\mathbf{2\ 143\ Å}}$$

23.18. ***Calcular la energía cinética máxima de los electrones emitidos por una superficie metálica cuando inciden sobre ella fotones de 2 · 10⁻⁷ m de longitud de onda. El trabajo de extracción de ese metal es 4,2 eV.***

Solución: La energía de los fotones incidentes sobre la superficie metálica es:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}625 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} =$$

$$= 9{,}938 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 9{,}938 \cdot 10^{-19}\ \text{J} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 6{,}211\ \text{eV}$$

De acuerdo con la interpretación dada por Einstein, la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos por el aluminio es:

$$E_{c_{máx}} = E - \Phi = 6{,}211\ \text{eV} - 4{,}2\ \text{eV} = \boxed{\mathbf{2{,}011\ eV}}$$

23.19. ***(*) Al iluminar potasio con luz amarilla de sodio de λ = 5 890 Å, se liberan electrones con una energía de 0,577 · 10⁻¹⁹ J. Al iluminar el potasio con luz ultravioleta de una lámpara de mercurio de λ = 2 537 Å, se liberan electrones con una energía de 5,036 · 10⁻¹⁹ J. Deducir:***

a) Valor de la constante de Planck.
b) El trabajo de extracción, Φ, del potasio.

Solución:

a) Aplicando la ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico a los dos casos experimentales, tenemos:

$$h \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5\,890 \cdot 10^{-10} \text{ m}} - \Phi = 0{,}577 \cdot 10^{-19} \text{ J} \qquad [1]$$

$$h \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2\,537 \cdot 10^{-10} \text{ m}} - \Phi = 5{,}036 \cdot 10^{-19} \text{ J} \qquad [2]$$

Restando las dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$h \cdot \left[\frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2\,537 \cdot 10^{-10} \text{ m}} - \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5\,890 \cdot 10^{-10} \text{ m}} \right] =$$

$$= (5{,}036 - 0{,}577) \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

de donde:

$$h = \frac{4{,}459 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot 2\,537 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot 5\,890 \cdot 10^{-10} \text{ m}}{3\,353 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} =$$

$$= \boxed{\mathbf{6{,}625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}}$$

b) Sustituyendo el valor de h que acabamos de obtener, en la ecuación [1], resulta:

$$\Phi = 6{,}625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5\,890 \cdot 10^{-10} \text{ m}} - 0{,}577 \cdot 10^{-19} \text{ J} =$$

$$= 2{,}797 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2{,}797 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = \boxed{\mathbf{1{,}75 \text{ eV}}}$$

23.20. ***La longitud de onda umbral correspondiente a cierto metal es 3 000 Å. Calcular:***

a) El trabajo de extracción de dicho metal.
b) La velocidad máxima de los fotoelectrones emitidos por él cuando es incidido por luz de 2 000 Å de longitud de onda.

Solución:

a) Calculemos, en primer lugar, el trabajo de extracción correspondiente al metal citado en el enunciado del problema:

$$\Phi = h \cdot \nu_o = h \cdot \frac{c}{\lambda_o} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ m/s}{3 \cdot 10^{-7}\ m} =$$

$$= 6{,}63 \cdot 10^{-19}\ J = 6{,}63 \cdot 10^{-19}\ J \cdot s \cdot \frac{1\ eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J} = \boxed{4{,}144\ eV}$$

b) Como:

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} - \Phi = \frac{1}{2}\ m \cdot v_{máx}^2$$

resulta:

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2\left[h \cdot \frac{c}{\lambda} - \Phi\right]}{m}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\left[6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}}{2 \cdot 10^{-7}\ m} - 6{,}63 \cdot 10^{-19}\ J\right]}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg}}$$

$$= \boxed{8{,}536 \cdot 10^5\ m/s}$$

23.21. ***Demostrar que las energías E_o y E, correspondientes al fotón incidente y al difundido en el efecto Compton, están relacionadas entre sí mediante la expresión:***

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E_o} = \frac{1}{m_o \cdot c}\ (1 - \cos \varphi)$$

Solución: Partamos de la ecuación que nos da la variación de longitud de onda que experimenta el fotón incidente:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o = \frac{h}{m_o \cdot c}\ (1 - \cos \varphi)$$

Como $\lambda = \frac{c}{\nu}$, sustituyendo, resulta:

$$\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_o} = \frac{h}{m_o \cdot c}\ (1 - \cos \varphi)$$

Dividiendo los dos miembros de la anterior igualdad entre $h \cdot c$, se obtiene:

$$\frac{1}{h \cdot \nu} - \frac{1}{h \cdot \nu_o} = \frac{1}{m_o \cdot c^2}\ (1 - \cos \varphi)$$

es decir:

$$\boxed{\frac{1}{E} - \frac{1}{E_o} = \frac{1}{m_o \cdot c^2}\,(1 - \cos\varphi)}$$

23.22. ***En una experiencia de laboratorio, en la que se analiza la dispersión de un haz de rayos X de 0,80 Å de longitud de onda por un bloque de carbón, se observa la radiación dispersada a 90° del haz incidente.***

a) ¿Cuál es el corrimiento de Compton: $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o$?
b) Hallar la longitud de onda del haz de rayos X dispersado.
c) ¿Cuál es la energía cinética del electrón de retroceso?

Solución:

a) El corrimiento de Compton es:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o = \frac{h}{m_o \cdot c}\,(1 - \cos\varphi) =$$

$$= 2{,}43 \cdot 10^{-12}\ \text{m} \cdot (1 - 0) = 2{,}43 \cdot 10^{-12}\ \text{m} = \boxed{0{,}0243\ \text{Å}}$$

b) Como $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o$, resulta:

$$\lambda = \lambda_o + \Delta\lambda = 0{,}80\ \text{Å} + 0{,}0243\ \text{Å} = \boxed{0{,}8243\ \text{Å}}$$

c) Designemos por E_c a la energía cinética del electrón de retroceso. Aplicando el principio de conservación de la energía, tenemos:

$$E_c = E_o - E = \frac{h \cdot c}{\lambda_o} - \frac{h \cdot c}{\lambda} = h \cdot c\left[\frac{1}{\lambda_o} - \frac{1}{\lambda}\right] =$$

$$= \frac{h \cdot c \cdot \Delta\lambda}{\lambda \cdot \lambda_o} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s} \cdot 2{,}43 \cdot 10^{-12}\ \text{m}}{0{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{m} \cdot 0{,}8243 \cdot 10^{-10}\ \text{m}} =$$

$$= 7{,}324 \cdot 10^{-17}\ \text{J} = 7{,}324 \cdot 10^{-17}\ \text{J} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = \boxed{457{,}7\ \text{eV}}$$

23.23. ***Un fotón correspondiente a la zona de rayos X del espectro, cuya energía inicial es 5 000 eV, es difundido 60° al chocar con un electrón libre en reposo. Calcular para dicho fotón:***

a) La variación de su longitud de onda.
b) La variación de su frecuencia.
c) La variación de su energía.

Solución:

a)

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o = \frac{h}{m_o \cdot c}\,(1 - \cos\varphi) =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 1{,}215 \cdot 10^{-12}\ \text{m} = \boxed{1{,}215 \cdot 10^{-2}\ \text{Å}}$$

La longitud de onda del fotón aumenta, lo cual es lógico, ya que el fotón, al interaccionar con el electrón, pierde energía.

b) La frecuencia del fotón incidente es:

$$\nu_o = \frac{E_o}{h} = \frac{5\,000\ \text{eV} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}}{6{,}625 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}} = 1{,}2075 \cdot 10^{18}\ \text{Hz}$$

y su longitud de onda:

$$\lambda_o = \frac{c}{\nu_o} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{1{,}2075 \cdot 10^{18}\ \text{s}^{-1}} = 2{,}4845 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$$

Por el contrario, la longitud de onda del fotón difundido es:

$$\lambda = \lambda_o + \Delta\lambda = 2{,}4845 \cdot 10^{-10}\ \text{m} + 1{,}215 \cdot 10^{-12}\ \text{m} = \\ = 2{,}497 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$$

y su frecuencia:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{2{,}497 \cdot 10^{-10}\ \text{m}} = 1{,}2015 \cdot 10^{18}\ \text{Hz}$$

Por tanto, la variación de frecuencia que experimenta el fotón es:

$$\Delta\nu = \nu - \nu_o = 1{,}2015 \cdot 10^{18}\ \text{Hz} - 1{,}2075 \cdot 10^{18}\ \text{Hz} = \boxed{-6 \cdot 10^{15}\ \text{Hz}}$$

La frecuencia del fotón disminuye, consecuentemente con su pérdida de energía.

c) Calculemos, por último, la variación de energía del fotón:

$$\Delta E = h \cdot \Delta\nu = 6{,}625 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot (-6 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1}) = -3{,}975 \cdot 10^{-18}\ \text{J} = \\ = -3{,}975 \cdot 10^{-18}\ \text{J} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = \boxed{-24{,}84\ \text{eV}}$$

23.24. ***Un fotón de 2 Å de longitud de onda interacciona con un electrón libre, tras de lo cual su longitud de onda pasa a ser de 2,03645 Å. Calcular:***

a) El ángulo de difusión.
b) La energía cinética con que sale despedido el electrón.

Solución:

a) La variación de la longitud de onda de un fotón, a causa del efecto Compton, viene dada por:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o = \frac{h}{m_o \cdot c}\,(1 - \cos\varphi)$$

Si en esta ecuación sustituimos los datos numéricos del enunciado del problema, tenemos:

$$2{,}03645 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} - 2 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} =$$

$$= \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}} (1 - \cos \varphi)$$

de donde:

$$\cos \varphi = -\frac{1}{2}$$

y, por consiguiente:

$$\boxed{\varphi = 120°}$$

b) Aplicando el principio de conservación de la energía y designando por E_c a la energía cinética con que sale despedido el electrón, tenemos:

$$E_c = E_o - E = \frac{h \cdot c}{\lambda_o} - \frac{h \cdot c}{\lambda} = h \cdot c \left[\frac{1}{\lambda_o} - \frac{1}{\lambda}\right] =$$

$$= \frac{h \cdot c \cdot \Delta\lambda}{\lambda \cdot \lambda_o} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s} \cdot 3{,}645 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}}{2{,}03645 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot 2 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}} =$$

$$= 1{,}779 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{J} = 1{,}779 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{J} \cdot \frac{1\ \mathrm{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}} = \boxed{111{,}2\ \mathrm{eV}}$$

23.25. ***Calcular la longitud de onda de la onda asociada a una pelota, de masa 140 g, que se mueve con una velocidad de 250 m/s.***

Solución: De acuerdo con la hipótesis de De Broglie, la longitud de la onda asociada será:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{0{,}14\ \mathrm{kg} \cdot 250\ \mathrm{m/s}} = 1{,}9 \cdot 10^{-35}\ \mathrm{m} = \boxed{1{,}9 \cdot 10^{-25}\ \text{Å}}$$

23.26. ***Calcular la cantidad de movimiento de un fotón de luz roja cuya frecuencia es 4,4 · 10^14 s^-1.***

Solución: La cantidad de movimiento del fotón será:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h \cdot \nu}{c} =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} \cdot 4{,}4 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s^{-1}}}{3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}} = \boxed{9{,}72 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{kg \cdot m/s}}$$

23.27. ***Calcular la longitud de onda de la onda asociada a un electrón que se mueve entre dos puntos a y b de un campo eléctrico cuya diferencia de potencial es 100 V.***
Datos: masa del electrón, $9 \cdot 10^{-31}$ kg; carga del electrón, $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución: El electrón, al desplazarse entre los puntos a y b del campo, adquiere una energía cinética dada por la expresión:

$$\frac{1}{2}\ m \cdot v^2 = q \cdot (V_a - V_b)$$

$$\frac{1}{2}\ 9 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot v^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 10^2\ V$$

de la que se deduce:

$$v = 5{,}96 \cdot 10^6\ m/s$$

Este valor, sustituido en la expresión de De Broglie, nos da:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{9 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 5{,}96 \cdot 10^6\ ms} = 1{,}24 \cdot 10^{-10}\ m = \boxed{1{,}24\ \text{Å}}$$

Nota: En este y otros problemas, con objeto de simplificar cálculos, prescindimos de la corrección relativista de la masa.

23.28. ***Resolver el problema anterior para el caso de que la diferencia de potencial aplicada fuese 54 V.***

Solución:

$$\frac{1}{2}\ 9 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot v^2 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 54\ V$$

de donde:

$$v = 4{,}38 \cdot 10^6\ m/s$$

Y de aquí:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{9 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 4{,}38 \cdot 10^6\ ms} = 1{,}68 \cdot 10^{-10}\ m = \boxed{1{,}68\ \text{Å}}$$

23.29. ***Calcular la longitud de onda asociada a un electrón que es acelerado con una diferencia de potencial de 10 000 V.***
(Nota: No efectuar la corrección relativista de la masa.)

Solución: La energía cinética del electrón es:

$$E_c = q \cdot (V_a - V_b) = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 10^4\ V = 1{,}6 \cdot 10^{-15}\ J$$

y como dicha energía está relacionada con la velocidad de acuerdo con la expresión:

$$E_c = \frac{1}{2}\ m \cdot v^2$$

la velocidad del electrón será:

$$v = \sqrt{\frac{2\ E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-15}\ J}{9 \cdot 10^{-31}\ kg}} = 5{,}96 \cdot 10^7\ m/s$$

Aplicando la expresión de De Broglie, tenemos:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{9 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 5{,}96 \cdot 10^7\ m/s} = 1{,}24 \cdot 10^{-11}\ m = \boxed{\mathbf{0{,}124\ \text{Å}}}$$

23.30. ***La longitud de onda de la onda asociada a un electrón que ha sido acelerado con una determinada diferencia de potencial es 0,129 Å. ¿Cuál es el valor de esa diferencia de potencial? Se supone que no hay variación en la masa del electrón.***

Solución: De acuerdo con la relación de De Broglie, la velocidad del electrón será:

$$v = \frac{h}{m \cdot \lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 0{,}129 \cdot 10^{-10}\ m} = 5{,}648 \cdot 10^7\ m/s$$

y su energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}\ m \cdot v^2 = \frac{1}{2}\ 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot (5{,}648 \cdot 10^7\ m/s)^2 =$$

$$= 1{,}45 \cdot 10^{-15}\ J = 1{,}45 \cdot 10^{-15}\ J \cdot \frac{1\ eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J} \simeq 9\ 000\ eV$$

Por tanto, la diferencia de potencial a través de la cual se aceleró el electrón es:

$$\boxed{\mathbf{\Delta V \simeq 9\ 000\ V}}$$

23.31. ***(*) La frecuencia fotoeléctrica umbral del wolframio corresponde a una radiación de longitud de onda 2 300 Å. Determínese la longitud de onda de la onda asociada a los electrones emitidos por una superficie de wolframio sometida a la luz ultravioleta de longitud de onda 1 800 Å.***

Solución: La energía del electrón emitido es:

$$E = h \cdot \nu - h \cdot \nu_o = h \cdot c \cdot \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_o}\right] =$$

$$= 6{,}625 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s \cdot 3 \cdot 10^8\ m/s \cdot \left[\frac{1}{1{,}8 \cdot 10^{-7}\ m} - \frac{1}{2{,}3 \cdot 10^{-7}\ m}\right] =$$

$$= 2{,}401 \cdot 10^{-19}\ J$$

La longitud de onda asociada a los electrones emitidos viene dada por:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot E}} = \frac{6{,}625 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 2{,}401 \cdot 10^{-19}\ J}} =$$

$$= 1{,}002 \cdot 10^{-9}\ m = \boxed{\mathbf{10{,}02\ \text{Å}}}$$

23.32. ***La onda asociada a un electrón acelerado por una cierta diferencia de potencial tiene una longitud de onda igual a 1 Å. ¿Cuánto vale la diferencia de potencial que lo aceleró?***

Solución: Apliquemos la ecuación de De Broglie para hallar la velocidad del electrón:

$$v = \frac{h}{m \cdot \lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 10^{-10}\ m} = 7{,}286 \cdot 10^6\ m/s$$

Su energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2}\ m \cdot v^2 = \frac{1}{2}\ 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot (7{,}286 \cdot 10^6\ m/s)^2 =$$

$$= 2{,}415 \cdot 10^{-17}\ J = 2{,}415 \cdot 10^{-17}\ J \cdot \frac{1\ eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J} \simeq 150\ eV$$

En consecuencia, la diferencia de potencial que aceleró al electrón es:

$$\boxed{\mathbf{\Delta V \simeq 150\ V}}$$

23.33. ***Es sabido que las partículas alfa son núcleos de helio, de masa aproximadamente cuatro veces mayor que la del protón. Consideremos un protón y una partícula alfa que poseen ambos la misma energía cinética. ¿Qué relación existe entre las longitudes de onda de De Broglie correspondientes a las dos partículas?***

Solución: Utilicemos el subíndice α para referirnos a la partícula alfa y el p para el protón. De acuerdo con el concepto de energía cinética:

$$E_{c_\alpha} = \frac{1}{2}\ m_\alpha \cdot v_\alpha^2 \qquad [1] \qquad\qquad E_{c_p} = \frac{1}{2}\ m_p \cdot v_p^2 \qquad [2]$$

Como, según el enunciado del problema, las dos partículas tienen la misma energía cinética, igualando las expresiones [1] y [2], tenemos:

$$m_\alpha \cdot v_\alpha^2 = m_p \cdot v_p^2 \qquad [3]$$

Por otra parte: $m_\alpha = 4\ m_p$. Si sustituimos este dato en la ecuación [3] y simplificamos, se obtiene:

$$v_p = 2 \cdot v_\alpha$$

Apliquemos ahora la ecuación de De Broglie:

$$\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_p} = \frac{h/p_\alpha}{h/p_p} = \frac{h/m_\alpha \cdot v_\alpha}{h/m_p \cdot v_p} = \frac{m_p \cdot v_p}{m_\alpha \cdot v_\alpha} = \frac{m_p \cdot 2\ v_\alpha}{4\ m_p \cdot v_\alpha} = \frac{1}{2}$$

Resulta, finalmente:

$$\boxed{\lambda_p = 2 \cdot \lambda_\alpha}$$

23.34. ***Demostrar que para una partícula relativista la relación entre las longitudes de onda de De Broglie y de Compton es:***

$$\sqrt{(c/v)^2 - 1}$$

siendo v la velocidad de la partícula y c la de la luz.

Solución: La longitud de onda de De Broglie asociada a una partícula cuya masa en reposo es m_o y en movimiento m viene dada por:

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{\dfrac{m_o}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot v} = \frac{h \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{m_o \cdot v}$$

mientras que la longitud de onda de Compton es: $\lambda_c = \dfrac{h}{m_o \cdot c}$.

Por tanto:

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_C} = \frac{\dfrac{h \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{m_o \cdot v}}{\dfrac{h}{m_o \cdot c}} = \frac{c \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{v} = \boxed{\sqrt{(c/v)^2 - 1}}$$

23.35. ***a) Hallar la incertidumbre en la posición de una bala de 100 g de masa que se mueve con una velocidad de (400 ± 2) m/s.***

b) Ídem en la de un electrón ($m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg) animado de una velocidad $v = (4 \cdot 10^5 \pm 5 \cdot 10^4)$ m/s.

Solución:

a) De acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg:

$$\Delta x \geqslant \frac{h}{\Delta p_x} = \frac{h}{m \cdot \Delta v_x} \geqslant \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{0{,}1\ \mathrm{kg} \cdot 2\ \mathrm{m/s}} \geqslant \boxed{\mathbf{3{,}3 \cdot 10^{-33}\ m}}$$

b) Para el electrón:

$$\Delta x \geqslant \frac{h}{\Delta p_x} = \frac{h}{m \cdot \Delta v_x} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot 5 \cdot 10^{4}\ \mathrm{m/s}} \geqslant \boxed{\mathbf{1{,}5 \cdot 10^{-8}\ m}}$$

Obsérvese cómo la incertidumbre en la posición del electrón es mayor que las dimensiones atómicas, mientras que la correspondiente a la posición de la bala es del todo punto indetectable. En consecuencia, mientras que la posición de la bala se puede determinar con exactitud, la del electrón goza de una gran indeterminación.

24. TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

FORMULARIO-RESUMEN

ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN DE GALILEO

$x = x' + v \cdot t \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = t'$

ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

$x = \dfrac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$	$x' = \dfrac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$
$y = y'$	$y' = y$
$z = z'$	$z' = z$
$t = \dfrac{t' + \dfrac{v}{c^2} \cdot x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$	$t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

CONTRACCIÓN DE LONGITUDES

$L = L' \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$

- L = longitud en movimiento.
- L' = longitud en reposo (**longitud propia**).

DILATACIÓN DEL TIEMPO

$\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

- Δt = intervalo de tiempo en movimiento.
- Δt' = intervalo de tiempo en reposo (**tiempo propio**).

ECUACIONES RELATIVISTAS DE TRANSFORMACIÓN DE VELOCIDADES

$u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} \cdot u'_x}$	$u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} \cdot u_x}$
$u_y = \dfrac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} \cdot u'_x}$	$u'_y = \dfrac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \dfrac{v}{c^2} \cdot u_x}$
$u_z = \dfrac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} \cdot u'_x}$	$u'_z = \dfrac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \dfrac{v}{c^2} \cdot u_x}$

Si u' y v tienen la misma dirección:

$$u = \frac{u' \pm v}{1 \pm \dfrac{u' \cdot v}{c^2}} \quad \begin{cases} \text{Signo +: el mismo sentido.} \\ \text{Signo −: sentidos contrarios.} \end{cases}$$

VARIACIÓN DE LA MASA CON LA VELOCIDAD

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \quad \begin{cases} m_o = \text{masa en reposo } \textbf{(masa propia).} \\ m \; = \text{masa en movimiento } \textbf{(masa relativista).} \end{cases}$$

MOMENTO LINEAL RELATIVISTA

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = \frac{m_o \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}; \quad p = m \cdot v = c \cdot \sqrt{m^2 - m_o^2}$$

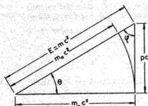
EQUIVALENCIA ENTRE MASA Y ENERGÍA

$$E = m \cdot c^2 = \frac{m_o \cdot c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \quad \begin{cases} \text{Si } v \ll c,\ E = m_o \cdot c^2 + \dfrac{1}{2}\, m_o \cdot v^2 = \\ = m_o \cdot c^2 + E_c = \sqrt{(m_o \cdot c^2)^2 + (pc)^2} = \\ = c \cdot \sqrt{m_o^2 \cdot c^2 + p^2} \end{cases}$$

ENERGÍA CINÉTICA

$$E_c = (m - m_o) \cdot c^2 \;\Big\}\; \text{Si } v \ll c,\ E_c \simeq \frac{1}{2}\, m_o \cdot v^2$$

Procedimiento mnemotécnico, basado en el teorema de Pitágoras, para recordar la relación entre la energía total (E), la energía en reposo ($m_o \cdot c^2$), la energía cinética (E_c) y el momento lineal (p):



$$\text{sen } \theta = \frac{v}{c}$$

$$\text{sen } \varphi = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{K}$$

24. TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

24.1. ***Una varilla cuya longitud es de 1 metro se mueve paralelamente a su longitud con una velocidad v = 0,8 c respecto a un observador. Hallar la longitud de la varilla medida por dicho observador.***

Solución:

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1\ \text{m} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0{,}8c}{c}\right)^2} = \boxed{\mathbf{0{,}6\ m}}$$

24.2. ***¿Cuál ha de ser la velocidad de una varilla para que su longitud sea la tercera parte que en reposo?***

Solución: De acuerdo con la fórmula de la contracción de FitzGerald-Lorentz:

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

como en este caso: $L = \frac{L'}{3}$, resulta: $\frac{1}{3} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, de donde se obtiene, finalmente:

$$\boxed{\mathbf{v = 0{,}94c}}$$

24.3. ***¿Cuál es la velocidad de una nave espacial que se aleja de la Tierra, sabiendo que un observador terrestre aprecia que su longitud es el 95 % de la que tenía en reposo?***

Solución: Procediendo de forma análoga al problema anterior, tenemos:

$$0{,}95 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

de donde:

$$\boxed{\mathbf{v = 0{,}312c}}$$

24.4. ***Dos naves espaciales, de 150 m de longitud en reposo cada una de ellas, se mueven en sentidos contrarios con velocidades de 0,6c respecto a la Tierra.***

a) ¿Qué longitud tiene cada nave, medida desde la Tierra?
b) ¿Qué longitud tiene cada nave, medida desde la otra?

Solución:

a)

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L' \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} =$$

$$= 150\ \text{m} \cdot \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 150\ \text{m} \cdot 0{,}8 = \boxed{\mathbf{120\ m}}$$

b) De acuerdo con la Mecánica relativista, la velocidad de cada nave, medida desde la otra, es:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' \cdot v}{c^2}} = \frac{(0,6 + 0,6)\ c}{1 + 0,6^2} = 0,882c$$

Por tanto, el observador situado en una de las naves aprecia que la otra tiene una longitud:

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 150\ m \cdot \sqrt{1 - 0,882^2} = \boxed{70,6\ m}$$

24.5. ***Un rectángulo, cuyos lados miden en reposo 0,50 m y 0,75 m, se mueve con velocidad*** $v = \frac{1}{2}$ ***c paralelamente al lado mayor.***

a) ¿Cuál será su superficie para un observador en reposo?
b) ¿Cuál ha de ser su velocidad para que a dicho observador en reposo le parezca un cuadrado?

Solución:

a) El observador en reposo apreciará que el lado mayor del rectángulo, de longitud L' = 0,75 m, se acorta, siendo su nueva longitud:

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L' \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} =$$

$$= 0,75\ m \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0,75\ m \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \boxed{0,6495\ m}$$

b) Para que al observador en reposo el rectángulo le parezca un cuadrado, su lado mayor L' = 0,75 m se ha de contraer hasta una longitud aparente L = 0,50 m.

En consecuencia:

$$0,50\ m = 0,75\ m \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

de donde:

$$\boxed{v = 0,745c}$$

24.6. ***¿Tiene sentido afirmar que dos sucesos que ocurren en lugares diferentes son simultáneos?***

Solución: Dos sucesos son simultáneos para un observador fijo si ocurren en el mismo instante ($t_1 = t_2$). Sin embargo, para un observador móvil, dos

sucesos son simultáneos sólo cuando se verifican en el mismo lugar ($x_1 = x_2$) y en el mismo instante ($t_1 = t_2$).

Por tanto, dos sucesos que ocurren en lugares diferentes **sólo son simultáneos para un observador fijo.**

24.7. *¿Qué significa que un suceso ocurra «antes» o «después» que otro?*

Solución: De dos sucesos que se verifican en instantes diferentes (t_1 y t_2), se dice que el primero ocurre antes que el segundo cuando un observador fijo aprecia que $t_1 < t_2$. Sin embargo, para un observador móvil el orden de sucesión puede invertirse, siempre que dicha inversión no se vea afectada por el principio de causalidad.

24.8. *Si la velocidad de la luz fuese infinita, la simultaneidad en la Física clásica ¿sería un concepto absoluto o relativo?*

Solución: Supongamos que en los puntos de coordenadas x_1 y x_2 de un sistema fijo ocurren dos sucesos en los instantes t_1 y t_2, respectivamente.

Un observador móvil ligado a un sistema que se desplaza a una velocidad v, aprecia entre ambos sucesos una diferencia de tiempo:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v^2}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Si ambos sucesos son simultáneos para un observador fijo ($t_1 = t_2$), y la velocidad de la luz fuese infinita ($c \rightarrow \infty$), se cumplirá también que $t'_1 = t'_2$; es decir, que los dos sucesos también serían simultáneos para cualquier observador móvil.

Por tanto, **si la velocidad de la luz fuese infinita, la simultaneidad sería un concepto absoluto.**

24.9. *¿Puede acelerarse un cuerpo hasta la velocidad de la luz? Razona adecuadamente la respuesta.*

Solución: Para acelerar un cuerpo es preciso comunicarle energía, y dicha energía se invierte principalmente:

a) Si su velocidad es pequeña ($v \ll c$), en incrementar su energía cinética.
b) Si su velocidad es elevada, próxima a la de la luz, en incrementar la masa.

El cuerpo **no puede alcanzar la velocidad de la luz,** pues para conseguirlo habría que comunicarle más energía, y a la velocidad de la luz toda esa energía se emplearía en aumentar la masa.

24.10. *Compara las dos expresiones siguientes:*

«El tiempo medido desde un cuerpo en movimiento se dilata.»
«Los relojes situados en un cuerpo en movimiento se retrasan.»

Solución: Ambas expresiones son **totalmente equivalentes.**

24.11. ***Dos gemelos, Pedro y Luis, tienen 25 años de edad. Pedro efectúa un viaje de ida y vuelta a la estrella Vega, que se encuentra a 26 años-luz de la Tierra, efectuando todo su recorrido con una velocidad v = 0,98c. ¿Qué edades tendrán Pedro y Luis cuando el primero regrese a la Tierra?***

Solución: El tiempo transcurrido para Luis es:

$$\Delta t = \frac{52c}{0{,}98c} = 53{,}06 \text{ años}$$

mientras que para Pedro valdrá:

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= 53{,}06 \text{ años} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0{,}98c}{c}\right)^2} = 10{,}56 \text{ años}$$

Luego, **la edad de Pedro será: 25 + 10,56 = 35,56 años, y la de Luis: 25 + 53,06 = 78,06 años.**

24.12. ***Un átomo radiactivo emite dos electrones en sentidos opuestos, cada uno con una velocidad de 0,75c, medida por un observador situado en el laboratorio donde el átomo se desintegra.***

a) ¿Cuál es la velocidad de cada electrón, medida desde el otro, de acuerdo con la Mecánica clásica?
b) Ídem, de acuerdo con la Mecánica relativista.
c) ¿Cuál es la velocidad de un electrón con respecto al otro, medida desde el laboratorio?

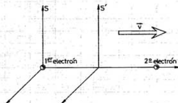


Fig. 24.1

Solución:

a) Consideremos uno de los electrones ligados al sistema fijo S, mientras que podemos asociar el laboratorio al sistema móvil S' (fig. 24.1). Con respecto al sistema S, el laboratorio se mueve con una velocidad v = 0,75c. Por otra parte, el segundo electrón tiene una velocidad u' = 0,75c con respecto al laboratorio. Por lo tanto, la velocidad de

este segundo electrón respecto al primero, según la Mecánica clásica, será:

$$u = u' + v = 0{,}75c + 0{,}75c = \boxed{1{,}50c}$$

b) Según la Mecánica relativista:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' \cdot v}{c^2}} = \frac{(0{,}75 + 0{,}75)\ c}{1 + (0{,}75)^2} = \boxed{0{,}96c}$$

c) Para calcular la velocidad de un electrón respecto al otro, medida por un observador situado en el laboratorio, se puede aplicar la Mecánica clásica, y obtenemos que dicha velocidad es:

$$\boxed{u = 1{,}50c}$$

24.13. ***Un astronauta desea ir hasta la estrella Vega, situada a 26 años-luz de la Tierra.***

a) ¿Cuál ha de ser la velocidad de su nave espacial con respecto a la Tierra para que el tiempo empleado en el viaje, medido desde la nave, sea de 5 años?

b) ¿Qué tiempo señalará un reloj situado en la Tierra?

Solución:

a) Como:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

sustituyendo, resulta:

$$26 \text{ años-luz} = \frac{5 \text{ años-luz}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Operando matemáticamente, resulta:

$$0{,}192\hat{3} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};\quad 0{,}03698 = 1 - \frac{v^2}{c^2};\quad \frac{v^2}{c^2} = 0{,}963$$

de donde:

$$\boxed{v = 0{,}9813c}$$

b) El tiempo que señalará un reloj situado en la Tierra será:

$$\Delta t = \frac{26c \text{ años-luz}}{0{,}9813c} = \boxed{26{,}5 \text{ años}}$$

24.14. ***Un viajero espacial de 25 años de edad efectúa un recorrido a través de nuestra galaxia, a la velocidad de 1,8 · 10⁸ m/s. Cuando regresa, el calendario terrestre revela que han transcurrido 50 años. ¿Qué edad parece tener el viajero?***

Solución: Para el viajero, el tiempo transcurrido será:

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= 50 \text{ años} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1{,}8 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}\right)^2} = 40 \text{ años}$$

Por tanto, la edad que parece tener el viajero es:

$$25 \text{ años} + 40 \text{ años} = \boxed{\mathbf{65\ años}}$$

24.15. ***Un determinado suceso tiene lugar en el sistema S, en el punto x = 200 km, y = 20 km, z = 2 km, en t = 4 · 10⁻⁴ s. Consideremos un sistema de referencia S' que se mueve a lo largo del eje XX' con la velocidad v = 0,9c con respecto a S, coincidiendo los orígenes de ambos sistemas en t = t' = 0. ¿Cuáles son las coordenadas de este suceso con respecto a S'?***

Solución: Aplicando las ecuaciones de transformación de Lorentz, tenemos:

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2 \cdot 10^5 \text{ m} - 0{,}9 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}}{\sqrt{1 - 0{,}9^2}} =$$

$$= 2{,}111 \cdot 10^5 \text{ m} = 211{,}1 \text{ km}$$

$$y' = y = 20 \text{ km}$$

$$z' = z = 2 \text{ km}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{4 \cdot 10^{-4} \text{ s} - \frac{0{,}9}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ m}}{\sqrt{1 - 0{,}9^2}} =$$

$$= -4{,}59 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

$$\boxed{\mathbf{x' = 211{,}1\ km;\ y' = 20\ km;\ z' = 2\ km;\ t' = -4{,}59 \cdot 10^{-4}\ s}}$$

24.16. ***Tenemos dos velocidades, $v_1 = \frac{3}{4}$ c y $v_2 = \frac{3}{5}$ c, de la misma dirección. ¿Cuál será la velocidad resultante:***

a) si son del mismo sentido?;
b) si son de sentido contrario?

Solución:

a) Si son del mismo sentido:

$$u = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} = \frac{\frac{3}{4}\,c + \frac{3}{5}\,c}{1 + \frac{\frac{3}{4}\,c \cdot \frac{3}{5}\,c}{c^2}} = \frac{\frac{27}{20}\,c}{1 + \frac{9}{20}} = \boxed{\frac{27}{29}\,c}$$

b) Si son de sentido contrario:

$$u = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}} = \frac{\frac{3}{4}\,c - \frac{3}{5}\,c}{1 - \frac{\frac{3}{4}\,c \cdot \frac{3}{5}\,c}{c^2}} = \frac{\frac{3}{20}\,c}{\frac{11}{20}} = \boxed{\frac{3}{11}\,c}$$

24.17. ***Desde la proa de una nave espacial que se aleja de la Tierra con una velocidad $v = 0{,}6c$, se lanza un cohete con una velocidad $u' = 0{,}9c$.***

a) ¿Qué velocidad tiene el cohete respecto a la Tierra?
b) ¿Cuál sería esta velocidad si el cohete se lanzase desde la popa?

Solución:

a) Si el cohete se lanza desde la proa de la nave espacial con una velocidad $u' = 0{,}9c$, su velocidad respecto a Tierra será:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' \cdot v}{c^2}} = \frac{0{,}9c + 0{,}6c}{1 + \frac{0{,}9c \cdot 0{,}6c}{c^2}} = \frac{1{,}5c}{1 + 0{,}54} = \boxed{0{,}97c}$$

b) Si el cohete se lanza desde la popa:

$$u = \frac{u' - v}{1 - \frac{u' \cdot v}{c^2}} = \frac{-0{,}9c + 0{,}6c}{1 - \frac{0{,}9c \cdot 0{,}6c}{c^2}} = \boxed{-0{,}65c}$$

24.18. ***¿Puede moverse una partícula a través de un medio con una velocidad mayor que la de la luz en dicho medio? Razona la respuesta.***

Solución: En un medio determinado toda partícula se puede mover a una velocidad mayor que la de la luz en dicho medio, con tal de que su veloci-

dad (como es lógico) no supere a la de la luz en el vacío. La partícula, en este caso, emitirá una radiación característica —radiación de Cerenkov— que se puede determinar experimentalmente.

24.19. ***La masa de un cuerpo en movimiento es doble que en reposo. Calcular la velocidad de dicho cuerpo.***

Solución: Teniendo en cuenta que:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

resulta:

$$2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

de donde, después de simplificar, se obtiene:

$$\boxed{v = 0{,}866c}$$

24.20. ***La Tierra ($m_o = 6 \cdot 10^{24}$ kg) se desplaza sobre su órbita con una velocidad $v = 30$ km/s. ¿Qué aumento de masa, en toneladas, aprecia un observador que se encuentra fijo con respecto al sistema solar?***

Solución: Como:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

resulta:

$$\Delta m = m - m_o = m_o \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] =$$

$$= 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{30 \text{ km/s}}{300\,000 \text{ km/s}} \right)^2}} - 1 \right] =$$

$$= 3 \cdot 10^{16} \text{ kg} = \boxed{3 \cdot 10^{13} \text{ ton}}$$

24.21. ***La velocidad orbital de la Tierra es de 30 km/s. ¿Cuál es su energía cinética orbital? ¿Qué masa corresponde a esta cantidad de energía? Compara el resultado con el del problema anterior.***

Solución: La energía cinética orbital de la Tierra será:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2 = \boxed{\mathbf{2{,}3 \cdot 10^{33} \text{ J}}}$$

A esta energía le corresponde una masa:

$$\Delta m = \frac{E_c}{c^2} = \frac{2{,}3 \cdot 10^{33} \text{ J}}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 2{,}6 \cdot 10^{16} \text{ kg} \simeq \boxed{\mathbf{3 \cdot 10^{16} \text{ kg}}}$$

resultado concordante con el del problema anterior.

24.22. ***Una central nuclear tiene una potencia de 2 MW. ¿Qué disminución de combustible se producirá al cabo de un año?***

Solución: La energía que dicha central produce en un año es:

$$W = P \cdot t = 2 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot 1 \text{ año} \cdot \frac{365 \text{ días}}{1 \text{ año}} \cdot \frac{86\,400 \text{ s}}{1 \text{ día}} = 6 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

A esta energía le corresponde una disminución de masa de:

$$\Delta m = \frac{W}{c^2} = \frac{6 \cdot 10^{13} \text{ J}}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ kg} = \boxed{\mathbf{0{,}7 \text{ g}}}$$

24.23. ***Hallar la masa y la energía total de un electrón cuya velocidad es 10^8 m/s. (La masa en reposo del electrón es $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.)***

Solución: La masa del electrón en movimiento será:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{\sqrt{1 - \left(\frac{10^8 \text{ m/s}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}\right)^2}} = \boxed{\mathbf{9{,}65 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}}$$

y su energía total:

$$E = m \cdot c^2 = 9{,}65 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = \boxed{\mathbf{8{,}69 \cdot 10^{-14} \text{ J}}}$$

24.24. ***Si 1 cm^3 de agua se desmaterializa totalmente, ¿qué cantidad de energía se obtendrá?***

Solución: 1 cm^3 de agua tiene una masa de 1 g. Al desmaterializarse produce una cantidad de energía:

$$E = m \cdot c^2 = 10^{-3} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = \boxed{\mathbf{9 \cdot 10^{13} \text{ J}}}$$

24.25. ***Hallar el momento lineal de un electrón que se mueve a una velocidad $v = 0,6c$, teniendo en cuenta que la energía en reposo del electrón es 0,511 MeV (1 MeV = 1,6 · 10^{-13} J).***

Solución: Calculemos, en primer lugar, la masa en reposo del electrón:

$$m_o = \frac{0,511 \text{ MeV} \cdot \dfrac{1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{1 \text{ MeV}}}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 9,084 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

El momento lineal del electrón será:

$$p = m \cdot v = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot v =$$

$$= \frac{9,084 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 0,6 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{1 - 0,6^2}} = \boxed{\mathbf{2,046 \cdot 10^{-22} \ kg \cdot m \cdot s^{-1}}}$$

24.26. ***La energía en reposo de un electrón es igual a su energía cinética. Hallar su velocidad.***

Solución: La energía en reposo de un electrón es: $m_o \cdot c^2$ y su energía cinética: $(m - m_o) \cdot c^2$.

De acuerdo con el enunciado del problema, podemos escribir:

$$m_o \cdot c^2 = (m - m_o) \cdot c^2$$

de donde, tras simplificar, se obtiene:

$$m = 2 \, m_o$$

Aplicando la fórmula de la variación relativista de la masa con la velocidad, tenemos:

$$\frac{m_o}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = 2 \, m_o; \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = 2$$

resultando, finalmente:

$$\boxed{\mathbf{v = 2,60 \cdot 10^8 \ m/s}}$$

24.27. ***La energía en reposo de un electrón es 0,511 MeV. Hallar la energía cinética de un electrón en movimiento con una velocidad $v = 0,5c$.***

Solución: La energía cinética del electrón es:

$$E_c = (m - m_o) \cdot c^2 = \left[\frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_o \right] c^2 =$$

$$= m_o \cdot c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] =$$

$$= 0{,}511 \text{ MeV} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}5^2}} - 1 \right] = 0{,}0791 \text{ MeV} = \boxed{79{,}1 \text{ keV}}$$

24.28. ***La energía en reposo de un protón es 938 MeV y su energía cinética, 1 876 MeV. ¿Cuál es la relación entre sus masas relativista y en reposo?***

Solución: Como la energía en reposo de una partícula es $m_o \cdot c^2$ y su energía cinética: $(m - m_o) \cdot c^2$, aplicando las expresiones anteriores al caso del protón, tenemos:

$$m_o \cdot c^2 = 938 \text{ MeV} \qquad [1]$$

$$(m - m_o) \cdot c^2 = 1\,876 \text{ MeV} \qquad [2]$$

Dividiendo entre sí las expresiones [1] y [2], se obtiene:

$$\frac{m_o}{m - m_o} = \frac{1}{2}$$

de donde resulta:

$$\boxed{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{m_o}} = \mathbf{K} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}}$$

24.29. ***La energía total de un electrón es el quíntuplo de su energía en reposo. ¿Cuál es su momento lineal y su velocidad?***

Solución: Como la energía total de una partícula es igual a la suma de sus energías cinética y en reposo, de acuerdo con el enunciado del problema resulta que la energía cinética del electrón: $(m - m_o) \cdot c^2$, será igual al cuádruplo de su energía en reposo: $m_o \cdot c^2$.

$$(m - m_o) \cdot c^2 = 4\, m_o \cdot c^2$$

Simplificando, se obtiene:

$$m = 5\, m_o$$

$$\frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 5\ m_o; \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{5}$$

de donde:

$$\boxed{v = 0{,}98c}$$

El momento lineal del electrón será:

$$p = m \cdot v = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - 0{,}8^2}} \cdot 0{,}98 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s} =$$

$$= \boxed{1{,}335 \cdot 10^{-21}\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

24.30. ***La longitud de una varilla en reposo es L' = 10 m, y su masa, también en reposo, 0,5 kg.***

a) ¿Cuál es su longitud, medida por un observador que se desplaza paralelamente a ella con una velocidad $v = \frac{3}{4}\ c$***?***

b) ¿Y si el observador se desplazase perpendicularmente a la varilla?

c) ¿Cuál es el momento lineal de la varilla?

d) ¿Cuál es su energía total?

Solución:

a)

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= 10\ \text{m} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = 10\ \text{m} \cdot \sqrt{1 - \frac{9}{16}} =$$

$$= 10\ \text{m} \cdot \sqrt{\frac{7}{16}} = 10\ \text{m} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \boxed{6{,}61\ \text{m}}$$

b) Si el observador se desplaza perpendicularmente a la varilla, no observará variación alguna en su longitud:

$$\boxed{L = 10\ \text{m}}$$

c) El momento lineal de la varilla será:

$$p = m \cdot v = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v =$$

$$= \frac{0{,}5 \text{ kg}}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}} \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = \boxed{1{,}7 \cdot 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

d) Calculemos, por último, la energía total de la varilla:

$$E = m \cdot c^2 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 =$$

$$= \frac{0{,}5 \text{ kg}}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = \boxed{6{,}8 \cdot 10^{16} \text{ J}}$$

24.31. ***Calcular el radio de la circunferencia descrita por un electrón de 20 MeV de energía que se mueve perpendicularmente a un campo magnético de 4 T de inducción:***

a) Utilizando la Mecánica clásica.
b) Utilizando la Mecánica relativista (la masa en reposo del electrón es $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg = 0,511 MeV).

Solución: La fuerza de Lorentz que actúa sobre una carga eléctrica en movimiento en el interior de un campo magnético es: $\vec{F} = q \cdot [\vec{v} \wedge \vec{B}]$, siendo su módulo: $F = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } \varphi$. Si el electrón se mueve perpendicularmente al campo magnético, $\varphi = 90°$, $\text{sen } \varphi = 1$, y, en consecuencia, $F = q \cdot v \cdot B$. Dicha fuerza, siempre perpendicular a la velocidad del electrón, le comunica a éste una aceleración centrípeta de valor:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Por lo tanto:

$$F = q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

de donde:

$$R = \frac{m \cdot v}{B \cdot q} = \frac{p}{B \cdot q}$$

a) Según la Mecánica clásica:

$$p = m_o \cdot v = m_o \cdot \sqrt{\frac{2 E_c}{m_o}} = \sqrt{2 m_o \cdot E_c} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 20\ \text{MeV} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}{1\ \text{MeV}}} =$$

$$= 2{,}41 \cdot 10^{-21}\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por lo tanto:

$$R = \frac{p}{B \cdot q} = \frac{2{,}41 \cdot 10^{-21}\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{4\ \text{T} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 3{,}77 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = \boxed{0{,}377\ \text{cm}}$$

b) Apliquemos ahora la Mecánica relativista:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{(E_c + m_o \cdot c^2)^2 - (m_o \cdot c^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} \sqrt{[(20 + 0{,}511)\ \text{MeV}]^2 - (0{,}511\ \text{MeV})^2} \cdot 1{,}6 \cdot$$

$$\cdot 10^{-13}\ \frac{\text{J}}{\text{MeV}} = 1.094 \cdot 10^{-20}\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Luego:

$$R = \frac{p}{B \cdot q} = \frac{1{,}094 \cdot 10^{-20}\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{4\ \text{T} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 1{,}71 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = \boxed{1{,}71\ \text{cm}}$$

24.32. ***Cuando pasan fotones a través de una lámina delgada de materia se crea un par electrón-positrón detectable en una cámara de burbujas por las huellas curvadas de su paso. Si el campo magnético en el interior de la cámara es $B = 0{,}20\ T$ y los radios de las trayectorias de ambas partículas 2,5 cm, hallar la energía y longitud de onda del fotón que produjo el par. (Las energías en reposo del electrón y del positrón son de 0,511 MeV.)***

Solución: El momento lineal de cada una de las partículas (electrón y positrón) creadas en el proceso de materialización es:

$$p = B \cdot q \cdot R = 0{,}20\ \text{T} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 8 \cdot 10^{-22}\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

y su energía total:

$$E = \sqrt{(m_o \cdot c^2)^2 + (pc)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(0{,}511\ \text{MeV} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}{1\ \text{MeV}}\right)^2 + \left(8 \cdot 10^{-22}\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} =$$

$$= 2{,}535 \cdot 10^{-13}\ \text{J} = 2{,}535 \cdot 10^{-13}\ \text{J} \cdot \frac{1\ \text{MeV}}{1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J}} = 1{,}58\ \text{MeV}$$

Por tanto, la energía del fotón será igual al doble de la correspondiente a cada una de las partículas:

$$\boxed{E = 3{,}2\ \text{MeV}}$$

La longitud de onda del fotón es:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot c} = \frac{h \cdot c}{m \cdot c^2} = \frac{h \cdot c}{E} =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{3{,}2\ \text{MeV} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}{1\ \text{MeV}}} =$$

$$= 3{,}9 \cdot 10^{-13}\ \text{m} = \boxed{0{,}0039\ \text{Å}}$$

24.33. ***La «masa efectiva» de un fotón se puede calcular mediante la relación:***

$$m = \frac{E}{c^2}$$

Hallar las masas efectivas de dos fotones: uno de 5 000 Å de longitud de onda (región visible) y otro de 1 Å (rayos X).

Solución: Como:

$$E = h \cdot \nu \quad y \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

la masa efectiva de un fotón será:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h \cdot \nu}{c^2} = \frac{h \cdot c/\lambda}{c^2} = \frac{h}{c \cdot \lambda}$$

Para el fotón del visible:

$$m = \frac{h}{c \cdot \lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s} \cdot 5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = \boxed{4{,}42 \cdot 10^{-36}\ \text{kg}}$$

y para el de rayos X:

$$m = \frac{h}{c \cdot \lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s} \cdot 10^{-10}\ \text{m}} = \boxed{2{,}21 \cdot 10^{-32}\ \text{kg}}$$

24.34. ***¿Qué le sucede a la masa de una partícula cuando aumenta su energía cinética? ¿Y a la velocidad?***

Solución: La masa aumenta y la velocidad también. Sin embargo, hay que considerar dos casos:

a) Si la velocidad es pequeña, un aumento de energía se traduce primordialmente en un aumento de velocidad.
b) Si la velocidad es elevada, próxima a la de la luz, la energía suministrada se invierte, casi por entero, en incrementar la masa de la partícula.

24.35. ***La suma de los ángulos internos de un triángulo sobre una superficie esférica ¿es igual a 180°? ¿Y sobre una superficie plana? ¿En qué circunstancias la geometría esférica se reduce a la geometría plana?***

Solución: Mientras que la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo situado sobre una superficie plana es igual a 180°, si dicho triángulo se encuentra sobre una superficie esférica, la suma de sus ángulos internos es mayor de 180°.

Si se trata de superficies pequeñas situadas sobre una esfera de gran radio (caso de puntos cercanos sobre la superficie de la Tierra), la geometría esférica se puede reducir a la geometría plana.

25. RADIACTIVIDAD

FORMULARIO-RESUMEN

Emisión alfa: ${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$ + energía **(ley de Soddy)**

Emisión beta: ${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}_{Z+1}{}^{A}Y + {}_{-1}^{0}e$ + energía **(ley de Fajans)**

LEY DE ELSTER Y GEITEL DE LA DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA

$$N = N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

- λ = constante radiactiva.
- N_o = número de núcleos radiactivos iniciales.
- N = número de núcleos radiactivos en un instante dado.
- t = tiempo transcurrido.

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda} = 0{,}693 \cdot \theta$$

- T = período de semidesintegración.
- θ = vida media o promedio de vida.

TIPOS DE REACCIONES NUCLEARES

Proyectil	Emisión	Ejemplo	Formulación
α	p	${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}H$	${}^{14}_{7}N(\alpha, p){}^{17}_{8}O$
α	n	${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{30}_{15}P + {}^{1}_{0}n$	${}^{27}_{13}Al(\alpha, n){}^{30}_{15}P$
n	p	${}^{27}_{13}Al + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{27}_{12}Mg + {}^{1}_{1}H$	${}^{27}_{13}Al(n, p){}^{27}_{12}Mg$
n	α	${}^{16}_{8}O + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{13}_{6}C + {}^{4}_{2}He$	${}^{16}_{8}O(n, \alpha){}^{13}_{6}C$
p	α	${}^{9}_{4}Be + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{6}_{3}Li + {}^{4}_{2}He$	${}^{9}_{4}Be(p, \alpha){}^{6}_{3}Li$
p	n	${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{7}_{4}Be + {}^{1}_{0}n$	${}^{7}_{3}Li(p, n){}^{7}_{4}Be$
n	γ	${}^{23}_{11}Na + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{24}_{11}Na + \gamma$	${}^{23}_{11}Na(n, \gamma){}^{24}_{11}Na$
p	γ	${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{8}_{4}Be + \gamma$	${}^{7}_{3}Li(p, \gamma){}^{8}_{4}Be$

FACTOR DE MULTIPLICACIÓN, k, DE UNA REACCIÓN DE FISIÓN NUCLEAR

$$k = \frac{\text{Neutrones emitidos}}{\text{Neutrones absorbidos} + \text{neutrones perdidos}}$$

- Si $k = 1$, reacción crítica o estacionaria.
- Si $k > 1$, supercrítica.
- Si $k < 1$, subcrítica.

25. RADIACTIVIDAD

25.1. *¿Cómo se descubrieron los fenómenos radiactivos? ¿Qué consecuencia se deduce del hecho de que los fenómenos radiactivos son independientes del estado físico o químico del elemento radiactivo?*

Solución: Los primeros fenómenos radiactivos naturales fueron descubiertos por H. Becquerel en 1896, al observar cómo las sales de uranio eran capaces de impresionar placas fotográficas, aun sin haber estado expuestas a la luz.

Posteriormente, E. Rutherford observó cómo las sales de uranio podían ionizar el aire, lo que suponía la emisión de algún tipo de radiación.

Las investigaciones de los esposos Curie llevaron a la conclusión de que había más sustancias radiactivas, siendo estos fenómenos radiactivos exclusivamente de carácter atómico.

A partir de entonces se entiende por radiactividad el fenómeno por el cual algunas sustancias son capaces de emitir radiaciones, las cuales impresionan las placas fotográficas, ionizan gases, producen fluorescencia..., etc.

El hecho de que los fenómenos radiactivos sean independientes del estado físico o químico del elemento radiactivo induce a considerar a dichos fenómenos como **de naturaleza atómica.**

25.2. *¿Cómo se demostró que las partículas alfa eran núcleos de helio? ¿Qué datos primeros avalaban esta hipótesis?*

Solución: Rutherford y Royds recogieron en un tubo de descarga las partículas alfa emitidas durante varios días por una sustancia radiactiva. Al cabo de ese tiempo produjeron una descarga eléctrica en el tubo. Examinado el espectro obtenido, se vio que correspondía al helio, quedando así definitivamente establecida la naturaleza de estas partículas.

25.3. *¿Cuál es la naturaleza de las partículas beta? ¿Cómo se explica que un núcleo emita partículas beta si en él sólo existen protones y neutrones?*

Solución: Sometiendo las radiaciones emitidas por sustancias radiactivas a la acción de campos eléctricos y magnéticos y observando los efectos producidos en ellas, se dedujo que las partículas beta son electrones, con velocidades enormes, en algunos casos muy próximas a la de la luz.

Se admite que un neutrón de los que componen el núcleo se desdobla en un protón —que permanece en el mismo núcleo— y en un electrón y un antineutrino, que salen de él. Por esta razón, el núcleo resultante se diferencia del inicial únicamente en el número atómico, que es una unidad mayor (tiene un protón más).

25.4. *¿Qué región del átomo es «responsable» de las propiedades químicas del elemento y cuál de las propiedades radiactivas?*

Solución: Las propiedades químicas de un elemento dependen exclusivamente de la corteza de sus átomos; es decir, del número de electrones de la corteza y de cómo están distribuidos en ella.

Por el contrario, las propiedades radiactivas dependen solamente de la estructura del núcleo del átomo.

25.5. *¿Qué cambios experimenta un núcleo atómico cuando emite una partícula alfa? ¿Y si emite una partícula beta? ¿Y cuando emite radiación gamma?*

Solución: Cuando en una transformación radiactiva se emite una partícula alfa se obtiene un nuevo elemento cuyo número atómico es dos unidades menor que el de su progenitor, siendo su número másico cuatro unidades menor **(ley de Soddy).**

La emisión de una partícula beta origina un nuevo elemento cuyo número atómico es una unidad mayor que el de su progenitor, siendo su número másico el mismo **(ley de Fajans).**

Por último, la emisión de radiación gamma da origen a una mayor estabilidad del núcleo, sin que se modifiquen ni el número atómico ni el número másico.

25.6. *¿A qué se denomina período de semidesintegración de una sustancia? ¿Qué relación guarda con la constante radiactiva? ¿Y con la vida media?*

Solución: Se denomina período de semidesintegración de una sustancia radiactiva, T, al tiempo que tarda una determinada cantidad de dicha sustancia en descomponer exactamente la mitad del número de átomos que existían al principio, los cuales, a su vez, han dado lugar a otros átomos distintos. El período de semidesintegración es característico de cada sustancia radiactiva.

La constante radiactiva, λ, representa la mayor o menor probabilidad que tiene un átomo dado para desintegrarse. La vida media, θ, es la inversa de la constante radiactiva; representa la «esperanza de vida futura» de un átomo, es decir, el tiempo que por término medio, a partir de un instante dado, un átomo permanecerá sin desintegrarse.

La relación entre estas tres constantes es la siguiente:

$$T = \frac{0{,}693}{\lambda} = 0{,}693 \cdot \theta$$

25.7. *Una porción de sustancia radiactiva pura pesa 1 mg y tiene un período de semidesintegración de 30 días. ¿A qué cantidad se habrá reducido al cabo de 60 días?*

Solución: Al cabo de 30 días existirá la mitad de esa sustancia radiactiva; es decir, 0,5 miligramos.

Al cabo de otros 30 días existirá la mitad de la sustancia radiactiva presente al comienzo de dicho intervalo; es decir, la mitad de 0,5 miligramos.

Por tanto, al cabo de 60 días existirán **0,25 mg** de sustancia radiactiva.

También se puede resolver el problema aplicando la ley de Elster y Geitel:

$$N = N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_o \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t}$$

En este caso:

$$m = 1 \text{ mg} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{30 \text{ días}} \cdot 6 \text{ días}} = 1 \text{ mg} \cdot e^{-2 \cdot \ln 2} =$$

$$= 1 \text{ mg} \cdot e^{-\ln 2^2} = 1 \text{ mg} \cdot \frac{1}{2^2} = \boxed{\mathbf{0{,}25 \text{ mg}}}$$

25.8. ***¿En cuánto tiempo verá reducido su capital a la octava parte una persona que invierta su fortuna en material radiactivo?***

Solución: Cada vez que transcurra un tiempo igual al período de semidesintegración el capital se reduce a la mitad. Por tanto, al transcurrir un tiempo equivalente a **tres períodos de semidesintegración,** el capital se verá reducido a la octava parte.

25.9. ***¿Es equivalente la electrización por frotamiento de un cuerpo a la emisión de partículas beta?***

Solución: Aunque en los dos casos hay emisión de electrones (nos referimos, evidentemente, a cuando el cuerpo se electriza positivamente por frotamiento), la diferencia es la siguiente:

- En los fenómenos de electrización positiva por frotamiento, el átomo libera electrones de su corteza; por tanto, el núcleo atómico queda inalterado.
- En los fenómenos de emisión de partículas beta el átomo libera electrones de su núcleo. Por tanto, el núcleo atómico se altera, dando origen a un nuevo elemento.

25.10. ***¿Qué leyes se han de cumplir en toda reacción nuclear?***

Solución: En toda reacción nuclear se han de cumplir las leyes de conservación clásicas de la Física (energía, etc.), aparte de otras muchas específicas (número bariónico, número leptónico, etc.), cuyo análisis en este libro rebasa nuestros propósitos.

En lo que respecta al nivel exigible a nuestros fines, cabe reseñar que en toda reacción nuclear se han de cumplir el principio de conservación del número atómico y del índice de masa.

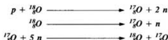
25.11. ***El $^{287}_{94}Pu$ se desintegra emitiendo una partícula alfa. ¿Qué número atómico y qué número másico tiene el elemento resultante?***

Solución: De acuerdo con la ley de Soddy, el número atómico del $^{287}_{94}Pu$ disminuirá en dos unidades, y su número másico en cuatro unidades. Por tanto, los números atómico y másico del elemento resultante serán:

$$\boxed{\mathbf{Z = 94 - 2 = 92}}$$

$$\boxed{\mathbf{A = 287 - 4 = 283}}$$

25.12. *(*) Razonar qué reacción nuclear de las siguientes es posible:*



$$p + {}^{18}_{8}O \longrightarrow {}^{17}_{8}O + 2\,n$$
$${}^{18}_{8}O \longrightarrow {}^{17}_{8}O + n$$
$${}^{17}_{8}O + 5\,n \longrightarrow {}^{18}_{8}O + {}^{17}_{8}O$$

y calcular en ella la energía de la reacción, expresada en J, dando una interpretación del resultado.

Datos: Masas expresadas en unidades de masa atómica:

n	*1,008787*
p	*1,007596*
${}^{18}_{8}O$	*18,004883*
${}^{17}_{8}O$	*17,004533*

Equivalencia masa-energía:

$$1 \text{ unidad de masa atómica} = 1{,}491 \cdot 10^{-10}\ J$$

Solución: Sólo es posible la segunda reacción, ya que en las demás no se cumple la constancia del número atómico y del índice de masa.

En esta segunda reacción:

$$E = (18{,}004883\ u - 17{,}004533\ u - 1{,}008787\ u) \cdot \frac{1{,}491 \cdot 10^{-10}\ J}{1\ u} =$$

$$= \boxed{-1{,}258 \cdot 10^{-12}\ J}$$

La reacción es endoenergética (E < 0), ya que hay aumento de masa.

25.13. ***Suponiendo que la energía liberada en la fisión del U-235 es de 180 MeV/át, calcular la masa de U-235 consumida por día por un motor atómico de 2 000 kW de potencia, cuyo rendimiento es del 30 %.***

Solución:

$$2\,000\ \text{kW-día} \equiv 2\,000\ \text{kW-día} \cdot \frac{10^3\ W}{1\ kW} \cdot \frac{86\,400\ s}{1\ \text{día}} \cdot \frac{1\ J\ \text{producido}}{1\ W \cdot s} \cdot$$

$$\cdot \frac{100\ J\ \text{consumidos}}{30\ J\ \text{producidos}} \cdot \frac{1\ eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J} \cdot \frac{1\ MeV}{10^6\ eV} \cdot \frac{1\ \text{át U-235}}{180\ MeV} \cdot$$

$$\cdot \frac{1\ \text{mol U-235}}{6 \cdot 10^{23}\ \text{át U-235}} \cdot \frac{235\ g\ \text{U-235}}{1\ \text{mol U-235}} = \boxed{7{,}83\ g\ \text{U-235}}$$

25.14. ***(*) En una reacción nuclear hay una pérdida de masa de $3 \cdot 10^{-6}$ g. ¿Cuántos kW-h se liberan en el proceso?***

Si se producen 10^6 reacciones idénticas por minuto, ¿cuál será la potencia disponible?

Solución: De acuerdo con la ecuación de Einstein: $E = \Delta m \cdot c^2$, tenemos:

$$E = 3 \cdot 10^{-6}\ g \cdot \frac{1\ kg}{10^3\ g} \cdot (3 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1})^2 = 2{,}7 \cdot 10^8\ J =$$

$$= 2{,}7 \cdot 10^8\ J \cdot \frac{1\ kW\text{-}h}{3{,}6 \cdot 10^6\ J} = \boxed{\mathbf{75\ kW\text{-}h}}$$

La potencia disponible será:

$$P = 10^6\ \frac{\text{reacciones}}{\text{minuto}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} \cdot \frac{2{,}7 \cdot 10^8\ J}{\text{reacción}} = \boxed{\mathbf{4{,}5 \cdot 10^{12}\ W}}$$

25.15. ***Además de las tres series radiactivas naturales, existe una artificial, la denominada del neptunio, cuyos miembros tienen todos de índice de masa 4n + 1. Dicha serie comienza en el $^{237}_{93}Np$ y, tras cuatro emisiones beta y varias alfa, termina en un isótopo estable no radiactivo. Identificar dicho isótopo, sabiendo que una muestra de 5 milimoles de Np-237 da lugar, por desintegración total, a 430,5 cm³ de helio, medidos a 27 °C de temperatura y 2 atmósferas de presión.***

Solución: Se han recogido un total de:

$$n = \frac{P \cdot V}{R \cdot T} = \frac{2\ \text{atm} \cdot 0{,}4305\ l}{0{,}082 \dfrac{\text{atm} \cdot l}{K \cdot \text{mol}} \cdot 300\ K} = 35 \cdot 10^{-3}\ \text{moles de He}$$

procedentes de la desintegración sucesiva de $5 \cdot 10^{-3}$ moles de Np-237. Ello implica la emisión de 7 partículas α por cada átomo de Np-237 en el proceso de su desintegración. La correspondiente disminución de número atómico es de 14 unidades y 28 unidades en el número másico. Por otra parte, la emisión de 4 partículas β significa un aumento de 4 unidades en el número atómico. En suma, el isótopo estable final de la serie es el:



$$\boxed{^{209}_{83}Bi}$$

25.16. ***Calcular la vida media de un átomo de uranio si su período de semidesintegración es de 4 500 millones de años.***

Solución: La vida media será:

$$\theta = \frac{T}{0{,}693} = \frac{4{,}5 \cdot 10^9\ \text{años}}{0{,}693} = \boxed{\mathbf{6{,}5 \cdot 10^9\ años}}$$

25.17. ***Una cierta cantidad de sustancia radiactiva se reduce a la cuarta parte al cabo de 10 días. Deducir el período de semidesintegración:***

a) Aplicando la ley de Elster y Geitel.
b) A partir de la definición de período de semidesintegración.

Solución:

a) Aplicando la ley de Elster y Geitel:

$$N = N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_o \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t}$$

tenemos:

$$\frac{1}{4} = e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot 10 \text{ días}}$$

Tomando logaritmos neperianos en los dos miembros de la expresión anterior, resulta:

$$-\ln 4 = -\frac{\ln 2}{T} \cdot 10 \text{ días}$$

de donde:

$$T = \frac{10 \text{ días} \cdot \ln 2}{\ln 4} = \frac{10 \text{ días} \cdot \ln 2}{2 \ln 2} = \frac{10 \text{ días}}{2} = \boxed{\textbf{5 días}}$$

b) Para que una cierta cantidad de sustancia radiactiva se reduzca a la cuarta parte es necesario que transcurra un tiempo equivalente a dos períodos de semidesintegración. Como este tiempo es de 10 días, el período de semidesintegración será de **5 días.**

25.18. ***Se dispone de una muestra de 2 000 núcleos de un mismo elemento radiactivo cuyo período de semidesintegración es T. ¿Cuántos núcleos permanecerán sin desintegrarse al cabo de un tiempo T/4?***

Solución: Aplicando la ley de la desintegración radiactiva de Elster y Geitel, tenemos:

$$N = N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_o \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t} = N_o \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot \frac{T}{4}} = N_o \cdot e^{-\frac{\ln 2}{4}}$$

Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros:

$$\ln N = \ln N_o - \frac{\ln 2}{4} = \ln N_o - \ln \sqrt[4]{2} = \ln \frac{N_o}{\sqrt[4]{2}}$$

Por tanto:

$$N = \frac{N_o}{\sqrt[4]{2}} = \frac{2\,000 \text{ núcleos}}{\sqrt[4]{2}} = \boxed{\textbf{1 682 núcleos}}$$

25.19. ***La vida media del $^{234}_{90}Th$ es de 24 días. ¿Qué cantidad de torio permanecerá sin desintegrarse al cabo de 96 días?***

Solución: Apliquemos la ley de la desintegración radiactiva, teniendo en cuenta, además, que la vida media, θ, es igual a la inversa de la constante radiactiva. Se cumple que:

$$\frac{N}{N_o} = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-\frac{t}{\theta}} = e^{-\frac{96 \text{ días}}{24 \text{ días}}} = e^{-4} = 0{,}0183 = \boxed{\mathbf{1{,}83\ \%}}$$

25.20. ***El período de semidesintegración del tritio es 12,5 años. ¿Qué tanto por ciento de tritio permanecerá sin desintegrar al cabo de 50 años?***

Solución: Como:

$$N = N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_o \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t}$$

resulta:

$$\frac{N}{N_o} = e^{-\frac{\ln 2}{12{,}5 \text{ años}} \cdot 50 \text{ años}} = e^{-4 \cdot \ln 2} = \frac{1}{2^4} = 0{,}0625 = \boxed{\mathbf{6{,}25\ \%}}$$

25.21. ***Una preparación radiactiva tiene una constante $\lambda = 1{,}44 \cdot 10^{-3}\ h^{-1}$. ¿Cuánto tiempo tardará en desintegrarse un 75 % de la masa original?***

Solución: Apliquemos la ley de la desintegración radiactiva, teniendo en cuenta que cuando se haya desintegrado un 75 % de la masa original permanecerá un 25 % sin desintegrar. Se cumplirá que:

$$0{,}25 = e^{-1{,}44 \cdot 10^{-3}\ h^{-1} \cdot t}$$

Tomando logaritmos neperianos en los dos miembros de la anterior igualdad, tenemos:

$$\ln 0{,}25 = -1{,}44 \cdot 10^{-3}\ h^{-1} \cdot t$$

de donde:

$$t = -\frac{\ln 0{,}25}{1{,}44 \cdot 10^{-3}\ h^{-1}} = \frac{1{,}3863}{1{,}44 \cdot 10^{-3}\ h^{-1}} = 962{,}7\ h = \boxed{\mathbf{40{,}1\ días}}$$

25.22. ***En el año 1898 Marie y Pierre Curie aislaron 200 mg de radio. El período de semidesintegración del radio es 1 620 años. ¿A qué cantidad de radio han quedado reducidos en la actualidad (año 1989) los 200 mg aislados entonces?***

Solución: Aplicando la ley de Elster y Geitel en la forma: $m = m_o \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, tenemos:

$$m = m_o \cdot e^{-\lambda \cdot t} = m_o \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t} = 200\ mg \cdot e^{-\frac{\ln 2}{1\,620 \text{ años}} \cdot 91 \text{ años}} =$$

$$= 200\ mg \cdot 0{,}962 = \boxed{\mathbf{192{,}4\ mg}}$$

25.23. ***El período de semidesintegración del $^{90}_{38}Sr$ es de 28 años. Calcular:***

a) Su constante radiactiva, expresándola en s^{-1}.
b) La actividad, en curies, de una muestra de 1 mg de $^{90}_{38}Sr$.
c) El tiempo necesario para que la anterior muestra se reduzca a 0,25 mg.
d) La actividad, en curies, de los 0,25 mg de la muestra.

Solución:

a)

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0{,}693}{T} =$$

$$= \frac{0{,}693}{28 \text{ años} \cdot \dfrac{365 \text{ días}}{1 \text{ año}} \cdot \dfrac{86\,400 \text{ s}}{1 \text{ día}}} = \boxed{7{,}85 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}}$$

b)

$$(A) = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda \cdot N =$$

$$= 7{,}85 \quad 10^{-10} \text{ s}^{-1} \cdot 1 \text{ mg Sr-90} \cdot \frac{1 \text{ g Sr-90}}{1\,000 \text{ mg Sr-90}} \cdot \frac{1 \text{ mol Sr-90}}{90 \text{ g Sr-90}} \cdot$$

$$\cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ át Sr-90 desintegr.}}{1 \text{ mol Sr-90}} \cdot \frac{1 \text{ Ci}}{3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ desintegr/s}} = \boxed{0{,}142 \text{ Ci}}$$

c) Se puede ver claramente que 0,25 mg es la cuarta parte de 1 mg. Para que una muestra radiactiva se reduzca a la mitad ha de transcurrir un tiempo igual al período de semidesintegración; es lógico, por consiguiente, que para quedar reducida a la cuarta parte, el tiempo necesario será el doble del período de semidesintegración:

$$\boxed{t = 2\,T = 56 \text{ años}}$$

d) Como la actividad es proporcional al número de átomos presentes, la actividad de la muestra de 0,25 mg será la cuarta parte de la de 1 mg:

$$\boxed{(A') = 0{,}035 \text{ Ci}}$$

25.24. ***Determinar el valor de la constante radiactiva del radón, sabiendo que la cantidad de átomos de este elemento disminuye en un 16,6 % en un día.***

Solución: Podemos expresar la ley de Elster y Geitel de la forma siguiente:

$$\frac{\Delta N}{N_o} = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$0{,}166 = 1 - e^{-\lambda \cdot 86\ 400\ s}$$

o, lo que es lo mismo:

$$0{,}834 = e^{-\lambda \cdot 86\ 400\ s}$$

Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros de la anterior igualdad, resulta:

$$\lambda = -\frac{\ln 0{,}834}{86\ 400\ s} = \boxed{2{,}1 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}}$$

25.25. ***El $^{210}_{84}Po$, cuyo período de semidesintegración es de 140 días, se transforma, por emisión de partículas alfa, en el $^{206}_{82}Pb$ estable.***

¿Qué cantidad de Po-210 es necesario tener inicialmente para que al cabo de 560 días se puedan recoger 2,46 litros de helio, medidos a 27 °C y 2 atm de presión?

Solución: Determinemos, en primer lugar, el número de moles de helio recogidos. Apliquemos, para ello, la ecuación de Clapeyron:

$$n = \frac{P \cdot V}{R \cdot T} = \frac{2\ atm \cdot 2{,}46\ l}{0{,}082\ \frac{atm \cdot l}{K \cdot mol} \cdot 300\ K} = 0{,}2\ moles$$

Este resultado indica que se han desintegrado 0,2 moles de Po-210. De acuerdo con la ley de la desintegración radiactiva, que podemos escribir de la forma:

$$\frac{\Delta N}{N_o} = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$$

como $\Delta N = 0{,}2$ moles, resulta:

$$\frac{0{,}2}{N_o} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{140\ días} \cdot 560\ días} = 1 - e^{-4 \cdot \ln 2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}$$

De aquí se obtiene:

$$N_o = \frac{16}{75}\ moles\ de\ Po\text{-}210$$

y, por consiguiente:

$$m_o = \frac{16}{75}\ moles\ Po\text{-}210 \cdot \frac{210\ g\ Po\text{-}210}{1\ mol\ Po\text{-}210} = \boxed{44{,}8\ g\ Po\text{-}210}$$

25.26. *a) ¿Qué tanto por ciento de radón se desintegra en un día?*
b) Si disponemos inicialmente de 1 mg de radón, ¿cuántos átomos se desintegran durante el noveno día? (Para el $^{222}_{86}Rn$, $\lambda = 2,1 \cdot 10^{-6}$ s^{-1}.)

Solución:

a) La fracción de radón desintegrada será:

$$\frac{\Delta N}{N_o} = 1 - e^{-\lambda \cdot t} = 1 - e^{-2,1 \cdot 10^{-6}\ s^{-1} \cdot 86\ 400\ s} =$$

$$= 1 - 0,834 = 0,166 = \boxed{16,6\ \%}$$

b) El número de átomos que se desintegran durante el noveno día es igual a la diferencia entre los que existen al final del octavo día y los que permanecen sin desintegrar al final del noveno:

$$N = 10^{-3}\ g\ Rn\text{-}222 \cdot \frac{1\ mol\ Rn\text{-}222}{222\ g\ Rn\text{-}222} \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23}\ át\ Rn\text{-}222}{1\ mol\ Rn\text{-}222} \cdot$$

$$\cdot [e^{-2,1 \cdot 10^{-6}\ s^{-1} \cdot 8 \cdot 86\ 400\ s} - e^{-2,1 \cdot 10^{-6}\ s^{-1} \cdot 9 \cdot 86\ 400\ s}] =$$

$$= \boxed{1,05 \cdot 10^{17}\ \text{átomos Rn-222}}$$

25.27. *Determinar la edad de un mineral de uranio, sabiendo que en él por cada kilogramo de $^{238}_{92}U$ existen 320 gramos de $^{206}_{82}Pb$. (Se ha de tener en cuenta que todo el Pb-206 proviene de la desintegración del U-238, cuyo período de semidesintegración es $T = 4,5 \cdot 10^9$ años.)*

Solución: Tomemos como referencia la cantidad de mineral que contiene 1 kg de U-238. El número de átomos de dicho isótopo que existen en la actualidad es:

$$N = 1\ 000\ g\ U\text{-}238 \cdot \frac{1\ mol\ U\text{-}238}{238\ g\ U\text{-}238} \cdot \frac{N_o\ \text{átomos U-238}}{1\ mol\ U\text{-}238} =$$

$$= 4,2017 \cdot N_o\ \text{átomos U-238}$$

siendo N_o el número de Avogadro.

El número de átomos iniciales de U-238, en el momento de la formación del mineral, será el existente en la actualidad sumado con el de átomos de Pb-206 provenientes de la desintegración del U-238:

$$N_o = 1\ 000\ g\ U\text{-}238 \cdot \frac{1\ mol\ U\text{-}238}{238\ g\ U\text{-}238} \cdot \frac{N_o\ \text{átomos U-238}}{1\ mol\ U\text{-}238} +$$

$$+ 320\ g\ Pb\text{-}206 \cdot \frac{1\ mol\ Pb\text{-}206}{206\ g\ Pb\text{-}206} \cdot \frac{N_o\ \text{átomos Pb-206}}{1\ mol\ Pb\text{-}206} \cdot \frac{1\ \text{átomo U-238}}{1\ \text{átomo Pb-206}} =$$

$$= 5,7551 \cdot N_o\ \text{át U-238}$$

Aplicando la ley de Elster y Geitel:

$$N = N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_o \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t}$$

tenemos:

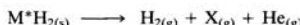
$$4{,}2017 \cdot N_o = 5{,}7551 \cdot N_o \cdot e^{-\frac{\ln 2}{4{,}5 \cdot 10^9 \text{ años}} \cdot t}$$

de donde:

$$t = \frac{4{,}5 \cdot 10^9 \text{ años} \cdot \ln\left(\dfrac{4{,}2017}{5{,}7551}\right)}{-\ln 2} = \boxed{2{,}04 \cdot 10^9 \text{ años}}$$

25.28. ***M es un metal alcalinotérreo, uno de cuyos isótopos, M*, es emisor α, con un período de semidesintegración de 25 días, transformándose en el elemento X, no radiactivo. En un recipiente de 2 litros de capacidad, mantenido a la temperatura constante de 27 °C, previamente vaciado y provisto de un manómetro, se han introducido 0,1 moles del hidruro sólido, M*H₂. Calcular la indicación del manómetro al cabo de 100 días.***

Solución: El metal alcalinotérreo M*, al desintegrarse por emisión α, da origen a X, gas noble monoatómico, teniendo lugar la reacción:



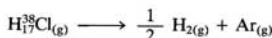
$$M^*H_{2(s)} \longrightarrow H_{2(g)} + X_{(g)} + He_{(g)}$$

y formándose, en consecuencia, tres moles gaseosos por cada mol de M^*H_2 desintegrado. En 100 días, que es un tiempo igual a 4 veces el período de semidesintegración de M*, se habrán desintegrado los $\frac{15}{16}$ de la cantidad inicial. Se formarán, por tanto, $\frac{15}{16} \cdot 0{,}1 \cdot 3 \text{ moles} = \frac{4{,}5}{16}$ moles gaseosos. Aplicando la ecuación de Clapeyron, tenemos:

$$P = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{\frac{4{,}5}{16} \text{ moles} \cdot 0{,}082 \dfrac{\text{atm} \cdot \text{l}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 300 \text{ K}}{2 \text{ l}} = \boxed{3{,}46 \text{ atm}}$$

25.29. ***Uno de los isótopos del cloro, el $^{38}_{17}Cl$, es emisor β, con un período de semidesintegración de aproximadamente 40 minutos. En un recipiente de vidrio, herméticamente cerrado, vaciado previamente y mantenido a la temperatura constante de 77 °C, se introducen 0,8 moles de $H^{38}_{17}Cl_{(g)}$, observándose que, al cabo de 120 minutos, la presión en el interior del recipiente es de 1 330 mm de Hg. Calcular, en base a estos datos, el volumen del recipiente en el que se ha verificado la experiencia.***

Solución: De acuerdo con la ley de Fajans, el $^{38}_{17}Cl$, al experimentar una emisión β, se transforma en el $^{38}_{18}Ar$, teniendo lugar dentro del recipiente la reacción:



$$H^{38}_{17}Cl_{(g)} \longrightarrow \frac{1}{2} H_{2(g)} + Ar_{(g)}$$

Al cabo de 120 minutos, que es un tiempo igual a 3 veces el período de semidesintegración del $^{38}_{17}Cl$, se habrán desintegrado los 7/8 de la cantidad inicial. Se formarán, por tanto, $\frac{7}{8} \cdot 0{,}8$ moles $= 0{,}7$ moles de argón y $\frac{0{,}7}{2}$ moles $= 0{,}35$ moles de hidrógeno, quedando sin descomponer $\frac{1}{8} \cdot$ $\cdot\, 0{,}8$ moles $= 0{,}1$ moles de HCl. En consecuencia, en ese momento habrá en el recipiente un total de $(0{,}7 + 0{,}35 + 0{,}1)$ moles $= 1{,}15$ moles gaseosos. Aplicando la ecuación de Clapeyron, tenemos:

$$V = \frac{1{,}15 \text{ moles} \cdot 0{,}082 \, \frac{\text{atm} \cdot \text{l}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 350 \text{ K}}{1\,330 \text{ mm Hg} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ mm Hg}}} = \boxed{18{,}86 \text{ l}}$$

25.30. ***El $^{253}_{99}Es$ y el $^{230}_{92}U$ son ambos emisores α, con períodos de semidesintegración, los dos, de aproximadamente 20 días. Los productos de sus desintegraciones respectivas, $^{249}_{97}Bk$ y $^{226}_{90}Th$, son emisores β, de vidas muy largas. En un recipiente cerrado, de 1,12 litros de capacidad, provisto de un manómetro y previamente vaciado, colocamos a 0 °C 2 gramos de U-230 y otros 2 gramos de Es-253. ¿Cuál será la indicación del manómetro al cabo de 10 días?***

Solución: Inicialmente colocamos en el recipiente:

$$N_o = \left(\frac{2}{253} + \frac{2}{230} \right) \text{ moles} = 16{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ moles}$$

los cuales se desintegran de acuerdo con la ley de Elster y Geitel:

$$N = N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

siendo $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ la misma para ambos isótopos.

La ecuación anterior la podemos escribir de la forma:

$$\Delta N = N_o \cdot [1 - e^{-\lambda \cdot t}] = N_o \cdot \left[1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t} \right]$$

donde ΔN es el número de moles de ambos isótopos que se desintegran en el tiempo t, e igual al número de moles de helio gaseoso que producen en su desintegración.

En nuestro caso:

$$\Delta N = 16{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ moles} \cdot \left[1 - e^{-\frac{\ln 2}{20 \text{ días}} \cdot 10 \text{ días}} \right] =$$

$$= 16{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ moles} \cdot \left[1 - e^{-\frac{\ln 2}{2}} \right] = 16{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ moles} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] =$$

$$= 4{,}86 \cdot 10^{-3} \text{ moles He}$$

Aplicando la ecuación de Clapeyron, tenemos:

$$P = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{4{,}86 \cdot 10^{-3} \text{ moles} \cdot 0{,}082 \ \frac{\text{atm} \cdot \text{l}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot 273 \text{ K}}{1{,}12 \text{ l}} =$$

$$= 9{,}71 \cdot 10^{-2} \text{ atm} = \boxed{\mathbf{73{,}8 \text{ mm Hg}}}$$

25.31. ***a)*** ***Sabiendo que el período de semidesintegración del*** $^{210}_{84}Po$ ***es de 138 días, se pide determinar cuántos átomos de un mol de polonio se desintegran cada día.***

b) ***Ídem de un mol de radón. (El período de semidesintegración del*** $^{222}_{86}Rn$ ***es 3,82 días.)***

Solución:

a) En este primer caso se puede aplicar la fórmula:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \qquad [1]$$

ya que el intervalo de tiempo (t = 1 día) es mucho menor que el período de semidesintegración, y se puede considerar que en todo ese tiempo el número de átomos inicial permanece invariable. Teniendo en cuenta la fórmula [1], se obtiene:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N = -\frac{\ln 2}{T} \cdot N_o =$$

$$= -\frac{\ln 2}{138 \text{ días}} \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{át} = -3 \cdot 10^{21} \ \frac{\text{átomos}}{\text{día}}$$

$$\boxed{\left| \frac{dN}{dt} \right| = 3 \cdot 10^{21} \text{ átomos/día}}$$

b) En este caso no se puede emplear la fórmula [1], ya que el período de semidesintegración del radón es mucho menor que el del polonio. Para la resolución del problema debemos tener en cuenta que el número de átomos desintegrados es igual a los que había al comienzo menos los existentes al final. De este modo:

$$N = N_o - N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_o \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t}) = N_o \cdot \left[1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t}\right] =$$

$$= 6 \cdot 10^{23} \text{ át} \cdot \left[1 - e^{-\frac{\ln 2}{3{,}82 \text{ días}} \cdot 1 \text{ día}}\right] = N_o \cdot (1 - 0{,}834) =$$

$$= 6 \cdot 10^{23} \text{ át} \cdot 0{,}166 = 10^{23} \text{ át}$$

$$\boxed{\frac{\Delta N}{\Delta t} = 10^{23} \text{ átomos/día}}$$

Compruébese cómo, aplicando la fórmula [1], obtendríamos $1{,}09 \cdot 10^{23}$ át/día, cometiéndose un error relativo del 9 %.

25.32. ***Una serie radiactiva consta de tres miembros, a los que vamos a designar A, B y C. Los dos primeros son radiactivos, con constantes radiactivas λ_A y λ_B, mientras que el último es estable. Supongamos que inicialmente sólo existe A (un número de núcleos N_{A_o}).***

a) Determinar el número de núcleos presentes de B (N_B) al cabo de un tiempo t.
b) ¿A qué queda reducida la expresión anterior en el caso de que el período de semidesintegración de A sea mucho mayor que el de B?
c) ¿Al cabo de cuánto tiempo es máximo el número de núcleos de B existentes?
d) Representar gráficamente el número de núcleos de A, B y C en función del tiempo.

Solución:

a) La desintegración de A viene regida por las leyes:

$$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A \cdot N_A \qquad [1]$$

$$N_A = N_{A_o} \cdot e^{-\lambda_A \cdot t} \qquad [2]$$

Ya que al desintegrarse un núcleo de A se origina un núcleo de B, la velocidad de formación de B es la misma que la de desintegración de A ($\lambda_A \cdot N_A$). Pero como, a su vez, los núcleos de B se desintegran con la velocidad $-\lambda_B \cdot N_B$, se llega a la conclusión de que la variación con el tiempo del número de núcleos de B viene dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_A \cdot N_A - \lambda_B \cdot N_B \qquad [3]$$

Sustituyendo en [3] el valor de N_A dado por [2], resulta:

$$\frac{dN_B}{dt} = \lambda_A \cdot N_{A_o} \cdot e^{-\lambda_A \cdot t} - \lambda_B \cdot N_B \qquad [4]$$

Con objeto de proceder a la obtención de N_B, por integración, multipliquemos los dos miembros de la ecuación [4] por $e^{\lambda_B \cdot t}$. Obtenemos así:

$$e^{\lambda_B \cdot t}\, dN_B = \lambda_A \cdot N_{A_o} \cdot e^{(\lambda_B - \lambda_A) \cdot t}\, dt - \lambda_B \cdot N_B \cdot e^{\lambda_B \cdot t}\, dt$$

de donde:

$$\frac{d}{dt}\left[N_B \cdot e^{\lambda_B \cdot t}\right] = \lambda_A \cdot N_{A_o} \cdot e^{(\lambda_B - \lambda_A) \cdot t} \qquad [5]$$

Integrando la expresión [5], tenemos:

$$N_B \cdot e^{\lambda_B \cdot t} = \int \lambda_A \cdot N_{A_0} \cdot e^{(\lambda_B - \lambda_A) \cdot t}\, dt = \frac{\lambda_A \cdot N_{A_0}}{\lambda_B - \lambda_A} \cdot e^{(\lambda_A - \lambda_B) \cdot t} + C \quad [6]$$

El cálculo de la constante de integración C se realiza de inmediato, teniendo en cuenta que cuando $t = 0$, $N_B = 0$. Resulta así:

$$C = -\frac{\lambda_A \cdot N_{A_0}}{\lambda_B - \lambda_A}$$

Sustituyendo en [6] y despejando N_B, obtenemos finalmente:

$$\boxed{N_B = \frac{\lambda_A \cdot N_{A_0}}{\lambda_B - \lambda_A}\,[e^{-\lambda_A \cdot t} - e^{-\lambda_B \cdot t}]} \quad [7]$$

b) Si $T_A \gg T_B$, $\lambda_A \ll \lambda_B$, con lo que λ_A puede despreciarse frente a λ_B en la expresión [7]; asimismo, la función exponencial $e^{-\lambda_A \cdot t}$ se hace prácticamente igual a la unidad. Resulta, de este modo:

$$\boxed{N_B = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} \cdot N_{A_0} \cdot [1 - e^{-\lambda_B \cdot t}]} \quad [8]$$

c) Para que N_B sea máximo tendremos que derivar con respecto al tiempo la expresión [7] e igualar a cero el resultado obtenido:

$$\frac{dN_B}{dt} = \frac{\lambda_A \cdot N_{A_0}}{\lambda_B - \lambda_A} \cdot [-\lambda_A \cdot e^{-\lambda_A \cdot t} + \lambda_B \cdot e^{-\lambda_B \cdot t}] = 0$$

De aquí se deduce:

$$\lambda_B \cdot e^{-\lambda_B \cdot t} = \lambda_A \cdot e^{-\lambda_A \cdot t}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_A} = e^{(\lambda_B - \lambda_A) \cdot t} \quad [9]$$

Tomando logaritmos neperianos en los dos miembros de [9], se obtiene:

$$\ln \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = (\lambda_B - \lambda_A) \cdot t$$

de donde:

$$\boxed{t = \frac{\ln (\lambda_B/\lambda_A)}{\lambda_B - \lambda_A}}$$

d)

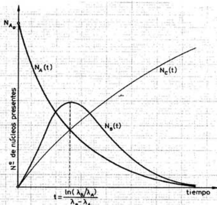


Fig. 25.1

En la figura 25.1 se representa en función del tiempo el número de núcleos de A, B y C presentes. Las curvas no están trazadas a escala, representando tan sólo de una forma cualitativa las variaciones que tienen lugar. Pero siempre se cumple que:

$$N_A + N_B + N_C = N_{A_0} = \text{cte}$$

25.33. ***La energía puesta en juego en las explosiones nucleares se suele medir en megatones. Un megatón equivale a la energía liberada por un millón de toneladas de TNT (2,4,6-trinitrotolueno), que es aproximadamente $5 \cdot 10^{18}$ J. Una central eléctrica, cuya potencia es de 10 MW, ¿cuánto tiempo puede estar funcionando con la energía de una bomba de 10 megatones?***

Solución: La energía equivalente a una bomba de 10 megatones es:

$$W = 10 \text{ megatones} \cdot \frac{5 \cdot 10^{18} \text{ J}}{1 \text{ megatón}} = 5 \cdot 10^{19} \text{ J}$$

y la potencia de la central eléctrica:

$$P = 10 \text{ MW} \cdot \frac{10^6 \text{ W}}{1 \text{ MW}} = 10^7 \text{ W}$$

Por tanto:

$$t = \frac{W}{P} = \frac{5 \cdot 10^{19} \text{ J}}{10^7 \text{ W}} = \boxed{\mathbf{5 \cdot 10^{12}\ s = 1{,}58 \cdot 10^5\ años}}$$

25.34. ***El período de semidesintegración del C-14 es 5 570 años. El análisis de una muestra de una momia egipcia revela que presenta las tres cuartas partes de la radiactividad de un ser vivo. ¿Cuál es la edad de la momia?***

Solución: Apliquemos la ley de la desintegración radiactiva a la momia y al ser vivo:

$$\text{Momia:} \quad \frac{3}{4}\,(A) = \lambda \cdot N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t} \qquad [1]$$

$$\text{Ser vivo:} \quad (A) = \lambda \cdot N_o \qquad [2]$$

Dividiendo ambas expresiones, tenemos:

$$\frac{3}{4} = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t}$$

Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros, se obtiene:

$$-\frac{t}{T} \cdot \ln 2 = \ln \frac{3}{4}$$

de donde:

$$t = -\frac{T \cdot \ln \left(\frac{3}{4}\right)}{\ln 2} = -\frac{5\,570 \text{ años} \cdot (-0{,}2877)}{0{,}693} \simeq \boxed{2\,310 \text{ años}}$$

25.35. ***La relación C-14/C-12 en la atmósfera se admite que es del orden de 1,5 · 10^-12. El análisis de la madera de un barco funerario en la tumba del faraón Sesostris (dinastía XII) pone de manifiesto una relación de 9,5 · 10^-13. ¿Qué edad puede atribuirse a dicha tumba? El valor del período de semidesintegración del C-14 se dio en el ejercicio anterior.***

Solución: Apliquemos al C-14 la ley de la desintegración radiactiva de Elster y Geitel:

$$N = N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_o \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t}$$

teniendo en cuenta que:

$$\frac{N}{N_o} = \frac{9{,}5 \cdot 10^{-13}}{1{,}5 \cdot 10^{-12}} = 0{,}633$$

Sustituyendo, resulta:

$$0{,}633 = e^{-\frac{\ln 2}{5\,570 \text{ años}} \cdot t}$$

de donde:

$$t = -\frac{5\,570 \text{ años} \cdot \ln 0{,}633}{\ln 2} = \boxed{3.675 \text{ años}}$$

PRINCIPALES CONSTANTES FÍSICAS Y QUÍMICAS

Velocidad de la luz en el vacío ..	c	$= 2{,}9979 \cdot 10^8$ m/s ($\simeq 3 \cdot 10^8$ m/s)
Aceleración de la gravedad	g	$= 9{,}80655$ m/s^2 ($\simeq 9{,}81$ m/s^2)
Constante de la gravitación universal	G	$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2/kg^2
Densidad máxima del agua (a 4° C)		0,999972 g/cm^3 ($\simeq 1$ g/cm^3)
Densidad del mercurio (condiciones normales)		13,595 g/cm^3
Atmósfera tipo		$1{,}01325 \cdot 10^5$ Pa
Volumen de un gas ideal en condiciones normales	V_{mn}	$= 22{,}41383$ dm^3/mol ($\simeq 22{,}4$ dm^3/mol)
Número de Avogadro	N_o	$= 6{,}022045 \cdot 10^{23}$ partículas/mol ($\simeq 6{,}02 \cdot 10^{23}$ partículas/mol)
Constante universal de los gases .	R	$= 0{,}0821 \ \dfrac{\text{atm} \cdot \text{l}}{\text{K} \cdot \text{mol}} = 8{,}3144 \ \dfrac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$
Punto de congelación del agua ..		273,16 K ($\simeq 273$ K)
Equivalente mecánico del calor .	J	$= 4{,}1855$ J/cal ($\simeq 4{,}18$ J/cal)
Equivalente térmico del trabajo .	A	$= 0{,}2389$ cal/J ($\simeq 0{,}24$ cal/J)
Constante de Planck	h	$= 6{,}6265 \cdot 10^{-34}$ J · s ($\simeq 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s)
Faraday	F	$= 9{,}6520 \cdot 10^4$ C ($\simeq 96\,500$ C)
Carga del electrón	e	$= 1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ C ($\simeq 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C)
Electronvoltio	eV	$= 1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ J ($\simeq 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J)
Relación de la carga a la masa del electrón	e/m_e	$= 1{,}7589 \cdot 10^{11}$ C/kg
Unidad de masa atómica (1/12 de la masa del ^{12}C)	u	$= 1{,}6605 \cdot 10^{-27}$ kg
Masa del electrón en reposo		$9{,}1095 \cdot 10^{-31}$ kg $= 5{,}486 \cdot 10^{-4}$ u
Masa del protón en reposo		$1{,}67265 \cdot 10^{-27}$ kg $= 1{,}0073$ u
Masa del neutrón en reposo		$1{,}67495 \cdot 10^{-27}$ kg $= 1{,}0087$ u
Masa de la partícula alfa (α) en reposo		$6{,}6434 \cdot 10^{-27}$ kg $= 4{,}0007$ u
Masa atómica del oxígeno natural en la escala física		16,00446 u
$\dfrac{\text{Masa atómica en la escala física}}{\text{Masa atómica en la escala química}} =$ = factor de Mecke-Childs		$\dfrac{16{,}00446}{16} = 1{,}00028$
Energía de una unidad de masa atómica en reposo		931,16 MeV ($\simeq 931{,}2$ MeV)

SISTEMAS DE UNIDADES EN MECÁNICA

MAGNITUD	Sistema internacional	Sistema cegesimal	Sistema técnico o terrestre	Otras unidades	Ecuación dimensional
Longitud	metro (m) = 10^2 cm	centímetro (cm)	metro (m) = 10^2 cm	—	L
Masa	kilogramo (kg) = 10^3 g	gramo (g)	unidad técnica de masa (utm) = 9,8 kg	—	M
Tiempo	segundo (s)	segundo (s)	segundo (s)	minuto, hora, día, etc.	T
Densidad	kg/m^3 = = 10^{-3} g/cm^3	g/cm^3	utm/m^3 = = 9,8 kg/m^3	—	ML^{-3}
Velocidad	m/s = 10^2 cm/s	cm/s	m/s = 10^2 cm/s	km/h	LT^{-1}
Aceleración	m/s^2 = 10^2 cm/s^2	cm/s^2	m/s^2 = 10^2 cm/s^2	—	LT^{-2}
Velocidad angular	radián por segundo (rad/s)	rad/s	rad/s	rev/min	T^{-1}
Aceleración angular	rad/s^2	rad/s^2	rad/s^2	—	T^{-2}
Fuerza	newton N = 10^5 dyn	dina (dyn)	kilopondio kp = 9,8 N	—	MLT^{-2}
Momento de una fuerza	N · m = = 10^7 dyn · cm	dyn · cm	kp · m = = 9,8 N · m	—	ML^2T^{-2}
Impulso mecánico	N · s = = 10^5 dyn · s	dyn · s	kp · s = = 9,8 N · s	—	MLT^{-1}
Momento lineal	kg · m/s = = 10^5 g · cm/s	g · cm/s	utm · m/s = = 9,8 kg · m/s	—	MLT^{-1}
Trabajo	julio J = 10^7 erg	ergio (erg)	kilopondímetro kpm = 9,8 J	kW-h	ML^2T^{-2}
Potencia	vatio W = 10^7 erg/s	erg/s	kpm/s = 9,8 W	kW = 10^3 W CV = 735 W	ML^2T^{-3}
Presión	pascal (Pa) = = 10 barias	baria	kp/m^2 = 9,8 Pa	bar milibar kp/cm^2 atmósfera	$ML^{-1}T^{-2}$

PRINCIPALES MAGNITUDES Y UNIDADES ELÉCTRICAS

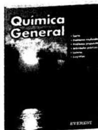
	MAGNITUD	Carga eléctrica o cantidad de electricidad	Intensidad de campo eléctrico	Potencial, diferencia de potencial, FEM y FCEM	Capacidad	Intensidad de corriente eléctrica	Resistencia
	Ecuación de dimensiones	AT	$MLT^{-3}A^{-1}$	$ML^2T^{-3}A^{-1}$	$M^{-1}L^{-2}T^4A^2$	A	$ML^2T^{-3}A^{-2}$
UNIDADES	Sistema Internacional	Culombio (C)	N/C	Voltio (V)	Faradio (F)	Amperio A	Ohmio (Ω)
UNIDADES	Sistema de Unidades Electrostáticas	uee (franklin o statcoulomb)	$\frac{\text{Dyn}}{\text{Franklin}}$	uee (statvoltio)	uee (cm)	uee (stat-amperio)	uee (statohmio)
UNIDADES	Equivalencia	1 C = $3 \cdot 10^9$ franklin	$1 \frac{\text{dyn}}{\text{franklin}} = 3 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$	1 statvoltio = = 300 V	1 F = = $9 \cdot 10^{11}$ uee capacidad	1 A = = $3 \cdot 10^9$ uee	1 uee = = $9 \cdot 10^{11}$ Ω

ÍNDICE

ÍNDICE

Cód.: 7601

QUÍMICA GENERAL



Diseñado como respuesta al temario oficial del 2.° curso de Bachillerato y como manual de iniciación para aquellos alumnos que cursen estudios de Química General en Facultades y Escuelas Universitarias.
Una exposición teórica suficientemente profunda, complementada con una amplísima selección de problemas –unos, explicados y resueltos; otros propuestos e indicada su solución–, proporciona un conocimiento directo de esta materia y sus aplicaciones.

Cód.: 7600

FÍSICA GENERAL



En la misma línea que en Química General, sus contenidos además de satisfacer el temario oficial de 2.° curso de Bachillerato, sirven como iniciación para los alumnos que cursen estudios de Física General en las Escuelas Universitarias. Siempre que la teoría lo requiera, se proponen ejemplos explicativos, que permiten fijar con claridad las ideas desarrolladas. Así mismo se plantean diversos problemas relacionados, que son resueltos en cada caso, aplicando los conocimientos teóricos expuestos.

Cód.: 7604

1 000 PROBLEMAS DE QUÍMICA GENERAL



Una amplia colección de cuestiones y problemas, explicados y resueltos, presentados en orden de dificultad creciente, muchos de los cuales fueron propuestos en Pruebas de Selectividad o en exámenes de Facultades y Escuelas Técnicas Universitarias.
Cada unidad temática se corresponde con las unidades del libro de teoría y comienza con un breve formulario resumen, presentado en forma de tabla, para facilitar la rápida localización y asimilación de los principales conceptos y fórmulas.

Este libro ofrece al estudiante de Física una amplia colección de cuestiones y problemas, explicados y resueltos, presentados en orden de dificultad creciente, muchos de los cuales fueron propuestos en **PRUEBAS DE SELECTIVIDAD** o en exámenes de **FACULTADES UNIVERSITARIAS** y **ESCUELAS TÉCNICAS**.

Pretendemos con ello complementar los contenidos teóricos de la asignatura, posibilitando la simultaneidad que debe existir entre teoría y práctica, aunque aquella, frecuentemente, se manifieste como una situación idealizada de la realidad.

Un libro diseñado, no para saber más, sino para entender mejor los objetivos de la Física.

ISBN 84-241-7603-0



Editorial Everest, S. A.